UNA NOTA SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS CON VALORES VECTORIALES

por

JOAQUIN MOTOS IZQUIERDO

INTRODUCCION

En este artículo demostramos los siguientes resultados relacionados con el trabajo [2] de A. Etcheberry: 1) Sea E el límite inductivo estricto de una sucesión (E_n) de espacios de Fréchet separables y de dimensión infinita, y supongamos que existe una topología localmente convexa y metrizable sobre E, T, que coincide con la de E sobre cada E_n. Entonces $C_c(E[\mathcal{T}])$ es isomorfo topológicamente a un subespacio de $(C_c(N^\infty))^N$ .2) Sea X un espacio polaco que contiene un subconjunto cerrado homeomorfo a N^∞ y sea E un espacio localmente convexo en el que el bipolar de todo acotado de Suslin es débilmente compacto. Entonces se tiene los isomorfismos topológicos

$$C^b(X,E) \simeq C^b(N^\infty,E)$$
$$C^b(X,E)[\beta_o] \simeq C^b(N^\infty,E)[\beta_o] .$$

Los espacios vectoriales utilizados aquí están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos. Con la expresión "espacio localmente convexo" significamos "espacio vectorial topológico localmente convexo y de Hausdorff". Si $\langle E,F \rangle$ es un par dual denotamos por $\sigma(E,F)$ la topología débil sobre E. Si E es un espacio localmente convexo representamos por $\hat{E}'$ y E^* los duales topológicos y algebraico de E; $\hat{E}$ representa su completado. Si E y F son espacios localmente convexos escribimos $E \simeq F$ para denotar que E y F son isomorfos topológicamente. Si E es un espacio localmente convexo denotamos por E^N el producto topológico de una infinidad numerable de espacios iguales a E. Denotaremos por N^∞ el producto topológico de una infinidad numerable de copias de N (N es el conjunto de los enteros positivos con la tolopogía inducida por la usual de K). Cuando decimos que F es un subespacio complementado del espacio localmente convexo E queremos significar que F es un subespacio lineal cerrado de E que admite un complemento topológico en E. Si E y F son dos espacios localmente convexos denotamos por $E \otimes_\epsilon F$ y $E \hat{\otimes}_\epsilon F$ el producto tensorial de E y F dotado con la topología ϵ, y su complementado respectivamente. Si Ω es un abierto no vacío de R^n, $\mathcal{D}'(\Omega)$ es el espacio de todas las distribuciones de L. Schwartz sobre Ω con la topología fuerte. Escribimos s para el espacio de Fréchet de las sucesiones de decrecimiento rápido. Si K está provisto de la topología usual, escribimos $\omega = K^N$. Si f: $A \to B$ es una función y C es un subconjunto de A denotemos por $f|C$ la restricción de la función f al conjunto C. Dado un espacio topológico X y un espacio localmente convexo E denotaremos por $C(X,E)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas definidas en X con valores en E (si E = K escribiremos simplemente $C(X)$). Denotamos por $C^b(X,E)$ el subespacio vectorial de $C(X,E)$ formado por aquellas funciones cuyo rango es un subconjunto acotado de E (escribimos $C^b(X)$ si E = K). Por $C_c(X,E)$ entendemos el espacio $C(X,E)$ provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de X. Por $C^b(X,E)[\beta_o]$ entendemos el espacio $C^b(X,E)$ equipado con la topología estricta β_o (es decir, de la topología generada por las seminormas $p_h(\varphi) = \sup \{ p(h(x)\, \varphi(x)) : x \in X \}$ con p variando en el conjunto de todas las seminormas continuas en E y h recorriendo el conjunto de todas las funciones acotadas sobre X, con valores en K, que se anulan en el infinito). Si escribimos $C^b(X,E)$, sin especificar nada más entendemos que este espacio está equipado de la topología de la convergencia uniforme.

En la demostración del Teorema 1 necesitaremos los siguientes resultados: a) Si X es un espacio polaco que tiene un subconjunto cerrado homeomorfo a N^∞ (en particular, si X es un espacio de Fréchet separable y de dimensión infinita) entonces $C_c(X) \simeq C_c(N^\infty)$. Este resultado se debe a A. Etcheberry (ver [2]). b) Sea A un subconjunto cerrado de un espacio métrico X. Existe entonces un monomorfismo topológico S de $C_c(A)$ en $C_c(X)$ tal que $S(f)|A = f$ para cada f de $C(A)$ (ver [5]).

