LA RELATIVITÀ GENERALE PROIETTIVA ED IL CAMPO SCALARE-TENSORIALE

por

GIUSEPPE ARCIDIACONO
(a Roma)*

1. LA TEORIA GRAVITAZIONALE DI BRANS-DICKE

È noto che in base al principio di Mach, l'inerzia dei corpi dipende dalla influenza della materia lontana. Ne segue allora che la relatività generale di Einstein deve essere perfezionata aggiungendo al campo gravitazionale tensoriale g_{ik}, un campo scalare ϕ. Secondo C. Brans ed R. H. Dicke [1], tale scalare è legato alla costante della gravitazione di Newton g (che si considera variabile) dalla relazione $\phi = 1/g$, ed il campo ϕ ha le dimensioni $(M\,L^{-3}\,T^{-2})$.

Per ottenere le nuove equazioni della gravitazione, occorre partire dal principio variazionale

$$(1,1) \qquad \delta \int [\phi R + (16\,\pi\,c^{-4})\,L - \omega\,\phi^{-1}\,\psi^2)\,d^4 x \sqrt{-g}\,] = 0$$

dove $\psi_s = \partial_s\phi$ e $\psi^2 = \psi_s\psi^s$, mentre ω è una costante. Variando prima le componenti del tensore metrico e le sue derivate, e poi le ϕ e le ψ_s, otteniamo le equazioni del campo gravitazionale scalare-tensoriale di Brans-Dicke:

$$(1,2) \qquad \boxed{\begin{array}{l} R_{ik} \quad \frac{1}{2} g_{ik} R \quad \phi^{-1} (\nabla_i \psi_k \quad g_{ik} \Box \phi) + \\ \qquad (\omega\,\phi^{-2})(\psi_i\,\psi_k - \frac{1}{2} g_{ik}\,\psi^2) = (8\,\pi\,\phi^{-1}\,c^4)\,T_{ik} \\ R + 2\,\psi\,\phi^{-1}\,\Box\,\phi \quad \omega\,\phi^{-2}\,\psi^2 = 0 \end{array}}$$

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Italia).

dove abbiamo posto

$$(1,3) \qquad \Box \phi = \nabla_s \psi^s = (1/\sqrt{-g})\partial_i (\psi^i \sqrt{-g})$$

Moltiplicando la prima equazione (1,2) per g^{ik}, si deduce che

$$(1,4) \qquad -R + 3\,\phi^{-1}\,\Box\,\phi + \omega\,\phi^{-2}\,\psi^2 = (8\,\pi\,\phi^{-1}\,c^{-4})\,T$$

e sommandola alla seconda equazione (1,2) otteniamo l'equazione del campo scalare ϕ, cioè

$$(1,5) \qquad \boxed{\Box\,\phi = [8\,\pi\,/\,(3+2\,\omega)\,c^4\,]\,T}$$

Nel caso di un fluido descritto dal tensore energetico

$$(1,6) \qquad T_{ik} = (\mu + p/c^2)\,u_i\,u_k + p\,g_{ik}$$

dove μ è la densità materiale e p la pressione, si ha

$$(1,7) \qquad T = 3p - \mu\,c^2$$

e poiché la parte dovuta al campo elettromagnetico si annulla, nella equazione del campo scalare non vi è contributo del campo elettromagnetico. Esso interviene invece nella prima equazione.

La teoria di Brans-Dicke si presta però a varie critiche, perché introduce un campo scalare estraneo alla geometria dello spazio-tempo. Inoltre, poiché essa è dedotta da un principio variazionale, modificando la lagrangiana si possono formulare nuove teorie del campo scalare-tensoriale [2]. Si é cercato allora di geometrizzare il campo scalare ϕ, ampliando opportunamente la geometria dello spazio-tempo, ma la via da seguire è indeterminata, e questo può essere fatto in vari modi.

2. LE TEORIE UNITARIE DI WEYL E DI JORDAN-THIRY

La teoria gravitazionale di Einstein può essere generalizzata collegandola a quella elettromagnetica, ed allora si ottengono le "teorie unitarie" della materia e dell'elettricità. Ma anche in questo caso la via da seguire è indeterminata, e si possono costruire molti tipi di teorie tra loro assai diverse.

Per esempio, nella teoria unitaria di Weyl [3] si introduce la connessione

$$(2,1) \qquad \Gamma^i_{kl} = \left\{ {i \atop kl} \right\} + \omega\,(\delta^i_k\,\varphi_l + \delta^i_l\,\varphi_k - a_{kl}\,\varphi^i)$$

dove φ_i è il potenziale elettromagnetico, ed ω è una costante. Partendo da un principio variazionale, si ricavano le equazioni di Weyl

$$\boxed{\begin{aligned} &R_{ik} \quad \frac{1}{2} R\, g_{ik} \quad 6\, \omega^2 \left[\varphi_i \varphi_k \quad \frac{1}{6} (3\, \varphi^2 \quad 1)\, g_{ik} \right] = \\ &\qquad = \chi \left(F_{is} F^{s}{}_{.k} + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} g_{ik} \right) \\ &\nabla_s F_{i.}^{s} = (3\, \omega^2 / \chi)\, \varphi_i \qquad \text{con } \varphi^2 = \varphi_s \varphi^s \end{aligned}} \tag{2,2}$$

