SUBESPACIOS DE PRIMERA CATEGORIA EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS DE BAIRE

por

M. VALDIVIA

SUMMARY

In this article subspaces of first category, with certain additional properties, are constructed in Baire topological vector spaces.

RESUMEN

En este artículo se construyen subespacios de primera categoría, con propiedades adicionales, en espacios vectoriales topológicos de Baire.

V. Klee y A. Wilansky preguntan en [2] si cada hiperplano denso de un espacio de Banach es de segunda categoría. J. Arias de Reyna construye en [1] un hiperplano denso de primera categoría en cada espacio de Banach separable de dimensión infinita. En dicha construcción utiliza el axioma de Martin para afirmar que la unión de subconjuntos de números reales de medida de Lebesgue cero, en número menor que $2^{\aleph_0}$, tiene medida de Lebesgue cero, (ver [4], teorema 3). Nosotros extendemos aquí [1] a espacios vectoriales topológicos de Baire, separables y de dimensiones infinitas, y obtenemos también nuevos resultados sobre subespacios de primera categoría en espacios vectoriales topológicos metrizables.

Los espacios vectoriales que aparecen aquí están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Utilizamos la palabra "espacio" en vez de "espacio vectorial topológico de Hausdorff". Dados un espacio E y un número ordinal α, ponemos card E y card α para denotar los números cardinales de E y α, respectivamente; dim E es la dimensión algebraica de E. Escribimos μ para la medida de Lebesgue en la recta real R.

Sea F un espacio con un subconjunto denso numerable $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Suponemos que existe una sucesión (V_n) de entornos equilibrados del origen en F tales que

$$\cap \left\{V_n : n = 1, 2, \dots\right\} = \left\{0\right\} \text{ y } V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \, , n=1,2,\dots$$

Sea $\mathcal{T}$ la topología vectorial sobre F definida por el sistema fundamental de entornos del origen $\left\{V_n : n = 1,2,\dots\right\}$ y sea (M_n) una sucesión creciente de subespacios cerrados de $F[\mathcal{T}]$. Ponemos G_n para la envoltura lineal de $M_n \cup \left\{x_1, x_2, \dots, x_n\right\}$ y suponemos que $G := \cup \left\{G_n : n = 1,2,\dots\right\}$ es de codimensión infinita en F. Si para cada entero positivo n,

$$(F \sim G_n) \cap A = \left\{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,p}, \dots\right\}$$

determinamos una sucesión de enteros

$$n < q_{n,1} < q_{n,2} < \dots . < q_{n,p} < \dots$$

tal que

$$(x_{n,p} + V_{q_{n,p}}) \cap G_n = \phi, \, p = 1,2, \dots$$

Ponemos

$$L_n = \cup \left\{x_{n,p} + V_{q_{n,p}} : p = 1,2,\dots\right\}, \quad L = \cap \left\{L_n : n = 1,2,\dots\right\}.$$

Puesto que $F[\mathcal{T}]$ es metrizable y separable, se tiene que $\dim F \leqslant \operatorname{card} F = 2^{\aleph_0}$.

Proposición 1. *Si se acepta el axioma de Martin, existe un hiperplano denso* H *en* F *que no corta* L *y contiene* M_n, $n = 1,2,\dots$

Demostración: Primero suponemos que F es real. Sea α el primer ordinal cuyo cardinal es la codimensión de G en F. Sea $\{ y_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \alpha\}$ una familia de vectores de F linealmente independientes, de manera que si M es su envoltura lineal, se tiene que $G + M = F$, $G \cap M = \{0\}$. Dado un ordinal $\beta \leqslant \alpha$, $\beta > 0$, ponemos F_β para la envoltura lineal de $G \cup \{ y_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \beta \}$. Escribimos $H_1 = G$. Entonces H_1 es un hiperplano denso de F_1 que no corta a L. Procediendo por inducción, suponemos que para un ordinal $\gamma > 1$, $\gamma < \alpha$, y para cada $\lambda < \gamma$, $\lambda \geqslant 1$, hemos construido un hiperplano denso H_λ de F_λ tal que $H_\lambda \cap L = \phi$, y si $1 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \gamma$, $H_{\lambda_2} \cap F_{\lambda_1} = H_{\lambda_1}$. Si γ es un ordinal límite, ponemos

