UNA CLASE DE ESPACIOS DE SUCESIONES VECTORIALES

por

FUENSANTA ANDREU*

SUMMARY.

In this paper we study certain barrelledness properties of a classe of spaces of vector sequences. This spaces, introduced by Valdivia, extend the example of a Banach quasi-reflexive space due to James.

En [4] (ver también [5]) James dió un ejemplo de un espacio de Banach J isomorfo topológicamente a su bidual J'', siendo J un subespacio cerrado de codimensión uno de J''. Recientemente, Valdivia ([10] y [11] pag. 307) ha definido una clase de espacios de sucesiones con valores vectoriales, extendiendo el ejemplo de James, mediante la cual ha obtenido numerosos ejemplos de espacios de Fréchet que son isomorfos topológicamente a su bidual, siendo estos espacios casi-reflexivos en un sentido más amplio que en el definido por Civin y Yood [1]. En este trabajo estudiamos ciertas propiedades de tonelación de estos espacios.

1. PRELIMINARES.

Todas las notaciones y propiedades concernientes a espacios localmente convexos son tomadas de [6].

Denotamos por N el conjunto de los números naturales, y por K el cuerpo de los números reales o complejos. Los espacios vectoriales usados están definidos sobre K. Dado F un espacio vectorial, denotamos por ω (F) el conjunto de todas las sucesiones $x = (x_n)$ de F. Si r es un número natural, escribimos

$$x_n(r) = x_n \quad , \quad n = r, r+1, \ldots, x_n(r) = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots, r\text{-}1.$$

* Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoria de Funciones de la Facultad de Matemáticas de Valencia, bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia.

$$x_n[r] = x_n \ , \ n = 1, 2, \ldots, r\text{-}1, \ x_n[r] = 0, n = r, r+1, \ldots .$$
$$x(r) = (x_n(r)) \ , \ x[r] = (x_n[r]).$$

Si $z \in F$, ponemos ze_n para denotar el elemento (x_n) de $\omega(F)$ tal que $x_m = 0$, $m \neq n$, $x_n = z$.

Representamos por H el conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales de la forma $(r_1, r_2, \ldots, r_{2n+1})$, con

$$r_1 < r_2 < \ldots\ldots < r_{2n+1} \ .$$

En lo sucesivo, E denotará un espacio localmente convexo y separado con dual topológico E'. Si B es un subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado de E, denotamos por E_B la envoltura lineal de B dotada de la norma definida por el funcional de Minkowski de B. Dado $(x_n) \in \omega(E)$, diremos que (x_n) converge a x en el sentido de Mackey, si existe un subconjunto B absolutamente convexo, cerrado y acotado de E tal que $x_n - x \in E_B$ y $(x_n - x)$ converge a cero en E_B.

Sea $\langle E, F \rangle$ un par dual, denotamos por $\sigma(E, F)$, $\mu(E, F)$ y $\beta(E, F)$ las topologías débil, de Mackey y fuerte sobre E; por $\beta^*(E, F)$ la topología sobre E de la convergencia uniforme en los conjuntos $\beta(F, E)$ –acotados de F.

Dado E un espacio localmente convexo y separado, dotado de la topología T definida por la familia de seminormas $\{ p_i, i \in I \}$ y $x = (x_n)$ un elemento de $\omega(E)$, escribimos

$$q_i(x) = \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} p_i(x_{r_{2j-1}} - x_{r_{2j}})^2 + p_i(x_{r_{2n+1}})^2 \right)^{1/2} \right\} \ , i \in I,$$

donde el supremo es tomado en H.

