SUI SISTEMI LINEARI DI QUADRICHE RIDUCIBILI ED IRRIDUCIBILI A JACOBIANA IDENTICAMENTE NULLA

per

LANDO DEGOLI

RIASSUNTO.

Dopo aver introdotto un metodo per classificare tutti i sistemi lineari riducibili di quadriche dell' S_r a Jacobiana identicamente nulla, si dimostra un teorema sulle varietà basi di un sistema irriducibile, il che consente di determinare tutti i sistemi riducibili ed irriducibili dell' S_5.

Si estendono poi i risultati conseguiti all' S_r e si introducono particolari varietà di Segre, basi di sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla.

1 - Nello spazio lineare S_r, riferito a coordinate proiettive omogenee x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, r$) si assumano $d + 1$ quadriche linearmente indipendenti:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0, \dots\dots\dots\dots, f_d = 0 \qquad (1)$$

con:

$$f_q = \sum_{i,k} a_q^{ik}\, x_i\, x_k \qquad (0 \leqslant q \leqslant d)$$

Un sistema lineare L_d di dimensione d risulta espresso dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i f_i = 0 \text{ con } \lambda_i \text{ numeri complessi.}$$

I sistemi lineari di quadriche di dimensione d a jacobiana di caratteristica m saranno indicati col simbolo: $L_{d/m}$.

Ponendo: $m = r - k$ ($k \geqslant 0$), il sistema si può scrivere $L_{d/r-k}$.

Un sistema $L_{d/m}$ possiede sempre dei sistemi subordinati $L_{g/c}$ che non impongono alle quadriche in essi contenute di essere funzionalmente dipendenti, tali sistemi sono detti banali; in essi si ha:

$$m - 1 \leqslant g \leqslant d - 1 \quad , \quad c = m$$

Invece non è detto che $L_{d/m}$ possieda sempre sistemi subordinati $L_{g/c}$ con:

$$2 \leqslant g \leqslant d - 1 \quad , \quad 2 \leqslant c \leqslant m - 1 \quad , \quad c \leqslant g.$$

Questi, quando esistono, impongono a $c + 1$ quadriche linearmente indipendenti comunque scelte entro $L_{d/c}$ di essere funzionalmente dipendenti. Tali sistemi sono detti *essenziali.*

Abbiamo dimostrato (vedi [8]) il *TEOREMA A:*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare di quadriche L_d *di* S_r*, privo di sistemi subordinati essenziali, sia a jacobiana identicamente nulla di caratteristica* $r - k \leqslant d$ $(k \geqslant 0)$ *è che le quadriche del sistema, che passano per un punto generico di* S_r *abbiano in comune un* S_{k+1}.

Un sistema $L_{p/q}$ con $q > p$ non può essere che del tipo $L_{p/p+1}$ quando in esso esistono $p + 1$ quadriche funzionalmente indipendenti.

Diremo quindi che esso è riducibile in $p + 1$ addenti irriducibili secondo la formula:

$$L^{(1)}_{0/1} + L^{(2)}_{0/1} + \ldots\ldots + L^{(p+1)}_{0/1} = L_{p/p+1}$$

Se consideriamo i sistemi lineari L_{d_1/m_1} L_{d_2/m_2}, ..., L_{d_s/m_s} con $m_i \leqslant d_i$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, s)$ ed inoltre $p \geqslant 0$ quadriche funzionalmente indipendenti, potremo scegliere in ciascun sistema $d_1 + 1$, $d_2 + 1, \ldots\ldots, d_s + 1$ quadriche linearmente indipendenti fra loro.

Diremo che il sistema $L_{d/m}$ con $m \leqslant d$ è riducibile in s addendi ed in p quadriche funzionalmente indipendenti e scriveremo:

$$L_{d/m} = L_{d_1/m_1} + L_{d_2/m_2} + \ldots + L_{d_s/m_s} + L^{(1)}_{0/1} + L^{(2)}_{0/1} + \ldots + L^{(p)}_{0/1}$$

se avremo che:

$$\begin{aligned} d &= d_1 + d_2 + \ldots\ldots + d_s + s + p - 1 \\ m &= m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_s + p \end{aligned} \qquad (2)$$

Abbiamo dimostrato (vedi [8]) il *TEOREMA B:*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema L_d *di quadriche di* S_r*, riducibile in s addenti irriducibili ed in p(p* $\geqslant 0$*) quadriche funzionalmente indipendenti abbia caratteristica* $r-k \leqslant d$ *(*$k \geqslant 0$*), è che per un punto generico P di* S_r *passi un sistema* L_{d-s-p} *di quadriche appartenenti agli addendi irriducibili, aventi in comune* S_{k+s+p}.

Sì poteva supporre che asistessero dei sistemi, che, pur possedendo dei sistemi subordinati, non soddisfacessero alle condizioni (2), ma abbiamo dimostrato (vedi [9]) che ciò è impossibile. Esiste in proposito il *TEOREMA C:*

Se un sistema $L_{d/m}$ *non è irriducibile, esso allora è riducibile in addendi irriducibili.*

Pertanto i sistemi riducibili ed irriducibili sono i soli che esistono. Questo ci permette di determinare tutti i sistemi riducibili dell' S_r e di determinare tutti i sistemi riducibili ed irriducibili dell' S_5.