$$H_\gamma = \cup \left\{ H_\lambda : 1 \leqslant \lambda < \gamma \right\}.$$

Entonces H_γ es un hiperplano denso de F_γ, que no corta a L. Si γ no es un ordinal límite, tomamos un vector z_γ en $F_{\gamma-1} \sim H_{\gamma-1}$. Sea P la envoltura lineal de $\{y_{\gamma-1}, z_\gamma\}$. En F_γ sea f la proyección sobre P a lo largo de $H_{\gamma-1}$. Definimos en P un producto escalar $(.\,,.)$ y una norma $|\,.\,|$ tal que si

$$x = a\, y_{\gamma-1} + b\, z_\gamma, \quad y = c\, y_{\gamma-1} + d\, z_\gamma \text{ , a, b, c y d números reales,}$$

entonces

$$(x, y) = ac + bd, \; |\,x\,| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

Sea g la aplicación definida sobre $P \sim \{0\}$ con valores en $[0,\pi]$ tal que si x pertenece a $P \sim \{0\}$ y ω es el ángulo medido en radianes que verifica:

$$\cos \omega = \frac{(x, y_{\gamma-1})}{|\,x\,|} \quad , \omega \in [0,\pi],$$

entonces $g(x) = \omega$.

Sea $\mathfrak{D}$ la familia de todos los subespacios D de F_γ que cumplen las siguientes condiciones: a) D contiene P ; b) existe un entero positivo m, dependiendo de D tal que G_m está contenido en D y es de codimensión finita en D.

Para cada par de enteros positivos q y r, y para cada D en $\mathfrak{D}$, escribimos:

$$L_{D,q,r} = \left\{ x \in L_r \cap D : |\,f(x)\,| > \frac{1}{q} \right\},$$
$$L_{D,q} = \left\{ x \in L \cap D : |\,f(x)\,| > \frac{1}{q} \right\}.$$

Fijamos ahora q y D. Hallamos un entero positivo m tal que G_m está contenido en D y es de codimensión finita en D. Puesto que G_m es $\mathcal{T}$-cerrado, la restricción de f a D es $\mathcal{T}$-continua y, por tanto, dado $\epsilon > 0$, $\epsilon < 1$, existe un entero positivo r tal que

$$|\,f(x)\,| < \frac{\epsilon}{q} \text{ si } x \in V_r \cap D\,.$$

Sea J el conjunto de todos los enteros positivos p tales que

$$(x_{r,p} + V_{q_{r,p}}) \cap L_{D,q,r} \neq \phi\,.$$

Para cada p de J, tomamos un z_p en $(x_{r,p} + V_{q_{r,p}}) \cap L_{D,q,r}$ y ponemos

$$u_p = g \circ f(z_p),\; I_p = \left\{ u \in [0,\pi] : |\,u_p - u\,| < 2^{2-p}\epsilon \right\}.$$

Entonces

$$\mu(\cup \left\{ I_p : p \in J \right\}) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2-p}\epsilon = 4\epsilon .$$

Tomamos ahora un punto cualquiera y de $L_{D,q,r}$. Existe un elemento p de J tal que

$$y \in x_{r,p} + V_{q_{r,p}}$$

y, por tanto,

$$y - z_p = (y - x_{r,p}) + (x_{r,p} - z_p) \in V_{q_{r,p}} + V_{q_{r,p}} \subset V_{q_{r,p-1}} \subset \ldots \subset$$

