UNA NOTA SOBRE ESPACIOS M–TONELADOS Y ESPACIOS DUAL LOCALMENTE COMPLETOS

por

JOAQUÍN MOTOS y JOSÉ L. HUESO

ABSTRACT

In this paper we give some results on topological direct sums of locally convex spaces, we deduce some consequences from the fact that the space $\omega \otimes_{\pi} \phi$ is not dual locally complete, and we prove new results in codimension of subspaces of certain locally convex spaces.

Los espacios vectoriales que utilizamos están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Con la palabra espacio queremos indicar "espacio vectorial topológico localmente convexo de Hausdorff no trivial". Si $\langle E,F \rangle$ es un par dual denotamos por $\sigma(E,F)$, $\beta(E,F)$ y $\mu(E,F)$ las topologías débil, fuerte y de Mackey sobre E, respectivamente. Dado un espacio E denotamos por E' y E^* los duales topológicos y algebraico de E. Si A es un conjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado en un espacio E, entonces E_A denota la envoltura lineal de A provista de la topología normada que se deduce de su calibrador. Si para cada subconjunto absolutamente convexo cerrado y acotado A de E se verifica que E_A es un espacio de Banach, se dice que E es localmente completo. Se dice que un subespacio F de un espacio E tiene la propiedad (b) ([9]) si, para cada acotado A de E, F es de codimensión finita en la envoltura lineal de $F \cup A$. Decimos que un espacio E es sucesionalmente tonelado (sucesionalmente casi-tonelado) si todo acotado de $E'[\sigma(E', E)]$ $(E'[\beta(E', E)])$, que es unión numerable de equicontinuos, resulta equicontinuo. Un espacio E es ω–tonelado si todo acotado numerable de $E'[\sigma(E', E)]$ es equicontinuo. Un espacio E es m–tonelado (ver [3] y [6]) si todo subconjunto absolutamente convexo, acotado y metrizable de $E'[\sigma(E', E)]$ es equicontinuo (o equivalentemente, si todo acotado de $E'[\sigma(E',E)]$, metrizable para la uniformidad deducida de $\sigma(E', E)$, es equicontinuo). Un espacio E es σ–sucesionalmente tonelado si toda sucesión convergente a cero en $E'[\sigma(E', E)]$ es equicontinua ([15]). Un espacio E es dual localmente completo si $E'[\sigma(E', E)]$ es localmente completo. Si $E_{i\,:\,i \in I}$ es una familia de espacios denotamos por $\underset{i \in I}{\psi} E_i$ el subespacio de $\underset{i \in I}{\pi} E_i$ formado por los $x = (x_i)$, $x_i \in E_i$, que tienen a lo sumo una cantidad numerable de componentes no nulas. Sobre $\underset{i \in I}{\oplus} E_i$ podemos considerar la topología suma directa localmente convexa o la topología τ' que tiene como base de entornos de cero los conjuntos de forma $\underset{i \in I}{\oplus} V_i$ donde V_i es un entorno arbitrario de cero en E_i. Si d es un número cardinal denotamos por ϕ_d la suma directa de d copias de K (si $d = \aleph_0$ escribimos $\phi_d = \phi$). ω denotará el producto de una cantidad numerable de copias de K con la topología producto. Si E y F son dos espacios, $E \otimes_\pi F$ (resp. $E \otimes_\epsilon F$) es el producto tensorial proyectivo (resp. inyectivo) de los espacios E y F.