2 - Ponendo: $k = r-m$, il sistema generico $L_{d/m}$ assume la forma $L_{d/r-k}$ con $k \geqslant 0$. Sia un sistema $L_{d/r-k}$ ($r-k \leqslant d$) di S_r. Per un noto teorema di Terracini (vedi [3]) un iperpiano S_{r-1} di S_r taglia il sistema $L_{d/r-k}$ secondo un sistema di quadriche $L'_{d/r-k}$ dell' S_{r-1} avente la stessa dimensione e la stessa caratteristica.

Quindi nella questione di trovare tutti i sistemi $L_{d/r-k}$ di S_r è indispensabile la ricerca dei sistemi lineari $L_{d/r}$ ($r \leqslant d$) di S_r; in quanto agli altri si può procedere per ricorrenza dall' S_{r-1} all' S_r.

Cominciamo a considerare i *sistemi riducibili* $L_{d/r}$ ($r \leqslant d$) di S_r.

Il primo sistema riducibile che ammette il numero maggiore di quadriche funzionalmente indipendenti nella sua scomposizione è il seguente:

$$L_{2/2} + L_{0/1}^{(1)} + L_{0/1}^{(2)} + \ldots\ldots\ldots + L_{0/1}^{(r-2)} = L_{r/r}.$$

Esso comprende $r-2$ quadriche funzionalmente indipendenti e si potrà scrivere:

$$L_{2/2} + (r-2)\, L_{0/1} = L_{r/r} \quad .$$

Un sistema $L_{g/2}$ con $g < 2$ come sappiamo, non può esistere.

I sistemi che ammettono $r-3$ quadriche funzionalmente indipendenti in ordine di dimensione sono:

$$L_{3/3} + (r-3)\, L_{0/1} = L_{r/r}$$

$$L_{4/3} + (r-3)\, L_{0/1} = L_{r+1/r}$$

$$L_{5/3} + (r-3)\, L_{0/1} = L_{r+2/r}$$

I sistemi con $r-4$ quadriche funzionalmente indipendenti sono:

$$L_{4/4}+(r-4)\,L_{0/1}\quad;\qquad \left\{\begin{array}{l} L_{5/4}+(r-4)\,L_{0/1}=L_{r+1/r}\\[1ex] L_{2/2}+L_{2/2}+(r-4)\,L_{0/1}=L_{r+1/r}\end{array}\right.\quad;$$

$$L_{6/4}+(r-4)\,L_{0/1}\quad;\,\ldots\ldots\ldots;\quad L_{9/4}+(r-4)\,L_{0/1}=L_{r+5/r}\,.$$

Troveremo poi i sistemi:

$$L_{5/5}+(r-5)\,L_{0/1}\quad;\qquad \left\{\begin{array}{l} L_{6/5}+(r-5)\,L_{0/1}=L_{r+1/r}\\[1ex] L_{2/2}+L_{3/3}+(r-5)\,L_{0/1}=L_{r+1/r}\end{array}\right.\quad;$$

$$L_{7/5}+(r-5)\,L_{0/1}\quad;\,\ldots\ldots\ldots;\quad L_{14/5}+(r-5)\,L_{0/1}=L_{r+9/r}\,.$$

Così proseguendo troveremo, quando esistono, tutti i sistemi riducibili di caratteristica r che possiedono quadriche funzionalmente indipendenti.

Dopo di che potremo trovare i sistemi, privi di tali quadriche, che possiedono dei sistemi subordinati $L_{2/2}$. Quello che ne contiene il massimo è:

$$L^{(1)}_{2/2}+L^{(2)}_{2/2}+\ldots\ldots\ldots+L^{(r/2)}_{2/2}=L_{3/2\,r-1/r}$$

ossia:

$\frac{r}{2}\,L_{2/2}$. Questo esiste solo se r è pari.

Poi cercheremo:

$$L_{3/3}+\frac{r-3}{2}\,L_{2/2}\quad;\quad L_{4/3}+\frac{r-3}{2}\,L_{2/2}\quad;\quad L_{5/3}+\frac{r-3}{2}\,L_{2/2}\,.$$

Indi:

$$L_{4/4}+\frac{r-4}{2}\,L_{2/2}\quad;\quad L_{5/4}+\frac{r-4}{2}\,L_{2/2};\ldots\ldots;\,L_{9/4}+\frac{r-4}{2}\,L_{2/2}\,.$$

Poi:

$$L_{5/5}+\frac{r-5}{2}\,L_{2/2}\quad;\quad L_{6/5}+\frac{r-5}{2}\,L_{2/2}\;;\ldots\ldots;\,L_{14/5}+\frac{r-5}{2}\,L_{2/2}\,.$$

Indi:

$$L_{6/6} + \frac{r-6}{2} L_{2/2} \quad ; \quad \begin{cases} L_{7/6} + \frac{r-6}{2} L_{2/2} \\ \\ L_{3/3} + L_{3/3} + \frac{r-6}{2} L_{2/2} \end{cases} ; \quad L_{8/6} + \frac{r-6}{2} L_{2/2} ; \ldots\ldots$$

e così via.

In tal modo troveremo tutti i sistemi che posseggono sistemi subordinati di caratteristica 2.