$$\subset 2^{2-p}\, V_{q_{r,1}} \subset 2^{1-p}\, V_r ,$$

de aquí que

$$| f(y - z_p) | < \frac{2^{1-p}}{q} \epsilon < \frac{1}{q} .$$

Consecuentemente,

$$\frac{1}{q^2} > (f(y - z_p), f(y - z_p)) = (f(y), f(y)) + (f(z_p), f(z_p))$$

$$- 2 (f(y), f(z_p)) > \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} - 2 (f(y), f(z_p))$$

y, por tanto,

$$(f(y), f(z_p)) > \frac{1}{2q^2} > 0,$$

por lo que podemos hallar $0 \leqslant \omega < \frac{\pi}{2}$ tal que

$$\cos \omega = \frac{(f(y), f(z_p))}{| f(y) | \cdot | f(z_p) |}$$

Obviamente,

$$\tfrac{1}{2}\, \omega \leqslant \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\, \omega = \frac{\operatorname{sen} \omega}{2 \cos^2 \frac{1}{2}\omega} \leqslant \frac{\operatorname{sen} \omega}{2 \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \operatorname{sen} \omega$$

y, aplicando el teorema de los senos de un triángulo:

$$\frac{|f(y - z_p)|}{\text{sen } \omega} \geqslant |f(y)| > \frac{1}{q}$$

y, por tanto,

$$\tfrac{1}{2}\,\omega \leqslant \text{sen } \omega \leqslant q\,|f(y - z_p)| < 2^{1-p}\epsilon$$

y, puesto que $|u_p - \text{go } f(y)| \leqslant \omega$, se sigue que

$$|u_p - \text{go } f(y)| \leqslant 2^{2-p}\epsilon\,,$$

de donde se deduce que go f(y) pertenece a I_p. Consecuentemente,

$$\mu(\text{go } f(L_{D,q})) \leqslant \mu(\text{go } f(L_{D,q,r})) \leqslant \mu(\cup\{I_p : p\epsilon J\}) \leqslant 4\,\epsilon\,.$$

Puesto que ϵ es arbitrario, se sigue que $u(\text{go } f(L_{D,q})) = 0$. El número cardinal de $\mathfrak{D}$ es menor que $2^{\aleph_0}$ de aquí que

$$\mu(\text{go } f(L \cap F_\gamma)) = \mu(\cup\{\text{go } f(L_{D,q}) : D \epsilon \mathfrak{D}, q = 1,2, \ldots\} = 0\,.$$

Por tanto, podemos encontrar un vector u en P, $u \neq 0$, tal que

$$0 < g(u) < \frac{\pi}{2},\ g(u) \notin \text{go } f(L \cap F_\gamma),\ \pi\text{-}g(u) \notin \text{go } f(L \cap F_\gamma)\,.$$

Denotamos ahora por H_γ la envoltura lineal de $H_{\gamma-1} \cup \{u\}$. En ambos casos considerados para γ se tiene que H_γ es un hiperplano denso de F_γ de manera que si $1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \alpha$, $H_{\gamma_2} \cap F_{\gamma_1} = H_{\gamma_1}$.

Si $H := \cup\{H_\gamma : \gamma < \alpha\}$, se sigue que H es un hiperplano denso de $F_\alpha = F$, que no corta a L y contiene M_n, n = 1,2, . . .

Finalmente, si F es complejo, sea F_r el espacio real asociado a F. Entonces F_r satisface las mismas condiciones que F en el caso anterior y, consecuentemente, existe un hiperplano denso S_r en F_r que no corta a L y contiene M_n, n = 1,2, . . . Por tanto, $H = S_r \cap i\,S_r$ es el hiperplano que responde al enunciado de la proposición.

c.q.d.