Teorema 1. *Sea* $E[\mathcal{T}]$ *el límite inductivo estricto de una sucesión (estrictamente creciente)* $(E_n[\mathcal{T}_n])_{n=1}^\infty$ *de espacios de Fréchet separables y de dimensión infinita, y supongamos que existe una topología localmente convexa y metrizable sobre* E, T, *que coincide con* $\mathcal{T}_n$ *sobre cada* E_n. *Entonces* $C_c(E[\mathcal{T}])$ *es isomorfo topológicamente a un subespacio de* $(C_c(N^\infty))^N$.

Prueba. Pongamos $F_1 = C_c(E_1[\mathcal{T}_1])$ y, para cada entero positivo n, sea F_{n+1} el subespacio de $C_c(E_{n+1}[\mathcal{T}_{n+1}])$ de todas aquellas funciones que se anulan en E_n. Probaremos que cada F_n es isomorfo topológicamente a $C_c(N^\infty)$. Por el resultado a) se tiene $F_1 \simeq C_c(N^\infty)$. Para cada entero positivo n sea S_n un isomorfismo topológico de $C_c(E_n[\mathcal{T}_n])$ sobre un subespacio cerrado de $C_c(E[T])$

de manera que $S_n(f)|E_n = f$ para cada f de $C(E_n[\mathcal{T}_n])$ (aplicamos el resultado b)), y sea T_n: $C_c(E_n[\mathcal{T}_n]) \to C_c(E_{n+1}[\mathcal{T}_{n+1}])$ la aplicación definida por $T_n(f) = S_n(f)|E_{n+1}$, $f \in C(E_n[\mathcal{T}_n])$.

Fijemos un entero positivo cualquiera n. Es fácil ver que T_n es un isomorfismo topológico de $C_c(E_n[\mathcal{T}_n])$ sobre $T_n(C(E_n[\mathcal{T}_n]))$ y que este último espacio es un complemento topológico de F_{n+1} en $C_c(E_{n+1}[\mathcal{T}_{n+1}])$; como, en virtud del resultado a), $C_c(E_{n+1}[\mathcal{T}_{n+1}]) \simeq C_c(N^\infty)$ se tiene que F_{n+1} es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $C_c(N^\infty)$. Veamos ahora que $C_c(N^\infty)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de F_{n+1}. Sea e un punto de $E_{n+1} \setminus E_n$ y sea B una bola abierta centrada en e (consideramos en E_{n+1} una métrica compatible con $\mathcal{T}_{n+1}$ para la que todas las bolas abiertas son convexas) y tal que $\bar{B} \cap E_n = \phi$ ($\bar{B}$ es la clausura de B en $E_{n+1}[\mathcal{T}_{n+1}]$). Usando el resultado b) hallamos un isomorfismo topológico X_n de $C_c(\bar{B})$ sobre un subespacio cerrado de $C_c(E_{n+1}[\mathcal{T}_{n+1}])$ de forma que $X_n(f)|\bar{B} = f$ para cada $f \in C(\bar{B})$. Sea ahora Y_n: $C_c(\bar{B}) \to F_{n+1}$ la aplicación definida por

$$Y_n(f) = k\, X_n(f) \quad , \quad f \in C(\bar{B})$$

(aquí k es una aplicación continua de $E_{n+1}[\mathcal{T}_{n+1}]$ en $[0,1]$ tal que $k(E_n) = \{0\}$ y $k(\bar{B}) = \{1\}$). Es claro que $C_c(\bar{B})$ es isomorfo topológicamente a $Y_n(C(\bar{B}))$ y que el subespacio de F_{n+1} formado por aquéllas funciones que se anulan sobre $\bar{B}$ es un complemento topológico de $Y_n(C(\bar{B}))$ en F_{n+1}. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\bar{B}$ es homeomorfo a ω (ver [1], pág. 191), resulta que $C_c(N^\infty)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de F_{n+1} (nuevamente hemos utilizado a)). Si demostramos que $C_c(N^\infty) \simeq c_0 \hat{\otimes}_\epsilon C_c(N^\infty)$ quedará probado (en virtud de (5) pág. 445 [6]) que F_{n+1} es isomorfo topológicamente a $C_c(N^\infty)$. Sea entonces $\hat{N}$ el compactado de Alexandrov de N; la completitud de $C_c(N^\infty)$ y a) prueban que

$$C_c(N^\infty) \simeq C_c(\hat{N} \times \hat{N}^\infty) \simeq C_c(N, C_c(\hat{N}^\infty)) \simeq C_c(\hat{N}) \hat{\otimes}_\epsilon C_c(N^\infty) \simeq c_0 \hat{\otimes}_\epsilon C_c(N^\infty)$$

y esto establece el isomorfismo topológico deseado.