Cercheremo poi quelli che possiedono sistemi: $L_{3/3}$, $L_{4/3}$, $L_{5/3}$.

Il massimo numero dei primi si trova nel sistema:

$$\frac{r}{3} L_{3/3} \quad \left(\frac{r}{3} = \text{numero intero} \right)$$

Seguono:

$$L_{4/3} + \frac{r-3}{3} L_{3/3} + \frac{r-3}{3} L_{3/3} \ ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e così via.

Fissato r, è chiaro che così proseguendo vengono determinati tutti i possibili sistemi riducibili $L_{d/r}$ $(r \leq d)$.

3 - La conoscenza delle possibili decomposizioni di $L_{d/r}$ non individua ancora la natura specifica dei sistemi.

Per trovare effettivamente la forma di tali sistemi o le loro equazioni si può fare uso del seguente:

TEOREMA D:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema irriducibile L_d di S_r sia a Jacobiana di caratteristica $r-k \leq d$, è che per un punto generico P di S_r passino ∞^k corde della varietà base di detto sistema costituenti un S_{k+1}.

Sia V la varietà base del sistema L_d e supponiamo che la caratteristica sia $r-k \leq d$.

Per il teorema A le quadriche di L_d che passano per un punto P di S_r hanno in comune un S_{k+1}. Esse formano un sistema L_{d-1}.

Una quadrica di L_d che non appartenga a L_{d-1} taglia l' S_{k+1} secondo una quadrica G_k di S_{k+1}, che necessariamente appartiene a tutte le quadriche di L_d e quindi anche alla varietà base V.

Ma una retta generica passante per P e giacente in S_{k+1} taglia G_k in due punti che appartengono anche a V e quindi tale retta è una corda di V. Pertanto per P passano ∞^k corde di V formanti un S_{k+1}.

Viceversa se ∞^k corde di V constituenti un S_{k+1} passano tutte per un punto generico P di S_r ognuna di queste corde avrà due punti R, T su V e quindi su tutte le quadriche del sistema.

Detto Q il coniugato armonico di P rispetto a R e T questo risulterà il coniugato di P rispetto a tutte le quadriche di L_d.

Potendosi ripetere il ragionamento per ciascuna delle ∞^k corde, P risulta coniugato con ∞^k punti, che costituiscono una varietà a k dimensioni. Questa non può essere che un S_k. Infatti tale varietà deve risultare l'intersezione degli iperpiano polari di P rispetto a ciascuna quadrica di L_d.

Quindi un punto P ha per coniugato un S_k e la jacobiana identicamente nulla di caratteristica $r \;\; k$ come volevasi dimostrare.

Con questo teorema si può procedere all'effettiva individuazione dei sistemi $L_{d/r}$ di S_r.

Nell' S_3 sono stati descritti tutti da Bonferroni.

Aggiungendo a quelli trovati da Muracchini nell' S_4 il sistema seguente, si hanno tutti i sistemi $L_{d/4}$ dell' S_4. L'equazione di detto sistema, scritta in forma canonica, risulta:

$$\lambda_0 x_1 x_2 + \lambda_1 x_1(x_1 + x_2) + \lambda_2 x_2(x_1 + x_2) + \lambda_3 x_3 x_4 + \lambda_4 x_3(x_3 + x_4) +$$

$$+ \lambda_5 x_4(x_3 + x_4) = 0$$

Si tratta di un $L_{5/4}$ dell' S_4 riducibile in due $L_{2/2}$, entrambi identificati da tre coppie di iperpiani per un S_2 (rispettivamente di equazioni: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ed $x_3 = 0$, $x_4 = 0$) Manca nella equazione la coordinata x_0 in quanto i due S_2 si intersecano nel punto (1, 0, 0, 0, 0).

4 - Determiniamo ora tutti i sistemi $L_{d/5}$ dell' S_5.

Cominciamo ad elencare i *sistemi riducibili* $L_{d/5}$ *di* S_5. Essi sono:

a) Sistemi $L_5, L_6, \ldots\ldots, L_{10}$, contenenti rispettivamente sistemi: $L_4, L_5, \ldots\ldots, L_9$ di coni con S_1 vertice in comune.
Sistemi L_5, L_6 contenenti sistemi L_4, L_5 di coni per un S_2 ed un S_3.
La loro scomposizione risulta in entrambi i casi:

$$L_{d-1/4} + L_{0/1} = L_{d/5}$$

b) Sistemi L_5, L_6, L_7 contenenti rispettivamente sistemi L_3, L_4, L_5 di S_2 coni con S_2- vertice in comune.

Sistemi L_5 contenenti un sistema L_3 di coni per due S_3.
La loro scomposizione in entrambi i casi risulta:

$$L_{d-2/3} + L_{0/1} + L_{0/1} = L_{d/5} .$$

c) Sistemi L_5 contenenti un sistema $L_{2/2}$ di coppie di iperpiani per un S_3. Risulta così decomposto:

$$L_{2/2} + L_{0/1} + L_{0/1} + L_{0/1} = L_{5/5} .$$

d) Sistemi L_6 contenenti due sistemi $L_{2/2}$ di coppie di iperpiani ciascuno per un S_3. Si ha la decomposizione:

$$L_{2/2} + L_{2/2} + L_{0/1} = L_{6/5} .$$

e) Sistemi L_6 contenenti un sistema $L_{2/2}$ di coppie di iperpiani per un S_3 e un sistema di $L_{3/3}$ di S_2 coni con S_2 vertice in comune.