dove $F_{ik} = \mathrm{Rot}\ \varphi_j$ è il campo elettromagnetico. Dalla prima equazione, moltiplicandola per g^{ik}, si deduce che

$$R = \quad 4\, \omega^2\, (1 \quad 3\, \varphi^2 / 2) \tag{2,3}$$

Nella teoria di Weyl, il campo elettromagnetico viene interpretato geometricamente come "curvatura di misura", nel senso che nello spazio-tempo di Weyl le lunghezze cronotopiche non sono più invarianti, cosa che è poco soddisfacente.

Invece, nella teoria unitaria di Kaluza-Klein, le equazioni gravitazionali di Einstein vengono estese allo spazio a 5 dimensioni [4]. Poiché la 5.ª coordinata non ha un chiaro significato fisico, essa è stata interpretata de Veblen in termini di geometria differenziale proiettiva [5]. Successivamente, la teoria di Kaluza-Klein è stata generalizzata da Jordan e Thiry [6], i quali introducono una metrica 5-dimensionale γ_{AB} (con $AB = 1, 2 \ldots 5$), e pongono

$$\gamma_{i5} = \omega\, \phi_i \quad ; \quad \gamma_{55} = \quad \phi^2 \tag{2,4}$$

Il potenziale elettromagnetico è allora dato da

$$\varphi_i = \gamma_{i5} / \gamma_{55} = \quad \omega\, \phi_i / \phi^2 \tag{2,5}$$

In conseguenza $\varphi_5 = 1$, e supponendo che $\partial_5 = 0$, si ha

$$F_{ik} = \mathrm{Rot}\ \varphi_i \quad ; \quad F_{i5} = 0 \tag{2,6}$$

Le equazioni di Einstein generalizzate si scrivono allora così, in forma 4-dimensionale

$$
(2{,}7)\qquad \boxed{\begin{array}{l}
\hat{R}_{ik} - \dfrac{1}{2}\hat{R}\, g_{ik} - (\omega^2\, \phi^2/2)(F_{i.}^{\ s} F_{sk} + \dfrac{1}{4} F_{rs} F^{rs} g_{ik}) + \\
\qquad\qquad \phi^{-1}(\nabla_i \psi_k - g_{ik}\, \Box\, \phi) = \chi\, T_{ik} \\
\omega\, \nabla_k (\phi^3\, F_{i.}^{\ k}) = 2\, \chi\, \phi^2\, T_{i5} \\
2\, \hat{R} + 3\, \omega^2\, \phi^2\, F^2 = 4\, \chi\, T_{55} \qquad \text{con } F^2 = F_{rs} F^{rs}
\end{array}}
$$

dove $\hat{R}_{ik}$ e ∇_i sono calcolato rispetto alla metrica g_{ik}, e si ha

$$
(2{,}8)\qquad T_{AB} = \mu\, u_A\, u_B
$$

che generalizza il tensore energetico "materia-pura" della relatività ristretta.

Dalla prima equazione (2,7) si deduce che

$$
(2{,}9)\qquad R + 3\, \phi^{-1}\, \Box\, \phi = \chi\, \hat{T}
$$

e sostituendo nella 3.ª equazione segue che

$$
(2{,}10)\qquad 3\,(2\, \Box\, \phi + \omega^2\, \phi^3\, F^2) = 2\, \chi\, \phi\, (2\, T_{55} + \hat{T})
$$

In particolare, per $\varphi_i = 0$, otteniamo le equazioni del campo scalare-tensoriale

$$
(2{,}11)\qquad \boxed{\begin{array}{l}
\hat{R}_{ik} - \dfrac{1}{2}\hat{R}\, g_{ik} - \phi^{-1}(\nabla_i \psi_k - g_{ik}\, \Box\, \phi) = \chi\, T_{ik} \\
T_{i5} = 0 \qquad ; \qquad \hat{R} = 2\, \chi\, T_{55}
\end{array}}
$$

Invece la (2,10) si riduce alla

$$
(2{,}12)\qquad 3\, \Box\, \phi = \chi\, \phi\, (2\, T_{55} + \hat{T})
$$

Possiamo quindi concludere che la *teoria di Brans-Dicke non è deducibile da quella di Jordan-Thiry*, ma la contiene solo nel caso in cui si ha $\omega = 0$. Però anche la teoria di Jordan-Thiry é poco soddisfacente, sia perché non dà una adeguata interpretazione fisica della 5.ª coordinata, e sia perché il tensore energetico T_{AB} viene costruito in modo arbitrario.