Consideremos ahora la aplicación S: $C_c(E[\mathcal{T}]) \to \prod_{n=1}^{\infty} F_n$ definida por

$$S(f) = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) \quad , \quad f \in C(E[\mathcal{T}])$$

siendo $f_1 = f|E_1$, $f_2 = (f - S_1(f_1))|E_2$, $f_3 = (f - S_1(f_1) - S_2(f_2))|E_3$, ...

Obviamente S es lineal, inyectiva y continua; que S es homomorfismo topológico se sigue fácilmente del hecho de ser la topología T menos fina que $\mathcal{T}$ (lo que se demuestra utilizando el teorema de la gráfica de Borel de L. Schwartz (ver

[6], pág. 74) ya que E[T] es un espacio de Suslin). Como $\prod_{n=1}^{\infty} F_n \simeq (C_c(N^\infty))^N$ el teorema está completamente demostrado.

Nota 1. Si Ω es un subconjunto abierto de R^n, entonces $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un subespacio completo de $C_c(\mathcal{D}(\Omega))$; de acuerdo con el Teorema 1, $(C_c(N^\infty))^N$ tiene entonces un subespacio cerrado topológicamente isomorfo a $\mathcal{D}'(\Omega)$ (este resultado tambien se puede obtener sin utilizar el Teorema 1 teniendo presente que $\mathcal{D}'(\Omega) \simeq (s')^N$ (véase [7]) y que $C_c(s) \simeq C_c(N^\infty)$ (resultado a))).

Nota 2. Si Ω es un subconjunto abierto de R^n, entonces $\mathcal{D}(\Omega)$ no es un k_R-espacio (en virtud de la no B_r-completitud de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (véase [8]) podemos hallar un subespacio denso y no cerrado de $\mathcal{D}(\Omega)$, que corta a cada conjunto absolutamente convexo y compacto en un cerrado; es ahora fácil determinar, a partir de ese subespacio, una función sucesionalmente continua pero no continua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$) por lo que $C_c(\mathcal{D}(\Omega))$ no es completo; de acuerdo con el Teorema 1, $\widetilde{Cc(\mathcal{D}(\Omega))}$ es un subespacio cerrado de $(C_c(N^\infty))^N$.

Nota 3. Si un espacio localmente convexo $E[\mathcal{T}]$ satisface las hipótesis del Teorema 1 y además es un k_R-espacio (ciertamente este tipo de espacios (LF) no es muy frecuente) entonces $C_c(E[\mathcal{T}]) \simeq (C_c(N^\infty))^N$ pues si $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n$ (empleamos la notación del Teorema 1) entonces la función $\sum_{n=1}^{\infty} S_n f_n$ está en $C(E[\mathcal{T}])$ y $S(\sum_{n=1}^{\infty} S_n f_n) = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$.

En [2] A. Etcheberry demuestra el siguiente resultado: c) Sea X un espacio polaco que tiene un subconjunto cerrado homeomorfo a N^∞, entonces existe una aplicación $L: C^b(X) \to C^b(N^\infty)$ que es un isomorfismo topológico simultáneamente uniforme y estricto.

En el teorema que sigue extendemos el resultado c) al caso vectorial. Notemos primero que la extension de dicho resultado al caso en que el espacio localmente convexo de llegada es completo es inmediata: En efecto, en este caso la completitud de E, el hecho de ser X un k-espacio y el resultado c) dan lugar a los siguientes isomorfismos topológicos

$$C^b(X,E) \simeq C^b(X) \hat{\otimes}_\epsilon E \simeq C^b(N^\infty) \hat{\otimes}_\epsilon E \simeq C^b(N^\infty,E)$$
$$C^b(X,E)[\beta_o] \simeq C^b(X)[\beta_o] \hat{\otimes}_\epsilon E \simeq C^b(N^\infty)[\beta_o] \hat{\otimes}_\epsilon E \simeq C^b(N^\infty,E)[\beta_o].$$

Teorema 2. Sea X *un espacio polaco que tiene un subconjunto cerrado homeomorfo a* N^∞, *y sea* E *un espacio localmente convexo en el que el bipolar de todo acotado de Suslin es* $\sigma(E,E')$*-compacto. Entonces existe una aplicación* $\dot{L}: C^b(X,E) \to C^b(N^\infty,E)$ *que es un isomorfismo topológico simultaneamente uniforme y estricto.*