Sistemi L_6 contenenti un sistema $L_{2/2}$ di coppie di iperpiano per un S_3 e un sistema $L_{3/3}$ di coni per due S_3. Per entrambi si ha la decomposizione:

$$L_{2/2} + L_{3/3} = L_{6/5}$$

Cerchiamo ora i *sistemi irriducibili.*

Per il teorema D i sistemi $L_{d/r}$ di S_r sono quelli la cui varietà base è tale che le sue corde riempiono tutto l' S_r in modo che per un punto P di S_r passa una ed una sola corda.

E' evidente che tali varietà possono essere:

1°) un punto doppio di S_r;

2°) le coppie di spazi sghembi di S_r di dimensione k ed r k 1;

Questi due casi applicati ad S_5 forniscono i seguenti sistemi irriducibili, generalizzazioni di quelli di S_4 trovati da Muracchini (vedi [4]).

Si hanno:

a) Sistemi L_5, L_6, ... , L_{14} di S_0 coni col vertice in comune.

b) Sistemi L_5, L_6. L_7 aventi per base un S_1 ed un S_3 sghembi.

c) Sistemi L_5, L_6, L_7, L_8 aventi per base due S_2 sghembi.

Casi nuovi si presentano per la prima volta solo nell' S_5.

Esiste in proposito il *TEOREMA E:*

Esistono soltanto tre superficie algebriche irriducibili dell' S_5 *che siano base di un sistema lineare di quadriche a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica 5. Esse sono: la rigata razionale normale avente per direttrici due coniche poste su piani sghembi, la rigata razionale normale con direttrice una cubica dell'* S_3 *ed una retta sghemba con l'* S_3, *il cono razionale normale del quart'ordine.*

Indichiamo con V_2^n una superficie di ordine n se esiste, che sia base di un sistema lineare L_d ($d \geq 5$) di quadriche dell' S_5 a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica: 5.

Cominciamo coll'osservare che tutte le quadriche di L_d cono irriducibili, altrimenti se una di esse fosse riducibile, la V_2^n, essendo irriducibile, giacerebbe in un iperpiano di S_5 cioè in un S_4 contro l'ipotesi che essa appartenga all' S_5.

Sappiamo poi che se una V_k^n (varietà di dimensione k e ordine n) appartiene ad una S_r deve soddisfare alla relazione: $r \leq k+n-1$ (vedi [1]). Nel nostro caso si ha: $n \geq 4$. Dimostriamo che è anche $n < 5$.

Consideriamo un S_3 generico di S_5. Questo non appartiene ad alcuna quadrica G di L_d perchè, se così non fosse, la quadrica G, poichè contiene la V_2^n e l' S_3, dovrebbe avere come punti doppi gli $n \geq 4$ punti secondo cui l' S_3 taglia la V_2^n. Ma tale quadrica sarebbe riducibile in contrasto con la dimostrazione precedente. L' S_3. per una nota proprietà dei sistemi lineari, (vedi [3]), taglia il sistema L_d secondo un sistema lineare di quadriche di S_3 avente la stessa dimensione $d \geq 5$ e taglia la V_2^n in n punti. Non può essere $n \geq 5$ perchè le quadriche dell' S_3 che hanno per base 5 o più punti formano un sistema lineare di dimensione $d < 5$ mentre è $d \geq 5$.

Quindi è necessariamente $n = 4$. La varietà base è dunque una V_2^4 di S_5, la quale, essendo irriducibile, non potrà essere che una superficie rigata dell' S_5, oppure la superficie di Veronese.

E' da escludersi che sia la superficie di Veronese F_2^4. Infatti questa, pur essendo effettivamente varietà base di un sistema lineare L_5 di quadriche, aventi le seguenti equazioni canoniche:

$$
\begin{aligned}
&x_0x_3 - x_1^2 = 0\,; \quad x_3x_5 - x_4^2 = 0\,; \quad x_5x_0 - x_2^2 = 0\,: \\
&x_1x_2 - x_0x_4 = 0\,: \quad x_1x_4 - x_3x_2 = 0\,; \quad x_2x_4 - x_5x_1 = 0\,;
\end{aligned}
\tag{3}
$$

si può verificare che la Jacobiana del sistema lineare individuato dalle (3) non è identicamente nulla.

D'altra parte è notorio che la superficie di Veronese non possiede punti doppi apparenti e di conseguenza le sue corde non riempiono lo spazio S_5, quindi non soddisfa alle condizioni del teorema dimostrato.

Resta allora da considerare la V_2^4 rigata razionale normale. Questa gode appunto della proprietà che le sue corde riempiono tutte lo spazio, nel senso che per un punto generico di S_5 passa una sola sua corda. Questo fatto è sufficiente, in base al teorema dimostrato, per affermare che la Jacobiana del sistema lineare individuato dalle quadriche che hanno per base la V_2^4 è identicamente nulla di caratteristica 5.

Occorre tuttavia osservare che esistono tre V_2^4 proiettivamente distinte che indicheremo rispettivamente con A, B, C, (vedi [3]).