3. LE EQUAZIONI DI MAXWELL E DI EINSTEIN GENERALIZZATE

Abbiamo visto nei precedenti lavori [7] che la indeterminazione nelle teorie unitarie può essere tolta perfezionando prima in modo *univoco* la relatività ristretta, e cioé passando all'Universo di De Sitter a curvatura costante, che viene studiato con i metodi della geometria proiettiva classica. Si ottiene così la "relatività speciale proiettiva" (RSP), e le equazioni di Maxwell generalizzate, invarianti per il gruppo di Fantappiè, ci descrivono il campo magnetoidrodinamico H_{AB} a 10 componenti. Viene in tal modo stabilito un primo legame tra materia ed elettricità, rimanendo con una teoria gruppale.

Se poi supponiamo che la materia-elettricità producono una curvatura e torsione *locali* nel cronotopo di De Sitter, otteniamo la "relatività generale proiettiva" (RGP), nella quale le equazioni di Einstein generalizzate sono scritte in modo univoco

$$\boxed{R_{AB} - \frac{1}{2} R\,\gamma_{AB} = \chi\, T_{AB}} \tag{3,1}$$

dove γ_{AB} é la metrica 5-dimensionale, e T_{AB} é il tensore energetico del campo magnetoidrodinamico

$$T_{AB} = H_{AS}\, H^{S}_{.B} + \frac{1}{4} H_{RS}\, H^{RS}\, \gamma_{AB} \tag{3,2}$$

Poiché tali equazioni, in coordinate armoniche ($\Box\, x^{A} = 0$), si scrivono così, in prima approssimazione

$$\Box\, \gamma_{AB} = 2\, \chi\, T_{AB} \tag{3,3}$$

ne deduciamo che le γ_{AB} *hanno il significato fisico di "potenziali gravitazionali" e sono strettamente connessi alla struttura del tensore energetivo del campo magnetoidrodinamico.* Ne segue che nella nostra teoria le γ_{i5} non sono più i potenziali elettromagnetici, mentre γ_{55} é un potenziale scalare legato alla *azione* del campo magnetoidrodinamico.

Nel precedente lavoro [8] abbiamo scritto le equazioni generalizzate di Einstein nel caso del campo gravitazionale vettoriale-tensoriale, ed abbiamo ottenuto delle equazioni simili a quelle di Jordan-Thiry (per $\phi = 1$) ed a quelle di Veblen. Adesso ci proponiamo di studiare le equazioni (3,1) nel caso del campo gravitazionale scalare-tensoriale (per il quale $\gamma_{i5} = 0$). A questo scopo é necessario estendere le formule della derivazione proiettiva al caso della RGP, nella quale le coordinate proiettive sono date da

$$\overline{x}^{i} = x^{i}\, \mathcal{A}^{-1} \quad ; \quad \overline{x}^{5} = r\, \mathcal{A}^{-1} \tag{3,4}$$

dove abbiamo posto

$$\mathcal{A}^2 = \gamma_{55} + 2\,\gamma_{i5}\, x^i/r + \gamma_{ik}\, x^i x^k/r^2 \tag{3,5}$$

Occorre allora utilizzare la formule [9]:

$$\bar{\partial}_i \bar{\varphi} = \mathcal{A}^{1-N}\, \partial_i(\mathcal{A}^N \varphi) \quad ; \quad r\, \bar{\partial}_5\, \bar{\varphi} = \mathcal{A}^{1-N}\, (N - x^s\, \partial_s)(\mathcal{A}^N \varphi) \tag{3,6}$$

dove N è il grado di omogeneità della $\bar{\varphi}(\bar{x}_A)$ rispetto alle $\bar{x}_A$. Se teniamo presente che

$$\partial_i\, \mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}\, (X_i + Y_i) \tag{3,7}$$

otteniamo le nuove formule

$$\begin{cases} \bar{\partial}_i\, \bar{\varphi} = \mathcal{A}\, \partial_i\, \varphi + N \mathcal{A}^{-1}\, (X_i + Y_i)\varphi \\ r\, \bar{\partial}_5\, \bar{\varphi} = \mathcal{A}\, N\, \varphi - x^s\, [N \mathcal{A}^{-1}\, (X_s + Y_s)\varphi + \mathcal{A}\, \partial_s\, \varphi] \end{cases} \tag{3,8}$$

Nel caso della RSP, si ha $\mathcal{A} = A$, $X_i = x_i$; $Y_i = 0$, ed allora ci riduciamo alle formule più semplici

$$\bar{\partial}_i\, \bar{\varphi} = A\, \partial_i\, \varphi + (N/Ar^2) x_i\, \varphi \quad ; \quad r\, \bar{\partial}_5\, \bar{\varphi} = (N/A)\, \varphi - A\, x_s\, \partial_s\, \varphi \tag{3,9}$$

Fatta questa premessa, facciamo l'ipotesi che $x^i/r \sim 0$, e cioé supponiamo che la distribuzione materia-elettricità produca una perturbazione *locale* del cronotopo di De Sitter. Avremo allora

$$\mathcal{A} = \phi \quad ; \quad X_i = \phi_i \quad ; \quad Y_i = \phi\, \psi_i \tag{3,10}$$

e quindi le (3,8) si riducono alle

$$\bar{\partial}_i\, \bar{\varphi} = \phi\, \partial_i\, \varphi + N\, \phi^{-1}\, (\phi_i + \phi\, \psi_i) \quad ; \quad r\, \bar{\partial}_5\, \bar{\varphi} = N\, \phi\, \varphi \tag{3,11}$$