Sea

$$J\{E\} = \{ x = (x_n) \in \omega(E) : q_i(x) < +\infty \ \forall \ i \in I \}$$

J { E } es un espacio localmente convexo y separado con la topología $\mathcal{T}$ definida por la familia de seminormas $\{ q_i \ , \ i \in I \}$ (ver [11] pag. 307). Representamos por J [E] el subespacio de J E de todos aquellos elementos $x = (x_n)$ que convergen al origen en E. Suponemos J [E] dotado de la topología $\mathcal{T}$. Escribimos J' [E] y J'' [E] para representar el dual topológico de J [E] y el dual fuerte de J' [E], respectivamente. Denotamos por F la complección de J' [E] $(\beta(J'[E], J[E]))$. Si $f \in F$ y $x = (x_n)$ es un elemento de J [E], tenemos que

$$<x, f> = \sum_{n=1}^{+\infty} <x_n, f_n>$$

(ver [10] prop. 12.4), siendo f_n una forma lineal sobre E tal que

$$<z, f_n> = <ze_n, f> \quad , \quad z \in E,\ n \in N.$$

En lo sucesivo, los elementos de F los escribiremos en la forma $f = (f_n)$.

Representamos por L el subespacio de J [E] de los elementos $x = (x_n)$ tales que (x (r)) converge al origen en el sentido de Mackey. Obviamente, L es un subespacio denso de J [E].

Escribimos P para representar el subespacio de ω (E') tal que $f = (f_n) \in P$ si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} <x_n, f_n> < +\infty \quad \forall\, x = (x_n) \in J\,[E]\,.$$

Es fácil probar que P es un subespacio de F, cumpliéndose además que si f σ $(f_n) \in P$, entonces f es el límite en F(β (F, J [E])) de la sucesión (f [n] contenida en J' [E].

2. PROPIEDADES DE TONELACION.

En este apartado vamos a estudiar qué propiedades de los espacios E y E' se transmiten a los espacios L y P, respectivamente.

Valdivia en [10] 39.4 da el siguiente resultado:

(a) "Si (f_n) es un elemento de ω (E') de forma que para cada subconjunto acotado A de J [E] , el conjunto

$$\left\{ \sum_{n=1}^{r} < x_n, f_n > \ : r \in N, x = (x_n) \in A \right\}$$

es acotado en K, entonces $(f_n) \in P$."

Es ahora inmediato el siguiente resultado

2.1. Lema. Sea $\{ g^s = (g^s_n) : s \in S, \geqslant \}$ una red de elementos de P β (P, L) –acotada, de forma que para cada $n \in N$ la red $\{ g^s_n : s \in S, \geqslant \}$ converge a g_n en E' (σ (E', E)). Entonces $g = (g_n)$ es un elemento de P.

Demostracion. Sea B un subconjunto acotado de J [E], entonces A = { x [r], $r \in N$, $x = (x_n) \in B$ } es un subconjunto acotado de L (σ (L, P)), y por tanto

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{r} < x_n, g_n^s > \right| : x \in B, r \in N, s \in S \right\} < +\infty ,$$

de donde se desprende que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{r} < x_n, g_n > \right| , x \in B, r \in N \right\} < +\infty .$$

Finalmente, por (a), obtenemos que $g = (g_n) \in P$.

c.q.d.

2.2. ***Proposición.*** Si E' (σ (E', E)) es casi-completo, entonces P (σ (P, L)) es casi-completo.

Demostración. Dado A un subconjunto acotado de P (σ (P, L)), por [10] 42.4, existe un subconjunto B acotado de J' [E] (σ(J' [E], J [E])) cuya clausura en P (σ (P, L)) contiene a A. Por el lema de Bourbaki-Robertson ([6] § 18, 4 (4)), E' (μ (E', E)) es casi-completo y por [10] 46.4, obtenemos que P(μ (P, J [E])) es casi-completo. Tenemos, pues, que B es acotado en P (β (P, J [E])). Sea

$$\left\{ f^s = (f_n^s), s \in S, \geqslant \right\} \tag{1}$$

una red de elementos de B σ(P, L) –Cauchy. Para cada $n \in N$, la red { f_n^s, $s \in S$, $\geqslant$ } es una red acotada y de Cauchy en E' (σ (E', E)); sea, pues, f_n el límite de dicha red en E' (σ (E', E)). Escribimos $f = (f_n)$, por el lema anterior, f es un elemento de P. Veamos, finalmente, que f es el límite de la red (1). Dado $x = (x_n) \in L$, puesto que P (μ (P, J [E])) es casi-completo y todo acotado de J [E] es σ (J [E], P)–acotado, podemos afirmar que (x (r)) converge a cero en J [E] (β (J [E], P)).