En [1] se demuestra que $\phi_d [\tau']$ (d es un número cardinal no numerable) no es un espacio casi-tonelado; se puede probar incluso que no es sucesionalmente casi-tonelado (ver la prueba del Teorema 2 de [14]). En consecuencia, para cada conjunto no numerable I, la suma directa topológica $\underset{i \in I}{\oplus} E_i [\tau']$ nunca es un espacio sucesionalmente casi-tonelado cualesquiera que sean los espacios E_i. Si los E_i son ω–tonelados, $\underset{i \in I}{\oplus} E_i [\tau']$ es un ejemplo más de espacio ω–tonelado no sucesionalmente casi-tonelado. No obstante, se tiene el siguiente

Teorema 1. *Sea I un conjunto no numerable y $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios, estonces:*

(1) La suma directa topológica $\underset{i \in I}{\oplus} E_i [\tau']$ es un espacio m-tonelado si si y sólo si cada sumando E_i es m-tonelado:

(2) La suma directa topológica $\underset{i \in I}{\oplus} E_i [\tau']$ es un espacio dual localmente completo si y sólo si cada sumando E_i es dual localmente completo.

Prueba: *(1)* Supongamos que todos los espacios E_i son m–tonelados. Si A es una parte de $\underset{i \in I}{\psi} E'_i$ absolutamente convexa y $\sigma(\psi E'_i, \oplus E_i)$ –acotada y metrizable entonces A es $\sigma(\psi E'_i, \oplus E_i)$–separable por lo que existe un subconjunto numerable de A, B, tal que $A \subset \bar{B}$. Si para cada $j \in I$, P_j es la proyección de $\underset{i \in I}{\psi} E'_i$ sobre E'_j, entonces cada $p_j(B)$ es $\sigma(E'_j, E_j)$– acotado y metrizable para la uniformidad asociada a $\sigma(E'_j, E_j)$ (ver el Lema de [6]), y $p_j(B) = \{o\}$ salvo un subconjunto numerable $\{i_1, i_2, \ldots\}$ de I; existe entonces un entorno de cero en cada E_{i_n}, V_{i_n}, tal que $p_{i_n}(B) \subset 2^{-n} V^o_{i_n}$, por lo que tomando entornos de cero cualesquiera V_i en E_i, para $i \in I \sim \{i_1, i_2, \ldots\}$, es claro que $B \subset V^o$ siendo V el τ' –entorno de cero $\underset{i \in I}{\oplus} V_i$. En consecuencia, A es τ' –equicontinuo (por serlo B) y $\underset{i \in I}{\oplus} E_i [\tau']$ es m–tonelado. El recíproco es fácil de probar.

(2) Si todos los E_i son dual localmente completos, entonces $\underset{i \in I}{\oplus} E_i [\tau']$ es dual localmente completo puesto que $\underset{i \in I}{\psi} E'_i[\sigma(\psi E'_i, \oplus E_i)]$ es un subespacio sucesionalmente cerrado de $\underset{i \in I}{\pi} E'_i[\sigma(E'_i, E_i)]$. y un producto cualquiera de

espacios localmente completos es localmente completo. Para el recíproco basta observar que cada E'_j $[\sigma(E'_j, E_j)]$ es un subespacio cerrado de $\underset{i\epsilon I}{\psi} E'_i[\sigma(\psi E'_i, \oplus E_i)]$. c. q. d.

Nota 1. En [2] se demuestra que el espacio $\omega \otimes_\pi \phi$ no es tonelado. Si se observa que no es localmente completo (lo que se puede demostrar de la forma siguiente: Si $\omega \otimes_\pi \phi$ fuese localmente completo, entonces en virtud del isomorfirmo $\omega \hat{\otimes}_\pi \phi \cong \omega \phi$([4], pg. 196) y del hecho de que las sucesiones convergentes de $\omega\phi$son las localmente convergentes $\omega \otimes \phi$sería un subespacio sucesionalmente cerrado de $\omega \hat{\otimes}_\pi \phi$luego cerrado (por [4], pag. 31) por lo que $\omega \otimes_\pi \phi$ resultaría completo; esta contradición termina la prueba) y que $(\omega \otimes_\pi \phi)'$es isomorfo a $\omega \oplus_\pi$, el anterior resultado de Hollstein admite la siguiente generalización: $\omega \otimes_\pi \phi$ no es dual localmente completo. Este resultado permite demostrar fa... iente las siguientes propiedades:

(1) Si E es un espacio que tiene un cociente isomorfo topológicamente a ω y F es un espacio que tiene un cociente isomorfo topológicamente a ϕ entonces el espacio $E \otimes_\pi F$ no es dual localmente completo.