Se ci riferiamo alla teoria *scalare-tensoriale* ($\phi_i = 0$), abbiamo

$$\bar{\partial}_i\, \bar{\varphi} = \phi\, \partial_i\, \varphi + N\, \psi_i\, \varphi \quad ; \quad \bar{\partial}_5\, \bar{\varphi} = (N/r)\phi\, \varphi \tag{3,12}$$

Tali formule sono valide per $\vec{x}/r \sim 0$ e $t/t_0 \sim 0$, e ci permettono di trascrivere la teoria scalare-tensoriale in forma 4-dimensionale.

4. STUDIO DELLA CONNESSIONE PROIETTIVA

Nel caso del campo gravitazionale scalare-tensoriale, la metrica 5-dimensionale ha le seguenti componenti

$$\boxed{\gamma_{ik} = a_{ik} \quad ; \quad \gamma_{i5} = 0 \quad ; \quad \gamma_{55} = \phi^2} \tag{4,1}$$

Se allora teniamo presente la identità

$$\gamma^{AS}\gamma_{SB} = \delta^A{}_B \tag{4,2}$$

otteniamo il seguente sistema di equazioni

$$\gamma^{is}a_{ks} = \delta^i{}_k \quad ; \quad \gamma^{5s}a_{ks} = 0 \quad ; \quad \gamma^{i5}\,\phi^2 = 0 \quad ; \quad \gamma^{55}\,\phi^2 = 1 \tag{4,3}$$

e quindi si hanno le componenti controvarianti

$$\boxed{\gamma^{ik} = a^{ik} \quad ; \quad \gamma^{i5} = 0 \quad ; \quad \gamma^{55} = \phi^{-2}} \tag{4,4}$$

Per scrivere la (3,1) in forma 4-dimensionale, supponiamo che la metrica γ_{AB} sia una funzione omogenea di grado N nelle $\bar{x}^A$. Ne segue, in base alle (4,2) che γ^{AB} sarà una funzione omogenea di grado $-N$ nelle $\bar{x}^A$, ed allora la connessione proiettiva

$$2\,\pi^A_{BC} = \gamma^{AS}\,(\bar{\partial}_B\,\gamma_{CS} + \bar{\partial}_C\,\gamma_{BS} \quad \bar{\partial}_S\,\gamma_{BC}) \tag{4,5}$$

sarà omogenea di grado $N + (N \quad 1) - 1$ nelle $\bar{x}^A$. Fatta questa premessa, le componenti della connessione proiettiva risultano le seguenti

$$\boxed{\begin{array}{ll} \pi^i_{kl} = \phi\left\{{}^{\,i}_{kl}\right\} + n\,(\delta^i{}_k\,\psi_l + \delta^i{}_l\,\psi_k \quad a_{kl}\,\psi^i) & \\ \pi^i_{55} = \cdot(n+1)\,\phi^2\,\psi^i \quad : & \pi^5_{5i} = (n+1)\,\psi_i \\ \pi^i_{k5} = (n/r)\,\phi\,\delta^i{}_k \quad ; & \pi^5_{ik} = (n/r)\,\phi^{-1}\,a_{ik} \\ \pi^5_{55} = (n/r)\,\phi & \text{con} \quad n = N/2 \end{array}} \tag{4,6}$$

dove abbiamo posto $\psi^i - a^{ik}\,\psi_k$. È interessante osservare che la parte spazio-temporale della connessione e simile a quella (2,1) della teoria unitaria di Weyl. Questo è spiegabile col fatto che nella relatività proiettiva le lunghezze spazio-temporali non sono più invarianti.

È da osservare che nel nostro caso, la metrica indotta 4-dimensionale è simmetrica, ed è data da

$$(4{,}7) \qquad g_{ik} = \phi^{-2} (a_{ik} + \psi_i \psi_k) \quad ; \quad \underset{\vee}{g_{ik}} = 0$$

Se ne deduce che le componenti controvarianti sono

$$(4{,}8) \qquad g^{ik} = \phi^2 a^{ik} \quad \psi^i \psi^k/(\phi^2 \quad \psi^2)$$

Poichè abbiamo visto che $\gamma^{ik} = a^{ik}$, per tale motivo se adoperiamo la metrica a_{ik}, invece di g_{ik}, le equazioni del campo scalare-tensoriale assumono la loro più semplice forma.