Por tanto dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in N$ tal que para todo $m \geqslant m_0$, $p \geqslant 0$.

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=m}^{m+p} < x_n, f_n^s - f_n > \right| , s \in S \right\} \leqslant \epsilon/2. \tag{2}$$

Por otra parte, dado $x[m_o]$, existe $s_o \epsilon S$ tal que

$$| \sum_{n=1}^{m_o-1} < x_n, f_n^s - f_n^{s'} > | < \epsilon/2 \quad \forall\, s, s' \geqslant s_o, \tag{3}$$

de donde se deduce

$$| \sum_{n=1}^{m_o-1} < x_n, f_n^s - f_n > | < \epsilon/2 \quad \forall\, s \geqslant s_o. \tag{4}$$

Por último de (2) y (4), se tiene que

$$| < x, f^s - f > | \leqslant | \sum_{n=1}^{m_o-1} < x_n, f_n^s - f_n > | +$$

$$| \sum_{n=m_o}^{+\infty} < x_n, f_n^s - f_n > | < \epsilon/2 \;\; \forall\, s \geqslant s_o.$$

c.q.d.

Es ahora inmediato el siguiente resultado

2.3. Corolario. Si E (T) es un espacio tonelado, entonces L (μ (L, P)) es tonelado.

2.4. Lema. Sea A un subconjunto absolutamente convexo y compacto de J [E] (σ (J [E], J' [E])). Entonces el conjunto

$$B = \Gamma \{ x [r] \;\; : \;\; x = (x_n) \epsilon A, r \epsilon N \}$$

es σ (J [E], J' [E]) – relativamente compacto.

Demostración. Puesto que B es acotado, bastará ver que la clausura débil de B, $\bar{B}$, es un conjunto σ (J [E], J' [E]) –completo. Sea

$$\{ y^s = (y_n^s) \quad , \quad s \epsilon S, \geqslant \} \tag{1}$$

una red de elementos de B σ (J [E], J' [E]) – Cauchy. Para cada $n \epsilon N$ definimos $T_n = \{ x_n : x = (x_k) \epsilon A \}$; es obvio que T_n es un subconjunto relativamente compacto de E (σ (E, E')), y la red

$$\{ y_n^s, s \epsilon S , \geqslant \}$$

es una red de elementos de T_n σ (E, E') – Cauchy; sea, pues, $y_n \epsilon E$ el límite de dicha red. Escribimos $y = (y_n)$. Para cada $r \epsilon N$, tenemos que $\{ y^s [r] , s \epsilon S, \geqslant \}$ converge a y [r] en J [E] (σ (J [E], J' [E])). Podemos por tanto asegurar que $y [r] \epsilon \bar{B}$ para todo $r \epsilon N$, con lo cual $\{ y [r] , r \epsilon N \}$ es un subconjunto acotado de J [E]. Es ahora obvio que

$$q_i (y) \leqslant \sup \{ q_i (y [r]), r \epsilon N \} \ \forall \ i \epsilon I,$$

y por tanto que $y = (y_n) \epsilon J \{ E \}$. Veamos por último que y es el límite de la red (1), con lo cual habremos cuncluido la demostración ya que J [E] es un subespacio cerrado de J $\{ E \}$. Dado $\epsilon > 0$ y $f = (f_n)$ un elemento de J' [E], por [11] § 6.2 (1), podemos encontrar $r_o \epsilon N$ tal que

$$| < y^s (r), f > | = | \sum_{n=r}^{+\infty} < y_n^s, f_n > | < \in /3 \ \forall \ r \geqslant r_o, s \epsilon S \qquad (2)$$

y

$$| \sum_{n=r}^{r+m} < y_n, f_n > | < \epsilon /3 \ \forall \ r \geqslant r_o, m \geqslant 0 \ ;$$

de donde se deduce que

$$| < y (r), f > | < \epsilon /3 \ \forall \ r \geqslant r_o. \qquad (3)$$

Por otra parte, como $\{ y^s [r_o], s \epsilon S, \geqslant \}$ converge a $y [r_o]$ existe $s_o \epsilon S$ tal que

$$| < y^s [r_o] - y [r_o], f > | < \epsilon /3 \ \forall \ s \geqslant s_o. \qquad (4)$$