A) La V_2^4 rigata razionale normale, avente per direttrici due coniche situate su due piani sghembi, le cui equazioni canoniche sono:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5}$$

base del sistema lineare di quadriche:

$$\lambda_0 (x_0 x_2 - x_1^2) + \lambda_1 (x_0 x_4 - x_1 x_3) + \lambda_2 (x_0 x_5 - x_1 x_4) + \lambda_3 (x_1 x_4 - x_2 x_3) +$$
$$+ \lambda_4 (x_1 x_5 - x_2 x_4) + \lambda_5 (x_3 x_5 - x_4^2) = 0$$

B) La V_2^4 rigata razionale normale, avente per direttrici una retta ed una cubica di un S_3 sghembo rispetto alla retta. Le sue equazioni canoniche sono:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5}$$

Il sistema lineare risulta:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 (x_0 x_2 - x_1^2) + \lambda_1 (x_0 x_3 - x_1 x_2) + \lambda_2 (x_0 x_5 - x_1 x_4) + \\ &+ \lambda_3 (x_1 x_3 - x_2^2) + \lambda_4 (x_1 x_5 - x_2 x_4) + \lambda_5 (x_2 x_5 - x_3 x_4) \end{aligned} \tag{5}$$

C) La V_2^4 cono razionale normale individuato da una V_1^4 razionale normale di un S_4 proiettata da un punto esterno all' S_4.
Le equazioni canoniche sono:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$$

Il vertice del cono risulta il punto (0, 0, 0, 0, 1)
Il sistema lineare è il seguente:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 (x_0 x_2 - x_1^2) + \lambda_1 (x_0 x_3 - x_1 x_2) + \lambda_2 (x_0 x_4 - x_1 x_3) + \\ &+ \lambda_3 (x_1 x_3 - x_2^2) + \lambda_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) + \lambda_5 (x_2 x_4 - x_3^2) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Si verifica facilmente che i sistemi lineari (4), (5), e (6) sono a jacobiana identicamente nulla di caratteristica 5.

Ancora nell' S_5 esiste un sistema lineare di quadriche L_5, la cui varietà base è un V_2^4 che si spezza in una V_2^3 razionale rigata di S_4 e in un piano avente in comune con la V_2^3 una generatrice.

Le equazioni della V_2^3 si possono scrivere:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$$

Quelle del piano:

$$x_0 \quad x_1 = 0 \ , \ x_1 \quad x_2 = 0 \ . \ x_3 \quad x_4 = 0 \ .$$

Il sistema lineare risulta:

$$\lambda_0 (x_0 x_2 \quad x_1^2) + \lambda_1 (x_0 x_4 \quad x_1 x_3) + \lambda_2 (x_1 x_4 \quad x_2 x_3) + \lambda_3 (x_0 \quad x_1) x_5 +$$

$$+ \lambda_4 (x_1 \quad x_2) x_5 + \lambda_5 (x_3 \quad x_4) x_5 = 0$$

La V_2^3 può anche essere riducibile e formata da una quadrica di S_3 e da un piano che passa per una sua generatrice, oppure da tre piani. Di conseguenza la V_2^4 risulta composta da una quadriche di S_3 e da due piani che contengono ciascuno una generatrice oppure da quattro piani. (vedi [7]).

5 - I risultati raggiunti si possono estendere all' S_r.

Giova considerare un tipo speciale di quadriche, riferite in modo tale che la loro equazione sia del tipo:

$$\frac{x_m}{x_n} = \frac{x_n}{x_p} \text{ oppure } \frac{x_m}{x_n} = \frac{x_p}{x_q}$$

I sistemi lineari di quadriche di quel tipo, aventi dimensione minima, con una varietà base tale che le sue corde per un punto P siano ∞^k, per cui la loro caratteristica risulta r k sono soltanto quattro e precisamente:

a) $\dfrac{x_0}{x_1} = \dfrac{x_2}{x_3}$: si tratta di un $L_{0,1}$ formato da una quadrica di S_3 di caratteristica 3 2 = 1. Un punto P è coniugato con un S_2 e per P passano ∞^2 corde della quadrica.

b) $\dfrac{x_0}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_2}$: Si tratta di un $L_{0/1}$ formato da una conica di S_2 di caratteristica 2 - 1 = 1. Un punto P è coniugato con un S_1 e per P passano ∞^1 corde della conica.

c) $\dfrac{x_0}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_2}{x_3}$: Si tratta di un $L_{2/3}$ di S_3 con caracteristica 3. Per un punto P passa una sola corda della varietà base V_1^3, cubica sghemba dell' S_3.

d) $\dfrac{x_0}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_3}{x_4} = \dfrac{x_4}{x_5}$: Si tratta di un $L_{5/5}$ di S_5, la cui varietà base è una V_2^4 già studiata.

Questi sistemi si presentano come dati da una uguaglianza di più rapporti del tipo x_i/x_j ed hanno rispettivamente caratteristica r 2, r 1, r, r (S_r = spazio ambiente).

Se ora ad una qualsiasi di queste uguaglianze si aggiunge un altro rapporto x_{r+1}/x_{r+2} si ottiene un sistema si quadriche di S_{r+2} di caratteristica rispettivamente:

$$(r+2) \quad 2 = r, \qquad (r+2) \quad 1 = r+1, \qquad r+2, \qquad r+2,$$

cioè rispetto al nuovo spazio ambiente hanno la stessa caratteristica.