Teorema 1. *Sea* E *un espacio separable de Baire de dimensión infinita. Si se acepta el axioma de Martin, existe un hiperplano denso* S *de* E *que es de primera categoría.*

Demostración. Hallamos una sucesión (U_n) de entornos equilibrados y abiertos del origen en E tal que

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n, \ n = 1,2,\ldots$$

Se tiene que

$$T = \cap \left\{ U_n : n = 1,2,\ldots \right\}$$

es un subespacio cerrado de E. Si existe un entorno U del origen en E que no contiene ningún espacio vectorial diferente de $\{ 0 \}$, tomamos $U_1 \subset U$. Si no es así, tomamos la sucesión (U_n) de manera que el mayor subespacio contenido en U_n sea distinto del mayor subespacio contenido en U_{n+1}. Entonces la codimensión de T en E es infinita.

Sea φ la aplicación canónica de E sobre E/T. Ponemos $E/T = F$, $\varphi(U_n) = V_n$, $n = 1,2,\ldots$ Entonces F es un espacio de Baire separable de dimensión infinita. Consecuentemente, existe un subconjunto denso numerable $A = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \}$ de F cuya envoltura lineal es de codimensión infinita en F. Por otra parte, la sucesión de entornos equilibrados (V_n) del origen en F verifican:

$$\cap \left\{ V_n : n = 1,2,\ldots \right\} = \left\{ 0 \right\}, \ V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \ n = 1,2,\ldots$$

Realizamos ahora la anterior construcción tomando $M_n = 0$, $n = 1,2,\ldots$, y obtenemos que L_n es un subconjunto abierto denso de F, $n = 1,2,\ldots$, de aquí que $F \sim L$ sea un subconjunto de primera categoría de F. La proposició 1 nos permite obtener un hiperplano denso H de F que no corta a L. Si ponemos $S = \varphi^{-1}(H)$, es inmediato que S es un hiperplano denso de primera categoría de E.

c.q.d.

Teorema 2. *Sea* E *un espacio metrizable que no es de Baire. Si* A *es un subconjunto numerable de* E, *existe un subespacio cerrado separable* U *de* E *que contiene* A *y no es de Baire.*

Demostración: Si K es real, ponemos K_1 para denotar el cuerpo de los números racionales. Si K es complejo, K_1 es el cuerpo de los números de la forma $a + bi$, con a y b racionales.

Tomamos una sucesión decreciente (B_n) de subconjuntos densos y abiertos de E con intersección vacía. Puesto que A es numerable, podemos encontrar un subconjunto infinito numerable A_1 de B_1 cuya clausura en E contiene A. Ponemos E_1 para la envoltura lineal sobre K_1 de $A \cup A_1$.

Entonces card $E_1 = \aleph_0$. Procedemos por recurrencia y suponemos que para un entero positivo n, hemos encontrado un subconjunto E_n de E con card $E_n = \aleph_0$. Tomamos un subconjunto numerable A_{n+1} de B_{n+1} cuya clausura en E contiene E_n. Sea E_{n+1} la envoltura lineal sobre K_1 de $A_{n+1} \cup E_n$ Si $G: = \cup \{ E_n : n = 1,2,\ldots \}$, G es un espacio vectorial sobre K_1, cuyo número cardinal es $\aleph_0$. Es inmediato que la clausura U de G en E es un subespacio de E. Por otra parte, es obvio que $B_n \cap U$ es un subespacio denso de U, $n = 1,2,\ldots$ Puesto que

$$\cap \left\{ B_n \cap U : n = 1,2,\ldots \right\} = \phi$$

se tiene que U no es un espacio de Baire. Finalmente, U es separable y contiene A.

c.q.d.

Suponemos ahora que F es un espacio metrizable completo no separable y de dimensión algebraica $2^{\aleph_0}$. Suponemos también que se verifica la hipótesis del continuo. Sea α el primer ordinal cuyo cardinal es $2^{\aleph_0}$. Sea $\{ x_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \alpha \}$ una base de Hamel de F. Ponemos F_0 para la clausura de la envoltura lineal de $\{ x_0, x_1, x_2, \ldots, \}$. Procedemos por inducción transfinita y suponemos que para un ordinal $\beta < \alpha$, $\beta > 0$, hemos construido los subespacios cerrados separables F_λ de F, con $\lambda < \beta$, de manera que si $\lambda_1 < \lambda_2 < \beta$, entonces, F_{λ_1} está contenido en F_{λ_2}, $F_{\lambda_1} \neq F_{\lambda_2}$. Si β es un ordinal límite, ponemos F_β para la clausura de $\cup \{ F_\lambda : \lambda < \beta \}$. Si β no es un ordinal límite, sea λ_1 el primer ordinal tal que $x_{\lambda_1} \notin F_{\beta-1}$ y, procediendo por recurrencia, sea λ_{n+1} el primer ordinal tal que x_{n+1} no pertenece a la envoltura lineal de