Prueba. En primer lugar demostraremos que para cada $\pi \epsilon C^b(X)'$, existe una única aplicación lineal y continua, $\hat{\pi}$, de $C^b(X,E)$ en E, que verifica

$$\langle \hat{\pi}(\varphi), e' \rangle = \langle e'_o \varphi, \pi \rangle \quad , \quad e' \in E' \quad , \quad \varphi \in C^b(X,E) .$$

Fijemos entonces un elementos π en $C^b(X)'$. La aplicación $\hat{\pi} : C^b(X,E) \to E'^*$ definida por

$$\langle \hat{\pi}(\varphi), e' \rangle = \langle e'_o \varphi, \pi \rangle \quad , \quad e' \in E' \quad , \quad \varphi \in C^b(X,E) \quad ,$$

es lineal y satisface, para cada $\varphi \in C^b(X,E)$ y cada $e' \in \varphi(X)^o$ (polar de $\varphi(X)$ en E'), la desigualdad

$$|\langle \hat{\pi}(\varphi), e' \rangle| \leqslant \|\pi\| ;$$

considerando ahora que, para cada $\varphi \in C^b(X,E)$, $\varphi(X)$ es un acotado de Suslin, el teorema de los bipolares (véase, por ejemplo, [3] pág. 192) y la hipótesis sobre E prueban que

$$\hat{\pi}(\varphi) \in \|\pi\| \, \overline{\Gamma \varphi(X)}^{\,\sigma(E',E)} \quad , \quad \varphi \in C^b(X,E) ,$$

y, en consecuencia, $\hat{\pi}$ aplica C^b (X,E) en E (hemos identificado, como es usual, E con un subespacio de E'^* mediante la inyección canónica). Sea ahora p una seminorma continua en E y pongamos $U = \{ e : p(e) \leqslant 1 \}$ y $p_\infty(\varphi) = \sup \{ p(\varphi(x)) : : x \in X \}$, $\varphi \in C^b(X,E)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} p(\hat{\pi}(\varphi)) &= \sup_{e' \in U^o} |\langle e'_o \varphi, \pi \rangle| \leqslant \sup_{e' \in U^o} (\|\pi\| \sup_{x \in X} |\langle \varphi(x), e' \rangle|) = \\ &= \|\pi\| \sup_{x \in X} (\sup_{e' \in U^o} |\langle \varphi(x), e' \rangle|) = \|\pi\| \sup_{x \in X} p(\varphi(x)) = \\ &= \|\pi\| \, p_\infty(\varphi) , \ \varphi \in C^b(X,E) , \end{aligned}$$

lo que demuestra la continuidad de $\hat{\pi}$. La cuestión de la unicidad es obvia.

Sea ahora L un isomorfismo topológico de $C^b(X)$ sobre $C^b(N^\infty)$ y de $C^b(X)[\beta_o]$ sobre $C^b(N^\infty)[\beta_o]$ (aplicamos el resultado c)), y sea $\dot{L} : C^b(X,E) \to \to C^b(N^\infty, E)$ la aplicación definida por

$$\dot{L}(\varphi)(\vec{n}) = \widehat{\delta_{\vec{n}} o \, L}(\varphi) \quad , \quad \varphi \in C^b(X,E) \quad , \quad \vec{n} \in N^\infty ,$$

siendo $\delta_{\vec{n}}$ el elemento de $C^b(N^\infty)'$ dado por $\delta_{\vec{n}}(g) = g(\vec{n})$, $g \in C^b(N^\infty)$, $\widehat{y \, \delta_{\vec{n}} o} \, L$ la aplicación de $C^b(X,E)$ en E asociada a $\delta_{\vec{n}} o \, L$ según lo que hemos visto al comienzo de la prueba. Demostraremos que $\dot{L}(\varphi)$ está en $C(N^\infty, E)$. Fijemos para ello $\vec{n}$ en N^∞ y sea U un entorno de 0, absolutamente convexo y cerrado, en E. Si $\lambda > 0$ es tal que $\varphi(X) \subset \lambda U$ entonces, para cada $e' \in U^o$, se verifica que $\sup_{x \in X} | \langle \varphi(x) , e' \rangle | \leqslant \lambda$, y por tanto $U^o{}_o\varphi$ es un subconjunto uniformemente acotado de $C^b(X)$. Sea M la clausura de $U^o{}_o\varphi$ en $C_c(X)$. M es equicontinuo puesto que, para cada $x_o \in X$ y cada $\epsilon > 0$, la continuidad de φ permite hallar un entorno de x_o, A, de manera que $| e'_o \varphi (x) - e'_o \varphi (x_o) | \leqslant \epsilon$ para $x \in A$ y $e' \in U^o$. Además $M(x) = \left\{ f(x) : f \in M \right\}$ es un subconjunto acotado de K para cada $x \in X$. Usando el teorema de Ascoli concluimos que M es compacto en $C_c(X)$ luego en $C^b(X)[\beta_o]$ (ya que sobre M, que es un subconjunto uniformemente acotado de $C^b(X)$, coinciden la topología β_o y la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de X (véase [4] pág. 47)). Por consiguiente L(M) es compacto en $C^b(N^\infty)$ $[\beta_o]$ luego en $C_c(N^\infty)$. Utilizando nuevamente el teorema de Ascoli vemos que L(M) es equicontinuo. A fortiori, $L(U^o{}_o\varphi)$ es equicontinuo y por ello podemos encontrar un entorno de $\vec{n}$, P, de manera que