Questo fatto si ripete in modo analogo aggiungendo un altro rapporto x_{r+3}/x_{r+4}, e poi ancora un altro x_{r+5}/x_{r+6} e così via.

Dimostriamo questa asserzione per il sistema d) che diventa:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_6}{x_7} = \frac{x_8}{x_9} = \ldots\ldots\ldots$$

Consideriamo una varietà $S_i \quad V_{1+i}^{r\ \ i}$ dell' S_r (vedi [1]) con r dispari, le cui equazioni parametriche sono:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \eta, \quad x_2 = \eta^2, \quad x_3 = \mu_0, \quad x_4 = \mu_0\eta, \quad x_5 = \mu_0\,\eta^2,$$

$$x_6 = \mu_1, \quad x_7 = \mu_1\,\eta, \quad x_8 = \mu_2, \quad x_9 = \mu_2\,\eta\ , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Questa varietà è tale che per un punto P di S_r passa una sola sua corda. Infatti detto P $(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_r)$ un punto generico di S_r, affinchè per esso passi una corda della varietà occorre che due punti M ed N di essa siamo allineati con P e, perchè ciò sia, occorre che i minori estratti della matrice:

$$\left\|\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \ldots\ldots\ldots\ldots & x_r \\ 1 & \eta & \eta^2 & \mu_0 & \mu_0\eta & \mu_0\eta^2 & \mu_1 & \mu_1\eta & \mu_2 & \mu_2\eta \ldots\ldots & \mu_{(r\ \ 5)/2}\eta \\ 1 & \eta' & \eta'^2 & \mu_0' & \mu_0'\eta' & \mu_0'\eta'^2 & \mu_1' & \mu_1'\eta' & \mu_2' & \mu_2'\eta' \ldots\ldots & \mu_{(r\ \ 5)/2}\eta' \end{matrix}\right\|$$

siano tutti nulli e perchè ciò accada occorre e basta che siano nulli r- 1 minori ottenuti sostituendo alla terza colonna del primo successivamente le altre colonne.

Si ottiene così un sistema di r -1 equazioni, ad r- 1 incognite.

Tale sistema è sempre compatible. Infatti lo è nell' S_5, perchè in S_5 la varietà S_i V^{r-i}_{l+i} è proprio la V^4_2 razionale normale che sappiamo godere della proprietà richiesta. Passando dall' S_5 all' S_7 viene aggiunta la frazione x_6/x_7 e alla matrice le due colonne:

$$\begin{array}{cc} x_6 & x_7 \\ \mu_1 & \mu_1 \eta \\ \mu'_1 & \mu'_1 \eta' \end{array}$$

Pertanto le due equazioni, che si aggiungono al sistema algebrico, sono di primo grado nelle ulteriori incognite μ_1, μ'_1 e quindi, poichè il sistema è compatibile in S_5, lo sarà pure in S_7. Proseguendo in tal modo si dimostra che il sistema è ancora compatibile in S_9, in S_{11} e così via.

Analoga dimostrazione si può fare per le altre varietà.

Il caso a) dà origine nell' S_5 ad un sistema $L_{2/3}$:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5}$$

con una V^3_3 base, nell' S_7 ad un $L_{5/5}$ avente per base una V^4_4, nell' S_9 ad un $L_{9/7}$ avente per base una V^5_5 e nel caso generale in S_r si ottiene un sistema di dimensione $\binom{(r+1)/2}{2} - 1$ e caratteristica $r - 2$ avente per base una $V^{(r+1)/2}_{(r+1)/2}$.

Il caso b) dà origine nell' S_4 ad un sistema $L_{2/3}$:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$$

con V^3_2 base, nell' S_6 ad un $L_{5/5}$ con V^4_3 base, nell' S_8 ad un $L_{9/7}$ con V^5_4 base in generale nell' S_r ad un sistema di dimensioni $\binom{(r+2)/2}{2} - 1$ e caratteristica $r - 1$ avente per base un $V^{r/2+1}_{r/2}$.

Il caso c) dà nell' S_5 origine ad un $L_{5/5}$ con V^4_2 base già studiata, nell' S_7 ad un $L_{9/7}$ con V^5_3 base:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_6}{x_7}$$

e in generale nell' S_r ad un sistema di dimensioni $\binom{(r+1)/2}{2} - 1$ e caratteristica r con una $V^{(r+1)/2}_{(r-1)/2}$ base.

Il caso d) dà origine a sistemi perfettamente analoghi a quelli del caso precedente a partire dall' S_5.

Da questi sistemi se ne possono ricavare altri col seguente metodo.

Fissato uno qualsiasi di detti sistemi, ad esempio il seguente:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{x_k}{x_{k+1}}$$

Si separino le equazioni delle singole quadriche sotto forma di proporzioni e si scambiano i medi in ciascuna di esse:

$$\frac{x_0}{x_2} = \frac{x_1}{x_3} \;;\; \frac{x_0}{x_4} = \frac{x_1}{x_5} \;;\ldots\ldots\ldots\ldots;\; \frac{x_{k-2}}{x_k} = \frac{x_{k-1}}{x_{k+1}} \,.$$

Ora una, o due o al massimo tre di queste uguaglianze si eguaglino a dei rapporti del tipo x_i/x_j. Si ottengono, quando esistono, dei sistemi che per gli stessi motivi già visti hanno le varietà base che conservano rispetto all' S_r ambiente la caratteristica $r-2, r-1, r$.