5. LE EQUAZIONI DEL CAMPO SCALARE-TENSORIALE

Per calcolare le componenti del tensore contratto di curvatura e torsione di Cartan

$$(5{,}1) \qquad \boxed{R_{AB} = \bar{\partial}_A \pi^C_{BC} \quad \bar{\partial}_C \pi^C_{BA} + \pi^C_{BD} \pi^D_{AC} - \pi^C_{AB} \pi^D_{CD}}$$

ricordiamo che la connessione è una funzione omogenea di grado - 1 nelle $\bar{x}^A$, e quindi le derivate proiettive si calcolano con le formule

$$(5{,}2) \qquad \bar{\partial}_i \bar{\varphi} = \phi \partial_i \varphi - \psi_i \varphi \quad ; \quad \bar{\partial}_5 = (\phi/r) \varphi$$

Tenendo conto delle (4,6) otteniamo le seguenti componenti del tensore (5,1) in forma 4-dimensionale

$$(5{,}3) \qquad \boxed{\begin{aligned} R_{ik} &= \phi^2 \hat{R}_{ik} + \phi [(3n+1) \nabla_i \psi_k + n a_{ik} \Box \phi] + \\ &\quad - 3n [(n+1) \psi_i \psi_k \quad n a_{ik} \psi^2] + n (3n \quad 1) a_{ik}/r^2 \\ R_{i5} &= (n+1)(1 - 3n) \phi \psi_i/r^2 \\ R_{55} &= (n+1) \phi^2 (\phi \Box \phi + 3n \psi^2) \quad 4n \phi^2/r^2 \end{aligned}}$$

dove $\hat{R}_{ik}$ e ∇_i sono costruiti a partire da a_{ik}. L'invariante scalare si trova con la formula

$$(5{,}4) \qquad R = a^{ik} R_{ik} + \phi^{-2} R_{55}$$

ed é dato da

$$R = \phi^2 \hat{R} + 2(4n+1)\,\phi \,\Box\, \phi + 12\, n^2\, \psi^2 + 4n(3n-2)/r^2 \tag{5,5}$$

dove $\hat{R} = a^{ik} R_{ik}$. Fatta questa premessa, le equazioni di Einstein generalizzate (3,1) si scrivono così, in forma 4-dimensionale

$$\begin{cases} R_{ik} - \dfrac{1}{2} R\, a_{ik} = \chi\, T_{ik} \qquad ; \qquad R_{i5} = \chi\, T_{i5} \\ R_{55} - \dfrac{1}{2} \phi^2\, R = \chi\, T_{55} \end{cases} \tag{5,6}$$

e tenendo conto delle (5,3) e (5,5) otteniamo le seguenti equazioni del campo scalare-tensoriale, in cui compare un termine cosmologico:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{R}_{ik} - \frac{1}{2}\hat{R}\, a_{ik} + (3n+1)\,\phi^{-1}\,(\nabla_i \psi_k - a_{ik}\,\Box\,\phi) + \\ &\qquad + 3n\,\phi^{-2}\,[(n+1)\,\psi_i\,\psi_k + n\,\psi^2\, a_{ik} + (n-1)a_{ik}/r^2\,] = \\ &\qquad = \chi\,\phi^{-2}\, T_{ik} \\ &(n+1)(3n-1)\,\partial_i\,\phi^2 = -2\,\chi\, r\, T_{i5} \\ &\hat{R} + 6n\,[\phi^{-1}\,\Box\,\phi + (n-1)\,\phi^{-2}\,\psi^2 + (2n/r^2)\,\phi^{-2}\,] = \\ &\qquad = -2\,\chi\,\phi^4\, T_{55} \end{aligned}} \tag{5,7}$$

Per ottenere l'equazione del campo scalare, moltiplichiamo la prima equazione per a^{ik}, ed avremo

$$\begin{aligned} &\hat{R} + 3(3n+1)\,\phi^{-1}\,\Box\,\phi + 3n(5n+1)\,\phi^{-2}\,\psi^2 + \\ &\qquad + 12n(n-1)\,\phi^{-2}/r^2 = -\chi\, T\phi^{-2} \qquad \text{con} \quad T = a^{ik}\, T_{ik} \end{aligned} \tag{5,8}$$

Sottraendo dall'ultima delle (5,7), otteniamo l'equazione del campo scalare:

$$\boxed{3(n+1)\,(\phi\,\Box\,\phi + 3n\,\psi^2) + 12\,n/r^2 = \chi\,(2\,\phi^2\, T_{55} - T)} \tag{5,9}$$

La prima e la terza equazione (5,7) sono simili a quelle (1,2) della teoria di Brans-Dicke, ma adesso appare un termine cosmologico. Invece, la (5,9) è simile alla (1,5) e si può semplificare se teniamo presente che vale la relazione

$$\Box\,\phi^{3n+1} = (3n+1)\,\phi^{3n-1}\,(\phi\,\Box\,\phi + 3n\,\psi^2) \tag{5,10}$$

Infine, la seconda delle (5,7) ci dice a quale condizione deve soddisfare la componente T_{i5} del tensore energetico, perché il campo gravitazionale risulti scalare-tensoriale. In particolare, se supponiamo che si ha $T_{i5} = 0$, tale equazione ci permette di determinare i valori del parametro n. Infatti, se vogliamo che il campo scalare non sia costante, si deve avere

$$(5,11) \qquad n = \; 1 \qquad \text{ovvero} \qquad n = 1/3$$

Nel primo caso, dalle (5,7) e (5,9) si deduce che

$$(5,12) \qquad \begin{cases} \hat{R}_{ik} - \dfrac{1}{2} \hat{R}\, a_{ik} - 2\,\phi^{-1} (\nabla_i \psi_k \quad a_{ik} \Box \phi) + \\ \qquad - 3\,(\psi^2 + 2/r^2)\, a_{ik} = \chi\, T_{ik} \\ \phi^2 = 2\, T_{55} / (\hat{T} \; - 4/r^2\, \chi) \end{cases}$$