$$| L(e'_o\varphi)(\vec{m}) - L(e'_o\varphi)(\vec{n}) | \leqslant 1 \quad , \quad \vec{m} \in P \quad , \quad e' \in U^o,$$

pero entonces

$$| \langle \widehat{\delta_{\vec{m}} \circ L(\varphi)} - \widehat{\delta_{\vec{n}} \circ L(\varphi)} \quad , \quad e' \rangle | \leqslant 1 \quad , \quad \vec{m} \in P \quad , \quad e' \in U^o \ ,$$

y de aqui se sigue que

$$\dot{L}(\varphi)(\vec{m}) - \dot{L}(\varphi)(\vec{n}) \in U \qquad \vec{m} \in P \ ,$$

lo que demuestra la continuidád de $\dot{L}(\varphi)$ en $\vec{n}$. Que $\dot{L}(\varphi)(N^\infty)$ es un subconjunto acotado de E se sigue del hecho de que, para cada $e' \in E'$, $L(e'_o \varphi)$ está en $C^b(N^\infty)$. En consecuencia, $\dot{L}(\varphi) \in C^b(N^\infty,E)$ y por tanto $\dot{L}$ está bien definida. Es fácil ver que $\dot{L}$ es lineal e inyectiva. Que $\dot{L}$ es continua para las topologías de la convergencia uniforme se sigue del hecho de que para cada seminorma en E , p , se verifica

$$p_\infty(\dot{L}(\varphi)) \leqslant \| L \| \, p_\infty(\varphi) \quad , \quad \varphi \in C^b(X,E)$$

siendo $\| L \| = \sup \left\{ \| l(f) \| : \| f \| \leqslant 1 \right\}$. Veamos ahora que L es continua cuando $C^b(X,E)$ y $C^b(N^\infty,E)$ están equipados con la topología estricta. Si p es una seminorma continua en E y $h: N^\infty \to K$ es una función acotada que se anula en el infinito, podemos hallar (utilizando la continuidad estricta de L) un número $c > 0$ y una función $l : X \to K$, acotada y que se anula en el infinito, de forma que

$$p_h(\dot{L}(\varphi)) \leqslant c\, p_1(\varphi) \quad , \quad \varphi \in C^b(X,E)$$

lo que prueba la continuidad estricta de $\dot{L}$.

Si se razona de forma análoga a como hemos procedido hasta ahora pero partiendo de la función $\dot{F} : C^b(N^\infty,E) \to C^b(X,E)$ definida por

$$\dot{F}(\Psi)(x) = \widehat{\delta_x \circ L^{-1}(\Psi)} \quad , \quad \Psi \in C^b(N^\infty, E) \quad , \quad x \in X \ ,$$

se termina la prueba del teorema observando que $\dot{L}$ y $\dot{F}$ son funciones inversas.

Agradezco al Prof. M. Valdivia sus valiosos comentarios y sugerencias.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bessaga, C. and Pelczynski, A.: Selected topics in infinite-dimensional Topology, PWN, Warszawa 1975.

[2] Etcheberry, A.: Isomorphisms of spaces of bounded continuous functions, Studia Math. 53 (1975), 103-127.

[3] Horvath, J.: Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1966.

[4] Jarchov, H.: Locally Convex Spaces. B.G. Teubner, Stuttgart (1981).

[5] Michael, E.: Some extensions theorems for continuous functions, Pacific J. Math. 3 (1953), 789-806.

[6] Valdivia, M.: Topics in Locally Convex Spaces. Notas de Mat. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1982.

[7] Valdivia, M.: Representaciones de los espacios $\mathfrak{D}(\Omega)$ y $\mathfrak{D}'(\Omega)$, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 72, (1978), 385-414.

[8] Valdivia, M.: The space of distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$ is not B_r-complete, Math. Ann. 211 (1974), 145-149.

Departamento de Matemáticas
E.T.S.I. Industriales
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n