Occorre tuttavia osservare che le caratteristiche restano invariate se le frazioni si aggiungono ad una stessa proporzione, mentre passano da $r-2$ ad $r-1$, da $r-1$ ad r se si aggiungono queste frazioni a proporzioni diverse: si veda, ad esempio, più avanti il caso della seconda varietà di Segre.

6 - Diamo due essempi notevoli in cui le varietà base appaiono come varietà di Segre.

Consideriamo in S_r un S_1 ed un S_{r-2} sghembi rispettivamente di equazioni:

$$x_0 = x_1 = 0$$

$$x_2 = x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = x_r = 0$$

Le quadriche che contengono i due spazi sono:

$$x_0x_2 = 0 \;;\; x_0x_3 = 0 \;;\ldots\ldots\ldots\ldots;\; x_0x_r = 0$$

$$x_1x_2 = 0 \;;\; x_1x_3 = 0 \;;\ldots\ldots\ldots\ldots;\; x_1x_r = 0$$

Il sistema lineare L_d da esse individuato ha dimensione $d = 2r-3$ e caratteristica r, poichè la varietà base costituita da S_1 ed S_{r-2} verifica il teorema D.

Ciò premesso consideriamo la varietà di Segre W dello spazio S_{2r-3} rappresentata dalle coppie di punti degli spazi S_1 ed S_{r-2}, le cui equazioni parametriche sono date da:

$$\begin{aligned} \rho y_{0p} &= x_0 x_p \\ & \qquad\qquad (p = 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, r) \qquad (7) \\ \rho y_{1p} &= x_1 x_p \end{aligned}$$

con ρ fattore di proporzionalità.

Tale varietà di Segre W è base di un sistema lineare di dimensioni $1/2\, r(r-3)$ di quadriche dell'S_{2r-3} a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica $2r-5$. Tale varietà ha dimensione $r-1$ e ordine $r-1$.

Infatti, eliminando dalle (7) i parametri x_0, x_1, x_p si ottengono le equazioni:

$$y_{0m}\, y_{1n} - y_{1m}\, y_{0n} = 0 \qquad (m \neq n = 2, 3, \ldots\ldots, r)$$

che rappresentano $\binom{r-1}{2}$ quadriche, che si possono scrivere nella forma:

$$\frac{y_{0m}}{y_{1m}} = \frac{y_{0n}}{y_{1n}} \qquad (m \neq n = 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, r)$$

Esplicitando m ed n si ha:

$$\frac{y_{02}}{y_{12}} = \frac{y_{03}}{y_{13}} = \frac{y_{04}}{y_{14}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{y_{0r}}{y_{1r}}$$

Come si vede dal numero delle proporzioni la dimensione del sistema è: $\binom{r-1}{2} - 1 = 1/2\, r(r-3)$.

Ponendo: $2r-3 = k$ ed $y_{02} = x_0$, $y_{12} = x_1$, $y_{03} = x_2$, $y_{13} = x_3$, ……… ……$y_{0r} = x_{k-1}$, $y_{1r} = x_k$, si ottiene:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots\ldots = \frac{x_{k-1}}{x_k} \quad ,$$

che è proprio il sistema già studiato nel n° 5 in a) considerato ora nello spazio S_k.

Sappiamo già che tale sistema ha per base un $V^{(k+1)/2}_{(k+1)/2}$ di S_k, ossia una V^{r-1}_{r-1} di S_{2r-3} ed è caratteristica: $k-2 = 2r-5$.

Consideriamo in S_r un S_2 ed una S_{r-3} sghembi di equazioni:

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_r = 0$$

Le quadriche che contengono i due spazi sono:

$$x_0 x_i = 0 \quad ; \quad x_1 x_h = 0 \quad ; \quad x_2 x_k = 0 \quad (i, h, k = 3, 4, \ldots\ldots, r)$$

Il sistema da esse individuato ha dimensione $3r - 7$ e caratteristica r per il teorema D.

Consideriamo la varietà di Segre Z rapresentata dalle coppie di punti degli spazi S_2 ed S_{r-3} di equazione:

$$\begin{aligned} \rho y_{0p} &= x_0 x_p \\ \rho y_{1p} &= x_1 x_p \qquad\qquad (p = 3, 4, 5, \ldots\ldots, r) \\ \rho y_{2p} &= x_2 x_p \end{aligned} \tag{8}$$

Eliminando x_0, x_1, x_2, x_p dalle (8) si ottiene:

$$\begin{aligned} y_{0k}y_{1h} - y_{0h}y_{1k} &= 0 \\ y_{0k}y_{2h} - y_{0h}y_{2k} &= 0 \qquad\qquad (k \neq h = 3, 4, \ldots\ldots, r) \\ y_{1k}y_{2h} - y_{1h}y_{2k} &= 0 \end{aligned}$$

Si tratta di $3\binom{r-2}{2}$ quadriche.