Invece, nel caso in cui n = 1/3, abbiamo le equazioni

$$(5,13) \qquad \begin{cases} \hat{R}_{ik} \quad \dfrac{1}{2} \hat{R}\, a_{ik} + 2\,\phi^{-1} (\nabla_i \psi_k \quad a_{ik} \Box \phi) + \\ \qquad - (4/3)\,(\psi_i \psi_k + \dfrac{1}{4}\, \psi^2\, a_{ik}) + 2\, a_{ik}/3r^2 = \chi\, T_{ik} \\ \phi \Box \phi + \psi^2 + 1/9\, r^2 = (\chi/r)(2\,\phi^{-2}\, T_{55} \; - \hat{T}) \end{cases}$$

Le equazioni che abbiamo stabilito valgono sotto l'ipotesi che $x^i/r \sim 0$, e si semplificano notevolmente nel caso in cui il tensore energetico si annulla.

6. IL CAMPO SCALARE-TENSORIALE AL LIMITE RELATIVISTICO

Se passiamo al limite relativistico per $r \to \infty$, dalla seconda equazione (5,7) si deduce che $T_{i5} = 0$. Ora noi sappiamo che introdotto il campo elettromagnetico $F_{ik} = (\vec{E}, i\vec{H})$ ed il campo idrodinamico $C_i = (\vec{C}, iC_0)$, le componenti del tensore energetico (3,2) del campo magnetoidrodinamico, sono date da

$$(6,1) \qquad \begin{cases} T_{ik} = (F_{is} F^{s}_{.k} + \dfrac{1}{4}\, F_{rs} F^{rs}\, a_{ik}) \quad (C_i C_k \cdot \dfrac{1}{2}\, C_s C^s\, a_{ik}) \\ T_{\alpha 5} = C_0 \vec{H} + \vec{E} \wedge \vec{C} \qquad ; \qquad T_{45} = i\, \vec{C} \times \vec{H} \\ 2\, T_{55} = \phi^2\, (E^2 \quad H^2) + (\phi^2 - 2)(C^2 \quad C_0^2) \end{cases}$$

dove $\alpha = 123$. *Ne segue che* $T_{i5} = 0$ *se è presente solo materia* ($\vec{E} = \vec{H} = 0$) *o solo elettricità* ($\vec{C} = C_0 = 0$), e quindi questa è la condizione perché il campo gravitazionale sia scalare-tensoriale.

Fatta questa premessa, le equazioni (5,7) del campo gravitazionale scalare-tensoriale, per $r \to \infty$, si riducono alle

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{R}_{ik} \quad \frac{1}{2} \hat{R}\, a_{ik} + (3n+1)\, \phi^{-1} (\nabla_i \psi_k - a_{ik} \Box \phi) + \\ &\qquad 3n\, \phi^{-2} [(n+1)\, \psi_i \psi_k + n\, \psi^2 a_{ik}] = \chi \phi^{-2} T_{ik} \\ &\hat{R} + 6n\, [\phi^{-1} \Box \phi + (n \quad 1)\, \phi^{-2} \psi^2] = 2 \chi \phi^{-4} T_{55} \end{aligned}} \tag{6,2}$$

Contraendo la prima equazione si ha

$$\hat{R} + 3(3n+1)\, \phi^{-1} \Box \phi + 3n\, (5n+1)\, \phi^{-2} \psi^2 = \chi \phi^{-2} \hat{T} \tag{6,3}$$

e sostituendo nella seconda equazione (6,2) otteniamo l'equazione del campo scalare

$$3(n+1)\, (\phi \Box \phi + 3n\, \psi^2) = \chi (2 \phi^{-2}\, T_{55} \quad \hat{T}) \tag{6,4}$$

In particolare, per $n - 1/3$ e ricordando la (5,10), essa si riduce alla

$$2 \Box \phi^2 = (2\, \phi^{-2}\, T_{55} \quad \hat{T}) \tag{6,5}$$

simile alla equazione (1,5) della teoria di Brans-Dicke.