Por último, de (2), (3) y (4), se desprende que

$$| < y^s - y, f > | < \epsilon \ \forall \ s \geqslant s_o . \quad \text{c.q.d.}$$

2.5. Corolario. Sea A un subconjunto absolutamente convexo y compacto de J[E] (σ (J [E], P)). Entonces el conjunto

$$B = \Gamma \ \{ x[r] : x = (x_n) \in A, r \in N \}$$

es σ (J [E], P) – relativamente compacto.

Demostración. Basta repetir el razonamiento de la demostración anterior, teniendo en cuenta que el resultado [11] § 6.2 (1) es cierto para cualquier forma lineal sobre J [E], continua sobre los subconjuntos acotados de J [E].

c.q.d.

2.6. ***Proposición.*** Si E' (σ (E', E)) es sucesionalmente completo, entonces P (μ (P, J [E])) es sucesionalmente completo.

Demostración. Sea

$$\{ f^r = (f^r_n) \ : r \in N \} \tag{1}$$

una sucesión de Cauchy en P (μ (P, J [E])). Para cada $n \in N$ la sucesión $\{ f^r_n, \ r \in N \}$ es de Cauchy en E' (μ (E', E)), y por tanto converge a un cierto elemento f_n de E'. Escribimos $f = (f_n)$. Dado $\epsilon > 0$ y A un subconjunto absolutamente convexo y σ (J [E], P) –compacto, por 2.5., podemos suponer que $x[r] \in A$ para todo $x = (x_n) \in A$ y $r \in N$; luego podemos afirmar que existe $r_o \in N$ tal que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{m} < x_n, f^r_n - f^{r'}_n > \right| : x = (x_n) \in A, m \in N \right\} < \epsilon \ , \forall r, r' \geqslant r_o,$$

de donde se desprende que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{m} < x_n, f^r_n - f_n > \right| : x = (x_n) \in A, m \in N \right\} < \epsilon \ \ \forall r \geqslant r_o. \tag{2}$$

De la misma forma, teniendo en cuenta que $x[r + p] - x[r] \in 2A$ para todo $r \in N$, $p \geqslant 0$, obtenemos que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=m}^{m+p} < x_n, f^r_n - f_n > \right| : x = (x_n) \in A, m \in N, p \geqslant 0 \right\} < \epsilon \ \ \forall r \geqslant r_o. \tag{3}$$

Finalmente, de (2) y (3) se deduce que f es un elemento de P y que además es el límite de la sucesión (1) en P (μ (P, J [E])).

c.q.d.

*2.7. **Corolario.*** Sea E' (σ (E', E)) sucesionalmente completo. Si $x = (x_n) \epsilon L$, entonces (x [r]) converge a x en L (β (L, J' [E])).

Demostración. Si $x \epsilon L$, tenemos que (x [r]) converge a x en el sentido de Mackey. Por otra parte, si A es un subconjunto acotado de J' [E] (σ (J' [E], L)), A es σ (P, J [E]) –acotado (ver [10] 42.4), y por 2.6., A es β (P, J [E]) –acotado. La conclusión es ahora obvia.

c.q.d.

*2.8. **Proposición.*** Si E' (σ (E', E)) es sucesionalmente completo, entonces P (σ (P, L)) es sucesionalmente completo.