$$F_{\beta-1} \cup \left\{ x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda n} \right\}.$$

Ponemos F_β para la clausura F de la envoltura lineal de

$$F_{\beta-1} \cup \left\{ x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}, \ldots \right\}.$$

De esta forma determinamos una familia $\{ F_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \alpha \}$ de subespacios separables de F, cerrados y de dimensiones infinitas, de manera que F_β está incluido en F_γ si $0 \leqslant \beta < \gamma < \alpha$, F_β es de codimensión infinita en F_γ y

$$F = \cup \left\{ F_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \alpha \right\}.$$

Proposición 2. *Existe un subespacio* H *de* F *tal que, para cada ordinal* λ , $0 \leqslant \lambda < \alpha$, $H \cap F_\lambda$ *es un subespacio de codimensión numerable de* F_λ, *denso y de primera categoría.*

Demostración. Puesto que F_o es un subespacio de Baire, separable y de dimensión infinita, aplicamos el teorema 1 para obtener un hiperplano H_o de F_o, denso y de primera categoría. Procedemos por inducción transfinita y suponemos que para un ordinal $\beta < \alpha$, $\beta > 0$, hemos encontrado los subespacios H_λ de F_λ, $0 \leqslant \lambda < \beta$ densos, de primera categoría y de codimensiones numerables, de manera que si $0 \leqslant \gamma < \delta < \beta$, entonces $H_\gamma = H_\delta \cap F_\gamma$. Si β no es un ordinal límite, ponemos $M_n = F_{\beta-1}$, $n = 1,2, \ldots$ Si β es un ordinal límite, usamos la hipótesis del continuo para encontrar una sucesión de ordinales $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots$ tales que $\cup \{ F\beta_n : n = 1,2, \ldots \}$ es denso en F_β. Ponemos en este caso $M_n = F_{\beta n}$, $n = 1,2, \ldots$ En ambos casos, puesto que F_β es un espacio de Baire separable de dimensión infinita, existe un subconjunto numerable denso A de F tal que la envoltura lineal de

$$A \cup (\cup \{ M_n : n = 1,2, \ldots \})$$

es de codimensión infinita en F_β. Usamos la proposición 1 para obtener un hiperplano S de F_β, denso y de primera categoría que contiene M_n, $n = 1,2, \ldots$ Sea M un complemento algebraico de $\cup \{ M_n : n = 1,2, \ldots \}$ en S. Ponemos

$$H_\beta = M + \cup \left\{ H_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \beta \right\}.$$

Entonces H_β es un subespacio denso de F_β, de primera categoría y de codimensión numerable, tal que si $0 \leqslant \gamma < \beta$, $H_\beta \cap F_\gamma = H_\gamma$.

Finalmente, es suficiente tomar $H = \cup \{ H_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \alpha \}$ para alcanzar la conclusión.

Teorema 3. *Sea* E *un espacio de Fréchet de dimensión infinita. Si se acepta la hipótesis del continuo, existe un subespacio* L *de* E *tal que, dado un subconjunto numerable* P *de* E, *existe un subespacio* G *de* E *que cumple las siguientes condiciones:*

a) G *es un espacio de Fréchet separable.*
b) G *contiene* P.
c) $L \cap G$ *es un subespacio de primera categoría de* G, *denso y de codimensión numerable.*

Demostración. Sea (u_n) una sucesión de vectores linealmente independientes del dual topológico E' de E. Sea T el subespacio de E ortogonal a $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \}$. Ponemos $E/T = F$ y φ para la aplicación canónica de E sobre F.