Nel caso in cui è presente solo materia, e ponendo $C_i = f\, u_i$, dove f è l'indice del fluido, dalle (6,1) segue che

$$2\, T_{55} = (2 \quad \phi^2)\, f^2 c^2 \quad ; \quad \hat{T} = -f^2 c^2 \tag{6,6}$$

ed allora la (6.5) diventa

$$\Box \phi^2 = \chi \phi^{-2} f^2 c^2 \tag{6,7}$$

Invece, se abbiamo solo il campo elettromagnetico, dalla (6,1) si deduce che

$$2\, T_{55} = \phi^2 (E^2 - H^2) \quad ; \quad \hat{T} = 0 \tag{6,8}$$

ed allora la (6,5) si scrive così

$$2\,\Box\,\phi^2 = \chi\,(E^2 - H^2) \tag{6,9}$$

Infine, è interessante osservare che nel caso in cui $T_{AB} = 0$, le equazioni (6,2) e (6,4) si riducono alle

$$\left\{\begin{array}{l} \phi^2\left(\hat{R}_{ik} - \dfrac{1}{2}\hat{R}\,a_{ik}\right) + (3n+1)\,\phi\,(\nabla_i\,\psi_k - a_{ik}\,\Box\,\phi) = \\ \qquad\qquad = 3n\,[(n+1)\,\psi_i\,\psi_k + n\,\psi^2\,a_{ik}] \\ \phi^2\,\hat{R} = -6n\,[\phi\,\Box\,\phi + (n-1)\,\psi^2] \quad ; \quad \phi\,\Box\,\phi + 3n\,\psi^2 = 0 \end{array}\right. \tag{6,10}$$

Dalle ultime due equazioni ricaviamo $\hat{R}$ e $\Box\,\phi$, e sostituendo nella prima equazione otteniamo la

$$\boxed{\hat{R}_{ik} + (3n+1)\phi^{-1}\,\nabla_i\,\psi_k - 3n(n+1)\phi^{-2}\,\psi_i\,\psi_k = 0} \tag{6,11}$$

mentre l'ultima equazione (6,10) si può scrivere così

$$\Box\,\phi^{3n+1} = 0 \tag{6,12}$$

In particolare, per $n = 0$, la (6,11) si riduce alla

$$\hat{R}_{ik} = -\phi^{-1}\,\nabla_i\,\psi_k \tag{6,13}$$

ed il secondo membro è simile al "tensore di creazione" $C_{ik} = \nabla_i\,\partial_k\,C$ della cosmologia stazionaria di Hoyle [10]. Questo è legato al fatto che nella relatività speciale proiettiva la massa varia con il tempo.

7. TRASFORMAZIONE CONFORME DEL CAMPO SCALARE-TENSORIALE

Per concludere, vogliamo stabilire una interessante proprietà delle equazioni (6,2) del campo gravitazionale scalare-tensoriale (per $r \to \infty$), la quale può essere utile per semplificare notevolmente la loro risoluzione. A questo scopo introduciamo la nuova metrica

$$\gamma_{ik} = \phi^{2n}\,a_{ik} \quad ; \quad \gamma_{i5} = 0 \quad ; \quad \gamma_{55} = \phi^{2(n+1)} \tag{7,1}$$

ottenuta dalla (4,1) moltiplicandola per ϕ^{2n} (trasformazione conforme della metrica). Se ne deduce che

$$\gamma^{ik} = \phi^{-2n} a^{ik} \quad ; \quad \gamma^{i5} = 0 \quad ; \quad \gamma^{55} = \phi^{-2(n+1)} \tag{7,2}$$

Poiché $\mathcal{A} = \phi^{n+1}$, avremo per le (3,4)

$$\overline{x}^i = x^i/\phi^{n+1} \quad ; \quad \overline{x}^5 = r/\phi^{n+1} \tag{7,3}$$

In conseguenza, le derivate proiettive (3,8), per $x^i/r \sim 0$, si calcolano con le formule

$$\overline{\partial}_i \overline{\varphi} = \phi^{n+1} \partial_i \varphi + N(n+1) \phi^n \psi_i \varphi \quad ; \quad \overline{\partial}_5 \overline{\varphi} = (N/r)\phi^{n+1} = 0 \tag{7,4}$$

dove N è il grado di omogeneità della $\overline{\varphi}$, rispetto alle $\overline{x}^A$. Nel caso in cui $N = 0$, le precedenti formule si riducono alle

$$\overline{\partial}_i \overline{\varphi} = \phi^{n+1} \partial_i \varphi \quad ; \quad \overline{\partial}_5 \overline{\varphi} = 0 \tag{7,5}$$

Con questa ipotesi, e per $r \to \infty$, la connessione proiettiva (4,5) assume la forma

$$\begin{cases} \pi^i_{kl} = \phi^n \left[\phi \left\{ {i \atop kl} \right\} + n (\delta^i_k \psi_l + \delta^i_l \psi_k \quad a_{kl} \psi^i) \right] \\ \pi^i_{55} = -(n+1) \phi^{n+2} \psi^i \quad ; \quad \pi^5_{5i} = (n+1) \phi^n \psi_i \end{cases} \tag{7,6}$$

e le altre componenti sono nulle. Tale connessione coincide con la (4,6) moltiplicata per ϕ^n.