Cerchiamo lo spazio in cui la dimensione di questo sistema è uguale alla dimensione dello spazio ambiente. Si avrà:

$$3\binom{r-2}{2} - 1 = 3r - 7$$

da cui

$$r = 5$$

Perciò lo spazio è un S_8. Le 9 quadriche:

$$\frac{y_{03}}{y_{04}} = \frac{y_{13}}{y_{14}} = \frac{y_{23}}{y_{24}} \; ; \; \frac{y_{03}}{y_{05}} = \frac{y_{13}}{y_{15}} = \frac{y_{23}}{y_{25}} \; ; \; \frac{y_{04}}{y_{05}} = \frac{y_{14}}{y_{15}} = \frac{y_{24}}{y_{25}} \tag{9}$$

hanno per base una V_4 di equazioni parimetriche:

$$y_{03} = 1,\quad y_{13} = \mu,\quad y_{23} = \nu,\quad y_{04} = \eta,\quad y_{14} = \mu\eta,\quad y_{24} = \nu\eta,$$

$$y_{05} = \theta,\quad y_{15} = \mu\theta,\quad y_{25} = \nu\theta\ .$$

con una dimostrazione analoga a quella già fatta in casi precedenti, partendo dal sistema di $L_{2/3}$ di S_5:

$$\frac{y_{03}}{y_{04}} = \frac{y_{13}}{y_{14}}\ ;\ \frac{y_{03}}{y_{05}} = \frac{y_{13}}{y_{15}}\ ;\ \frac{y_{04}}{y_{05}} = \frac{y_{14}}{y_{15}}$$

che ha per base una V_3^3 di S_5. si dimostra che la V_4 è tale che per un punto P di S_8 passano ∞^1 corde di essa. Pertanto la caratteristica del sistema (9) è 7 .

La V_4 è una varietà si Segre che per una nota formula ha ordine:

$$\binom{r+1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

Questo sistema ne genera subito un altro se ai tre gruppi di frazioni (9) si uguagliano rispettivamente i rapporti:

$$\frac{y_{33}}{y_{34}}\ ,\ \frac{y_{33}}{y_{35}}\ ,\ \frac{y_{34}}{y_{35}}$$

Si ottiene un sistema L_{17} di S_{11} avente per base una V_5^6 di S_{11} che è una varietà di Segre generata dalle coppie di punti di un S_2 ed un S_3 sghembi di S_6. La caratteristica del sistema non è r 1 perchè il numero dei parametri della varietà non è aumentato parallelamente alla dimensione dello spazio. Infatti si ha:

$$\begin{array}{llll} y_{03} = 1 & y_{13} = \mu & y_{23} = \nu & y_{33} = \rho \\ y_{04} = \eta & y_{14} = \mu\eta & y_{24} = \nu\eta & y_{34} = \rho\eta \\ y_{05} = \theta & y_{15} = \mu\theta & y_{25} = \nu\theta & y_{35} = \rho\theta \end{array}$$

Contando i parametri si osserva che sono 5 mentre la dimensiones dello spazio è 11 e la caratteristica del sistema è 11.

Riassumendo: *esiste una varietà di Segre rappresentata dalle coppie di punti di due S_2 sghembi di S_5, base di un sistema lineare di quadriche di S_8 di dimensione 8 e caratteristica 7. Tale varietà ha dimensione 4 e ordine 6.*

Esiste inoltre una varietà di Segre rappresentata dalle coppie di punti di un S_2 e di un S_3 sghembi di S_6, base di un sistema lineare di quadriche di S_{11} di dimensione 17 e caratteristica 11. Tale varietà ha dimensione 5 e ordine 10.

NOTA. Se si considera la varietà di Segre generata da un S_3 e da un S_{r-4} sghembi di S_r non si ottiene più che la caratteristica del sistema sia minore od uguale alla dimensione dello spazio ambiente. Infatti, limitandoci al caso di due S_3 sghembi di S_7 si ottiene una V_6 di S_{15} le cui corde non riempiono più tutto lo spazio.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BERTINI: *"Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi"*. Messina - 1923.

[2] G. BONFERRONI: *"Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare"* R. Acc. Scienze di Torino vol. 50, 1914-15.

[3] A. TERRACINI: *"Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà"*. Atti R. Acc. Sc. Torino. Nota II, 51 (1916) III, 55, 1919-20.

[4] L. MURACCHINI: *"Sulle varietà V_5 i cui spaci tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria"*. (parte II), Riv. Mat. Univ. Parma, 3, 75-89 (1952).

[5] L. DEGOLI: *"Sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica $\leqslant r$"*. Acc. Sc. Bologna, Rend. Serie X1, Tomo X 1963.

[6] L. DEGOLI: *"Sulle varietà V_6 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria"*. Att. Sem. Mat. e Fis. Università di Modena Vol. XVI - 1967.

[7] S. XAMBO': *"On projectives varieties of minimal degree"*. Collectanea Mathematica - Barcelona - 1981 - vol. XXXII.

[8] L. DEGOLI: *"Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla"*. Collectanea Mathematica-Barcelona 1982 Vol. XXXIII.

[9] L. DEGOLI: *"Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle"*. Demonstratio Mathematica - Warszawa - n° 3 Vol. 16 - 1983.

Indirizzo: Prof. LANDO DEGOLI
Via Berengario n° 82/C
41012 CARPI (Modena) ITALY