Demostración. Sea

$$\{ f^r = (f_n^r) : r \epsilon N \} \tag{1}$$

una sucesión de Cauchy en P (σ (P, L)); por [10] 42.4, A = $\{ f^r, r \epsilon N \}$ es σ (P, J [E]) –acotado, y por tanto, aplicando 2.6., A es β (P, J [E]) –acotado. Por otra parte, para cada $n \epsilon N$, la sucesión $\{ f_n^r : r \epsilon N \}$ es de Cauchy en E' (σ (E', E)), por lo que converge a un cierto $f_n \epsilon E'$. Escribimos $f = (f_n)$, por 2.1., $f \epsilon P$. Finalmente, usando que β (L, P) = β (L, J [E]) (ver [10] 42.4) y el resultado anterior, es fácil probar que f es el límite de la sucesión (1) en P (σ (P, L)).

c.q.d.

Un espacio localmente convexo E (T) es numerablemente tonelado (numerablemente casi-tonelado) si cada subconjunto σ (E', E) –acotado (β(E', E) –acotado) que es unión numerable de T–equicontinuos es un T–equicontinuo (ver [3]).

*2.9. **Proposición.*** Sea E (μ (E, E')) un espacio numerablemente tonelado. Entonces L (μ (L, P)) es numerablemente tonelado.

Demostración. Sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

un subconjunto acotado de P (σ (P, L)), de forma que A_n es μ(L, P) −equicontinuo para todo $n \in N$. Dados $n, k \in N$, definimos

$$B_{nk} = \{ f_k : f = (f_r) \in A_n \} \quad , \quad H_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{nk} \; .$$

Evidentemente, H_k es σ (E', E) −acotado y B_{nk} es μ(E, E') −equicontinuo para todo $n, k \in N$. Por tanto, H_k es μ(E, E') −equicontinuo. Para probar que A es μ(L, P) −equicontinuo, bastará ver que toda red en A σ(P, L) −Cauchy converge en P. Sea

$$\{ f^s = (f_n^s) \; , \; s \in S, \geqslant \} \tag{1}$$

una red en A σ (P, L) −Cauchy; es claro que $\{ f_k^s, s \in S, \geqslant \}$ es una red en H_k σ(E', E) −Cauchy para cada $k \in N$, y por tanto converge a un cierto $f_k \in E'$. Escribimos $f = (f_n)$. Por 2.8 y 2.1, tenemos que f es un elemento de P. La demostración se concluye como en 2.8.

c.q.d.

Por [10] 49.4, dado A un subconjunto acotado de P (β(P, L)), existe un subconjunto B acotado de J' [E] (β(J' [E], J [E])) tal que la σ(P, L) −clausura de B contiene a A. Como consecuencia de este resultado tenemos que las topologías β^* (L, P) y β^* (J [E], J' [E]) coinciden sobre el espacio L. Es ahora inmediato el siguiente resultado.

2.10. Lema. Si $x = (x_n) \in L$. Entonces (x [r]) converge a x en L (β^* (L, P)).

2.11. Proposición. Sea E (μ (E, E')) un espacio numerablemente casi-tonelado. Entonces, L (μ(L, P)) es numerablemente casi-tonelado.

Demostración. Sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

un subconjunto acotado de P (β(P, L)), de forma que A_n es μ(L, P) –equicontinuo para todo n ϵ N. Para cada n, k ϵ N definimos B_{nk} y H_k como en 2.9. Obviamente, B_{nk} es μ (E, E') –equicontinuo y H_k es β (E', E) –acotado; por tanto, H_k es μ(E, E') –equicontinuo. Finalmente, teniendo en cuenta el lema anterior, la demostración se concluye como en 2.9.

c.q.d.

Un espacio localmente convexo E (T) es ω –casi-tonelado si cada sucesión de elementos de E' que es β(E', E) –acotada es un T –equicontinuo (ver [7] y [2]). E (T) es sucesionalmente tonelado (sucesionalmente casi-tonelado) si cada sucesión en E' que converge a cero en E' (σ(E', E)) (E' (β(E', E)) es un T–equicontinuo (ver [12]).