Per calcolare le componenti di R_{AB}, occorre tenere presente che la connessione è omogenea di grado 1 nelle $\overline{x}^A$, e quindi si ha

$$\overline{\partial}_i \overline{\varphi} = \phi^{n+1} \partial_i \varphi - (n+1) \phi^n \psi_i \varphi \quad ; \quad \overline{\partial}_5 \overline{\varphi} = \quad \varphi/r = 0 \tag{7,7}$$

Fatti i calcoli troviamo le formule

$$\begin{cases} R_{ik} = \phi^{2n} \left[\phi^2 R_{ik} + \phi \left[(3n+1) \nabla_i \psi_k + n\, a_{ik} \Box \phi \right] + \right. \\ \qquad \left. 3n \left[(n+1) \psi_i \psi_k - n\, a_{ik} \psi^2 \right) \right] \\ R_{i5} = 0 \quad ; \quad R_{55} = (n+1) \phi^{2n+2} (\phi \Box \phi + 3n \psi^2) \end{cases} \tag{7,8}$$

e tali componenti coincidono con le (5,3), per $r \to \infty$, moltiplicate per il fattore ϕ^{2n}. Infine l'invariante scalare coincide con la (5,5) per $r \to \infty$.

Fatta questa premessa, le equazioni di Einstein generalizzate (3,1), assumono la seguente forma

$$
(7,9) \qquad \boxed{\begin{aligned}
& R_{ik} - \frac{1}{2} R\, a_{ik} + (3n+1)\,\phi^{-1}\,(\nabla_i \psi_k - a_{ik} \Box \phi) + \\
& \qquad + 3n\,\phi^{-2}\,[(n+1)\,\psi_i \psi_k + n\,\psi^2 a_{ik}] = -\chi\,\phi^{-2(n+1)}\, T_{ik} \\
& T_{i5} = 0 \quad ; \quad R + 6n\,[\phi^{-1} \Box \phi + (n-1)\,\phi^{-2}\,\psi^2] = -2\chi\,\phi^{-2(n+1)}\, T_{55}
\end{aligned}}
$$

da cui si deduce l'equazione del campo scalare

$$
(7,10) \qquad 3(n+1)(\phi \Box \phi + 3n\,\psi^2) = \chi\,\phi^{-2n}\,(2\,\phi^{-2}\, T_{55} - T)
$$

Possiamo quindi concludere che le equazioni (6,2) e (6,3) della teoria gravitazionale scalare-tensoriale, con $n \neq 0$, si possono ottenere da quelle per $n = 0$, con la trasformazione conforme della metrica (7,1) e con la sostituzione

$$
(7,11) \qquad T_{ik} \to \phi^{-2n}\, T_{ik} \quad ; \quad T_{55} \to \phi^{-2n}\, T_{55} \quad ; \quad T \to \phi^{-2n}\, T
$$

Osserviamo infine che mentre nella teoria di Brans-Dicke, il parametro ω è introdotto arbitrariamente, nella nostra teoria esso appare senza altre ipotesi, dalle formule della derivazione proiettiva [11].

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Brans, R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation,* Phys. Rev. *124,* 925 (1961).

[2] D. K. Ross, *Scalar-tensor theory of gravitation,* Phys. Rev. D-5, *284,* (1972); T. Singh, L. N. Rai, *Scalar-tensor theories of gravitation: foundations and prospect.* Gen. Rel. Grav. *15,* f. 9 (1983).

[3] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie.* Berlin, 1918, pág. 305.

[4] Th. Kaluza, *Zum Unitatsproblem der Physik,* Sit. Pr. Ak. Wiss. p. 966 (1921).

[5] O. Veblen, *Projective Relativitätstheorie.* Berlín, 1933.

[6] P. Jordan. *Erweiterung der projectiven relativitätstheorie.* Ann. Phys. (6) *1,* 219 (1947); *Fünfdimensionale Kosmologie,* Astr. Nachr. 276, 5, 6 (1948); Y. Thiry, *Etude mathématique des equations d'une théorie unitarie à quinze variables de champ,* Journ. Math. *30,* 275 (1951).

[7] G. Arcidiacono, *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie,* Coll. Math. XVI 149 (1964); *Il tensore di curvatura-torsione di Cartan e la relatività generale proiettiva;* Coll. Math. XXXIV, 95 (1983).

[8] G. Arcidiacono, *La relatività generale proiettiva ed il campo tensoriale vettoriale,* Coll. Math. XXXV, 28 (1984); *La relatività generale proiettiva e la magnetoidrodinamica* Boll. U.M.I. (6) 2A (1983). 231.

[9] G. Arcidiacono, *L'Universe di De Sitter-Castelnuovo in cosmologia ed in microfisica,* Coll. Math. XXXIII, 95 (1982); *Relatività e Cosmologia,* Libreria Veschi (Viale Università, 7) Roma. 4.º ed. 1985, vol. II.

[10] F. Hoyle, *A covariant formulation of the law of creation of matter.* Mon. Not. 42, 256 (1960).

[11] Relazione tenuta al Convegno di Fisica-Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, 12 giugno 1984, ed al LXX Congresso della Società Italiana di Fisica, Genova, 4 ottobre 1984.

Prof. Giuseppe Arcidiacono
Via Acquedotto del Peschiera 96
Italia 00135 ROMA