Suponemos primero que F es separable. Aplicamos el teorema 1 para obtener un hiperplano S de F, denso y de primera categoría. Ponemos $L = \varphi^{-1}(S)$ y tomamos un vector x en E que no pertenece a $\varphi^{-1}(S)$. Hallamos un subconjunto numerable A de $\varphi^{-1}(S)$ cuya clausura en E contiene $P \cup \{x\}$. Obviamente, $\varphi^{-1}(S)$ no es un espacio de Baire y, por tanto, podemos aplicar el teorema 2 y obtenemos un subespacio cerrado separable X de $\varphi^{-1}(S)$ que no es de Baire y contiene A. Si G es la clausura de X en E, G satisface las condiciones a), b) y c).

Supongamos ahora que F no es separable. Los conjuntos polares en F de $n\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, forman un sistema fundamental de entornos del origen para una topología vectorial metrizable $\mathcal{T}$ tal que $F[\mathcal{T}]$ es separable. Consecuentemente, $\dim F \leqslant 2^{\aleph_0}$ y, puesto que F es un espacio de Fréchet, el argumento utilizado por Löwig en [3] sirve para concluir que $\dim F = 2^{\aleph_0}$. Aplicamos ahora la construcción anterior para obtener un ordinal α con card $\alpha = 2^{\aleph_0}$ y una familia $\{F_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \alpha\}$ de subespacios separables de F, cerrados y de dimensiones infinitas, de manera que F_β está contenido en F_γ si $0 \leqslant \beta < \gamma < \alpha$, F_β es de codimensión infinita en F_γ y

$$F = \cup\left\{F_\lambda : 0 \leqslant \lambda < \alpha\right\}.$$

De acuerdo con la proposición 2, obtenemos un subespacio S de F tal que, para cada ordinal $\lambda < \alpha$, $S \cap F_\lambda$ es un subespacio denso de F_λ, de codimensión numerable y de primera categoría. Ponemos $L = \varphi^{-1}(S)$. Puesto que P es numerable, existe un ordinal $\beta < \alpha$ tal que $\varphi(P)$ está contenido en F_β. Se tiene que $\varphi^{-1}(S) \cap \varphi^{-1}(F_\beta)$ es un subespacio denso de $\varphi^{-1}(F_\beta)$, de codimensión numerable y de primera categoría y, por tanto, existe un subconjunto numerable A de $\varphi^{-1}(S) \cap \varphi^{-1}(F_\beta)$ cuya clausura B en $\varphi^{-1}(F_\beta)$ contiene P y la envoltura lineal de $(\varphi^{-1}(S) \cap \varphi^{-1}(F_\beta)) \cup B$ coincide con $\varphi^{-1}(F_\beta)$. Puesto que $\varphi^{-1}(S) \cap \varphi^{-1}(F_\beta)$ no es un espacio de Baire, aplicamos el teorema 2 y obtenemos un subespacio cerrado separable X de $\varphi^{-1}(S) \cap \varphi^{-1}(F_\beta)$ que no es un espacio de Baire y contiene A. Si G es la clausura de X en $\varphi^{-1}(F_\beta)$, no es difícil comprobar que G satisface las condiciones a), b) y c).

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arias de Reyna, J.: Dense hyperplanes of first category. Math. Ann. *249*, 111-114 (1980).

[2] Klee, V. and Wilansky, A.: Research problems nº 13. Bull. Amer. Math. Soc. *72*, 656 (1966).

[3] Löwig, H.: Über die Dimension linearer Räume. Studia Math. *5*, 18-23 (1934).

[4] Schoenfield, J. R.: Martin's Axiom. Math. Monthly *82*, 610-617 (1975).

Prof. Manuel Valdivia
Facultad de Matemáticas
Dr. Moliner, 50
Burjasot (Valencia)