2.12. Proposición. Sea E (T) un espacio ω –casi-tonelado. Entonces, L (μ(L, P)) es ω –casi-tonelado.

Demostración. Sea A un subconjunto numerable y acotado de P (β(P, L)); para cada k ϵ N, escribimos $A_k = \{ f_k : f = (f_n) \epsilon A \}$. Evidentemente, A_k es numerable y β (E', E) –acotado, con lo cual ΓA_k es σ (E', E) –relativamente compacto para todo k ϵ N. Sea

$$\{ f^s = (f_n^s) \ , \ s \epsilon S, \geqslant \}$$

una red en Γ A σ (P, L) – Cauchy; es obvio que $\{ f_n^s \ , \ s \epsilon S, \ \geqslant \}$ es una red en ΓA_k σ (E', E) –Cauchy, luego converge a un ciertp f_k en E' (σ (E', E)). Escribimos f = (f_n). La demostración se concluye ahora como en la proposición anterior.

c.q.d.

2.13. Proposición. Sea E (T) un espacio sucesionalmente casi-tonelado. Entonces, L (μ (L, P)) es sucesionalmente casi-tonelado.

Demostración. Sea

$$A = \{ f^r = (f_n^r) \ , r \epsilon N \}$$

una sucesión convergente a cero en P (β(P, L)). Para cada k ϵ N, definimos A_k =

$\{ f_k^r \ , r \in N \}$; es fácil ver que la sucesión anterior es β(E', E)−convergente a cero y, por tanto, ΓA_k es σ (E', E) −relativamente compacto. La demostración se concluye ahora como en 2.11.

c.q.d.

2.14. Proposición. Sea E (T) un espacio sucesionalmente tonelado. Entonces, J [E] (μ (J [E], P)) es sucesionalmente tonelado.

Demostración. Sea

$$A = \{ f^r = (f_n^r), r \in N \}$$

una sucesión σ(P, J [E]) −convergente a cero. Para ver que A es μ (J [E], P) −equicontinuo, bastará probar que la σ(P, J [E]) −clausura de ΓA, que denotamos por B, es σ (P, J [E]) −compacto, o equivalentemente que $(P_B, \| \ \|_B)$ es un espacio de Banach, siendo $\| \ \|_B$ el funcional de Minkowski de B (ver [9] lema 1). Para cada $n \in N$, definimos $A_n = \{ f_n^r, n \in N \}$; es claro que $\{ f_n^r, n \in N \}$ es una sucesión σ (E', E) −convergente a cero, y por tanto $(E'_{B_n}, \| \ \|_B)$ es un espacio de Banach, siendo B_n la σ (E', E) −clausura de la envoltura absolutamente convexa de A_n para cada $n \in N$. Sea

$$\{ g^k = (g_n^k), k \in N \} \tag{1}$$

una sucesión de Cauchy en $(P_B, \| \ \|_B)$. Es fácil probar que

$$\| g_n^k - g_n^{k'} \|_{B_n} \leqslant \| g^k - g^{k'} \|_B \qquad \forall \ n, k, k' \in N;$$

por tanto, $\{ g_n^k, k \in N \}$ es una sucesión de Cauchy en $(E'_{B_n}, \| \ \|_{B_n})$. Denotamos por g_n el límite de cada una de estas sucesiones y escribimos $g = (g_n)$. Como la sucesión (1) es μ (P, J [E]) −Cauchy, dado $\epsilon > 0$ y D un subconjunto σ (J [E], P) −compacto, (por 2.5 podemos suponer que x [r] $\in$ D $\ \forall x = (x_n) \in D, r \in N$) existe $k_o \in N$ tal que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{r} \langle x_n, g_n^k - g_n^{k'} \rangle \right| ; x = (x_n) \in D, r \in N \right\} < \epsilon \quad \forall \, k, k' \geqslant k_o,$$

de donde se desprende que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{r} <x_n, g_n^k - g_n> \right| ; x = (x_n) \in D, r \in N \right\} < \epsilon \quad \forall\, k \geqslant k_o.$$

De donde se deduce, teniendo en cuenta que $x[m] - x[m+p] \in 2D$ para cada $m \in n$, $p \geqslant 0$, que g es el límite de la sucesión (1) en $P(\mu(P, J[E])$. Finalmente, aplicando el lema de Bourbaki-Robertson, se concluye la demostración.

c.q.d.