(2) Si E es un espacio que tiene un subespacio complementado isomorfo topológicamente a ω y F es un espacio que tiene un subespacio complementado isomorfo topológicamente a ϕ entonces $E \otimes_\epsilon F$ no es dual localmente completo.

(3) Si E es un espacio que tiene un subespacio complementado isomorfo topológicamente a ω ó a ϕ entonces los espacios $E \otimes_\pi E'$ $[\mu (E', E)]$, $E \otimes_\pi E'$ $[\beta (E', E)]$, $E \otimes_\epsilon E'$ $[\mu (E', E)]$ y $E \otimes_\epsilon E'$ $[\beta (E', E)]$ no son dual localmente completos.

Utilizando estas propiedades damos en esta nota algunos ejemplos de productos tensoriales (proyectivos o inyectivos) no dual localmente completos:

(1^o) Sean $\{E_i: i\epsilon I\}$, $\{Fj: j\epsilon J\}$ familias de espacios cualesquiera, entonces tanto $(\underset{i\epsilon I}{\pi} E_i) \otimes_\pi (\underset{j\epsilon J}{\oplus} F_j)$ como $(\underset{i\epsilon I}{\pi} E_i) \otimes_\epsilon (\underset{j\epsilon J}{\oplus} F_j)$ son espacios no dual localmente completos (suponemos que I y J son conjuntos infinitos y que la suma directa está equipada de la topología habitual o de la topología τ').

(2^o) Si Ω es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y m un entero no negativo, el espacio $D^m(\Omega)$ (provisto de su topología habitual) tiene un subespacio complementado isomorfo topológicamente a ϕ (Teorema 3 de [12]), por tanto, $D^m(\Omega) \otimes_\pi D'^m (\Omega)_\mu$, $D^m(\Omega) \otimes_\pi D'^m (\Omega)_\beta$, $D^m (\Omega) \otimes_\epsilon D'^m(\Omega)_\mu$ y $D^m (\Omega) \otimes_\epsilon D'^m (\Omega)_\beta$ no son dual localmente completos; puesto que $D(\Omega)$ también admite a ϕ como subespacio complementado (nuevamente Teorema 3 de [12]) es claro que $D(\Omega) \otimes_\pi D'(\Omega)$ tampoco es dual localmente completo (que este espacio no es tonelado se prueba en [8]).

(3^o) Si de nuevo Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y m un entero no negativo, los espacios de Fréchet $\mathcal{E}^m(\Omega)$ y $\mathcal{E}(\Omega)$ admiten a ω como subespacio complementado. por lo que $\mathcal{E}(\Omega) \oplus_\pi \mathcal{E}'(\Omega)$ y $\mathcal{E}^m(\Omega) \oplus_\pi \mathcal{E}'^m(\Omega)_\mu$, $\mathcal{E}^m(\Omega) \oplus_\pi \mathcal{E}'^m(\omega)_\beta$, $\mathcal{E}^m(\Omega) \otimes_\epsilon \mathcal{E}'^m(\Omega)_\mu$, $\mathcal{E}^m(\Omega) \oplus_\epsilon \mathcal{E}'^m(\Omega)_\beta$ no son dual localmente completos.

En [13] M. Valdivia demuestra el siguiente resultado: (a) Sea E un espacio y sea F un subespacio de E. Sea β una familia de acotados absolutamente convexos y cerrados de E tal que contiene a las partes finitas de E, es estable por homotecias, y es tal que si A, B ϵ β entonces existe un C ϵ β tal que $A \cup B \subset C$. Si E' provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre los miembros de β es completo, $F \cap A$ es cerrado en E para cada A ϵ β, y $F \cap E_A$ es de codimensión finita en E_A para cada A ϵ β, entonces F es cerrado en E. En [6] se demuestra que todo subespacio de codimensión numerable de un m–tonelado es m–tonelado, y en [5] se prueba lo siguiente: b) Sea E un espacio σ–sucesionalmente tonelado. Un subespacio de codimensión numerable F es σ–sucesionalmente tonelado si y sólo si no hay ninguna forma lineal no continua, pero límite débil de una sucesión de continuas que se anule en F. M. Valdivia ha probado (ver [10], pag. 46) que todo subespacio de codimensión numerable de un espacio dual localmente completo es dual localmente completo. El teorema que sigue está relacionado con los anteriores resultados.

Teorema 2.

(1) Sea E un espacio dual localmente completo con dual fuerte $E'[\beta(E', E)]$ completo. Sea F un subespacio cerrado de E con la propiedad (b). Entonces F es dual localmente completo.

(2) Si el espacio E satisface las hipótesis de (1) y además es localmente tonelado (lo que significa que para cada subconjunto absolutamete convexo cerrado y acotado B de E, el espacio normado E_B es tonelado), entonces todo subespacio de E que tiene la propiedad (b) es dual localmente completo.

(3) Sea E un espacio tal que $E'[\mu(E', E)]$ es completo. Sea F un subespacio de E de codimensión menor que $2^{\aleph_o}$. Entonces F es dual localmente completo.

(4) Sea E un espacio m–tonelado tal que $E'[\beta(E', E)]$ es completo. Sea F un subespacio cerrado de E con la propiedad (b) Entonces F es m-tonelado.

(5) Sea E un espacio m–tonelado tal que $E'[\mu(E', E)]$ es completo. Sea F un subespacio cerrado de E de codimensión menor que $2^{\aleph_o}$. Entonces F es m–tonelado.

Prueba.

(1) Sea β la familia formada por los subconjuntos de E′ que son equicontinuos y por los subconjuntos de $F^{\perp}$ que son absolutamente convexos y σ (E′, E)–compactos. Evidentemente la topología τ(sobre E) de la convergencia uniforme sobre los miembros de β es más fina que la topología de E y menos fina que μ (E, E′). Utilizando ahora el Teorema 1 de [9] vemos que F[τ] es un subespacio complementado de E[τ] pero entonces FL[τ] resulta ser un espacio dual localmente completo. Finalmente, el hecho de que τ y la topología de E coincidan sobre F demuestra que F es dual localmente completo.

(2) Debido a (1) no examinaremos el caso en el que el subespacio de E que tiene la propiedad (b) es cerrado. Sea entonces F un subespacio de E que tiene la propiedad (b) y supongamos que F es denso. Si M es un conjunto absolutamente convexo, σ (E′, F) –cerrado y acotado de E′, hemos de probar que $(E')_M$ es un espacio de Banach. Denotemos por N el conjunto polar de M en E. Si probamos que N es absorbente, M resultará σ (E′, E) –acotado y así $(E')_M$ será completo. Sea G la envoltura lineal de N; si demostramos que G es cerrado se tendrá que G = E puesto que $G \supset F$. Por el resultado (a) es suficiente demostrar que $G \cap B$ es cerrado para cada subconjunto B de E absolutamente convexo, cerrado y acotado. Sea entonces B un tal subconjunto; como E_B es tonelado y $E_{B \cap G}$ es de codimenxión finita en E_B resulta que el espacio $E_{B \cap G}$ es tonelado y por ello existe un $\epsilon > 0$ de modo que $N \cap E_{B \cap G} \supset \epsilon (B \cap G)$; vemos entonces que la clausura de E en $B \cap G$ está contenida en $(1/\epsilon)N$ luego en G, de donde se deduce que $B \cap G$ es cerrado. Supongamos ahora que F es un subespacio de E ni cerrado ni denso pero con la propiedad (b). Desde luego $\bar{F}$ es localmente tonelado y (1) prueba que también es dual localmente completo; razonando como en (1) vemos que $\bar{F}' [\beta(\bar{F}', \bar{F})]$ es completo. En consecuencia F es dual localmente completo.