Dado E (T) un espacio localmente convexo, diremos que un subconjunto A de E es casi-cerrado si corta a los subconjuntos absolutamente convexos, cerrados y acotados de E (T) en conjuntos cerrados (ver [6] pag. 296). Diremos que E (T) es un espacio fuertemente tonelado (semibornológico) si cada conjunto absolutamente convexo, casi-cerrado y absorvente (bornívoro) de E (T) es un entorno de cero en E (T) (ver [8]).

*2.15. **Proposición.*** Sea E (T) un espacio semibornológico. Entonces, $L(\mu(L, P))$ es semibornológico.

Demostración. Sea $\mathcal{T}_{\vee}$ la topología que tiene como base de entornos de cero los subconjuntos absolutamente convexos, casi-cerrados y bornívoros de $L(\mu(L, P))$. Representamos por $L^{\vee}$ el dual topológico de $L(\mathcal{T}_{\vee})$. Evidentemente, $\mathcal{T}_{\vee} > \mu(L, P)$; por tanto, bastará con probar que $P = L^{\vee}$. Dado $f \in L^{\vee}$, definimos f_n tal que

$$<x, f_n> = <xe_n, f> \quad \forall\, x \in E, \quad n \in N.$$

Es fácil comprobar que f_n es un elemento de E' para cada $n \in N$. Escribimos $g = (f_n)$. Sea A un subconjunto acotado de J [E], entonces $B = \{ x[r], x = (x_n) \in A, r \in N \}$ es $\mathcal{T}_{\vee}$—acotado, por lo que existe $M > 0$ tal que

$$\sup \{ | <x[r], f> | : x = (x_n) \in A, r \in N \} =$$

$$= \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{r} <x_n, f_n> \right| : x = (x_n) \in A, r \in N \right\} \leqslant M.$$

Por (a), obtenemos que g es un elemento de P. Dado $x = (x_n) \in L$, veamos finalmente que $(x[r])$ converge a x en $L(\mathcal{T}_\vee)$, con lo cual tendremos que f coincide con g. Sea U un $\mathcal{T}_\vee$ –entorno de cero absolutamente convexo y $\mathcal{T}_\vee$ –cerrado; escribimos $W = \{(h_n) : h \in U^o\}$, siendo U^o el polar de U en $L^\vee$. Dado A un subconjunto $\sigma(L, P)$ –acotado, ponemos $B = \{x[r] \; : \; x = (x_n) \in A, r \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\sup \{ |\langle x[r], h\rangle| \; : \; x = (x_n) \in A, r \in N, h \in U^o \} =$$

$$= \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{r} \langle x_n, h_n \rangle \right| \; : \; x = (x_n) \in A, r \in N, (h_n) \in W \right\}$$

De donde se deduce que W es $\beta(P, L)$ –acotado. Dado $x = (x_n) \in L$, por 2.10, existe $r_o \in N$ tal que

$$x[r] - x[r'] \in W^o \quad \forall r, r' \geqslant r_o.$$

y por tanto

$$x[r] - x[r'] \in U^{oo} = U \quad \forall r, r' \geqslant r_o.$$

Tenemos, pues, que $(x[r])$ es una sucesión $\mathcal{T}_\vee$ –Cauchy. Por último, teniendo en cuenta que los $\mathcal{T}_\vee$ –entornos de cero los podemos tomar casi-cerrados, es fácil porbar que $(x[r])$ es $\mathcal{T}_\vee$ –convergente a x.

c.q.d.

*2.16 **Proposición.*** Sea E (T) un espacio fuertemente tonelado. Entonces $L(\mu(L,P))$ es fuertemente tonelado.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de 2.3 y la proposición anterior.

c.q.d.

No sabemos si J [E] coincide con L cuando E tiene la propiedad de Mackey (i.e., toda sucesión convergente a cero en E converge a cero en el sentido de Mackey). Vamos a dar un ejemplo de un espacio E que no tiene la propiedad de Mackey para el cual J [E] es distinto de L.

*2.17. **Ejemplo.*** Dada una sucesión creciente de números naturales de la forma $n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_r < \ldots\ldots$, $k \in N$ y $x \in [1, 2]$. Construimos la sucesión (a_r)

tal que

$$a_r = k^x \quad , \quad 1 \leqslant r \leqslant n_1$$

$$a_r = (k+p)^x \quad , \quad n_p + 1 \leqslant r \leqslant n_{p+1} \quad ; \quad p, r \in N.$$

Denotamos por A el conjunto de todas las sucesiones (a_r) definidas de la forma anterior; es claro que el cardinal de A, que denotamos por $|A|$, coincide con el cardinal de $[1, 2]$. Sea I un conjunto de indices tal que $|I| = |R|$, siendo R el conjunto de los números reales. Denotamos por ω_I el espacio R^R con su topología producto. Puesto que para cada $i \in I$ existe una única (a_{in}) de A, definimos

$$x^n = (1/a_{in})_i \quad , \quad n \in N.$$

Escribimos $x = (x^n)$. Es claro que la sucesión (x^n) converge a cero en ω_I. Por otra parte, es fácil probar que x es un elemento de J $[\omega_I]$, ya que $(1/a_{in})_n \in$ J [R] para todo $i \in I$. Supongamos existe una sucesión (λ_n) de números reales tal que diverge a $+\infty$ con $(\lambda_n \, x(n))$ convergente a cero en J $[\omega_I]$, con lo cual

$$(\lambda_n \, x^n) \tag{1}$$

convergerá a cero en ω_I. Sea (λ_{n_k}) subsucesión de (λ_n) tal que $\lambda_{n_k} \geqslant k^2$ para todo $k \in N$; escribimos (β_n), siendo

$$\beta_r = 1 \ , \ 1 \leqslant r \leqslant n_1 \ ; \ \beta_r = (k+1)^2 \ , n_k + 1 \leqslant r \leqslant n_{k+1} \quad , \quad k \in N.$$

Es obvio que $(\beta_n) \in A$, por lo que existe $j \in I$ tal que $(\beta_n) = (a_{jn})$. Luego

$$\lambda_{n_k} x^{n_k} = \lambda_{n_k} (1/a_{jn_k}) \geqslant 1 \quad \forall \, k \in N,$$

lo que contradice (1). Podemos, pues, afirmar que x no es un elemento de L.

REFERENCIAS

[1] CIVIN, P. YOOD, B.: "Quasi-Reflexive Spaces". Proc. Amer. Math. Soc. *8* (1957), 906-911.

[2] DE WILDE, M. HOUET, C.: "On Increasing Sequence of Absolutely Convex Sets in Locally Convex Spaces". Math. Ann. *192* (1971), 257-261.

[3] HUSAIN, T.: "Two new classes of locally convex spaces". Math. Ann. *116* (1966), 289-299.

[4] JAMES, R.C.: "Bases and reflexivity of Banach spaces". Ann. of Math. *52* (3) (1950), 518-527.

[5] JAMES, R.C.: "A non reflexive Banach space isometric with its second conjugate space". Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *37* (1951), 174-177.

[6] KOTHE, G.: "Topological Vector Spaces". Springer-Verlag 1969.

[7] LEVIN, N. SAXON, S.: "A note on the inheritance of properties of locally convex spaces of countable codimension". Proc. Amer. Math. Soc. *29* (1971), 92-102.

[8] MARQUINA, A. PEREZ CARRERAS, P.: "On Quasi-barrelled Spaces". Manuscripta Math. *12* (1974), 387-398.

[9] VALDIVIA, M. "Algunos resultados sobre completitud en espacios localmente convexos". Collectanea Math. *26* (1975), 97-104.

[10] VALDIVIA, M.: "Espacios de sucesiones". Ayudas Manuel Aguilar. Madrid, 1980.

[11] VALDIVIA, M.: "Topics in locally convex spaces". North-Holland, Math. Studies 67. 1982.

[12] WEBB, J.H.: "Sequential convergence in locally convex spaces". Proc. Cambricge Phil. Soc. *64* (1968), 341-364.

Facultad de Matemáticas
Dr. Moliner, 4
BURJASOT (Valencia)