(3) Basta probarlo para el caso en que F sea cerrado o denso (pues por el Lema 1 de [7] $\bar{F}'[\mu(\bar{F}', \bar{F})]$ es completo). Sea entonces F un subespacio denso de E. Se razona como en la primera parte de 2) pero ahora hay que demostrar que G (mantenemos la misma monenclatura que en (2) corta a cada subconjunto B de E absolutamente convexo y σ (E, E′) –compacto en un cerrado. La prueba de este hecho está en el Teorema 1 de [7]. Si F es cerrado en E se razona nuevamente como en el Teorema 1 de [7] siguiendo una idea de Tsirulnikov (ver la prueba del Teorema 4 de [9]).

(4) Se procede como en (1) y se tiene en cuenta que el cociente por un subespacio cerrado de un espacio m–tonelado es nuevamente un espacio m–tonelado.

(5) Véase también el final del Teorema 1 de [7]. c.q.d.

Nota 2. Si E es un espacio de Fréchet no reflexivo y no σ (E, E′) –sucesionalmente completo entonces E′ [μ (E′, E)] es un espacio de Mackey dual localmente completo pero no m–tonelado (Teorema 1 de [6]; si (x_n) es una sucesión de Cauchy en E_σ no σ (E, E′) –convergente existe un u ϵ E′* que es σ (E′*, E′) límite de (x_n); si ponemos H = Ker u entonces H es un hiperplano denso de E′ [μ (E′, E)] que no es de Mackey (Teorema 1 de [11] y que no es σ –sucesionalmente tonelado (resultado b)) pero si dual localmente completo ([10], pg. 46).

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N.: Eléments de mathèmatiques, Livre V, Espaces vectoriels topologiques, 2 Vols. Act. Sci. et Ind. Vols. 1189, 1229 (1953-1955).

[2] HOLLSTEIN, R.: Uber die Tonneliertheit von lokalconvexen Tensorprodukten. Manuscripta Math. 22, 7-12 (1977).

[3] KALTON, N.J.: Some forms of the closed graph theorem. Proc. Cambridge Phil. Soc. 70, 401-408 (1971).

[4] KÖTHE, G.: Topological Vector Spaces II. Springer Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin (1979).

[5] LLORENS, J. y MOTOS, J.: Hereditabilidad de ciertas propiedades de espacios localmente convexos por subespacios de codimensión finita o numerable. Rev. Real Acad. LXXI, 2^{o}, 289-309 (1977).

[6] MOTOS, J.: Sobre una cierta clase de espacios localmente convexos. Rev. Real Acad. LXIX, 4^{o}, 845-855 (1975).

[7] PÉREZ CARRERAS. P. y BONET, J.: Una nota en codimensión de subespacios de ciertos espacios localmente convexos. Rev. Real Acad. LXXIV, 5^{o}, 1002-1006 (1980).

[8] PÉREZ CARRERAS, P. y BONET, J.: Una nota sobre un resultado de Eidelheit. Collecth. Math. 33, (1982).

[9] TSIRULNIKOV, B.: Subspaces with property (b) in locally convex spaces of quasi-barrelled type. Proc. Math. Cambridge Phil. Soc. 88, 331 - 337 (1980).

[10] VALDIVIA, M.: Topics in Locally Convex Spaces. North Holland Math. Studies 67, (1982).

[11] VALDIVIA, M.: On Mackey Spaces. Duke Math. Journal 41, 835-841 (1974).

[12] VALDIVIA, M.: On weakly complete sets in a locally convex space. Arch. Math. XXVIII, 6, 638-643 (1977).

[13] VALDIVIA, M.: A property of Fréchet spaces. Functional Analysis, Holomorphy and Aproximation Theory II, Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland 1984).

[14] VALDIVIA, M.: A note on locally convex spaces. Math. Ann. 201, 145-148 (1973).

[15] WEBB, J.H.: Sequentially barrelled spaces. Math. Coloq. Univ. of Cape Town, VIII, (1973).

Departamento de Matemáticas
E.T.S.I.Industriales
Universidad Politécnica de Valencia
C. de Vera, s/n
Valencia 46022