OPERADORES DESPLAZAMIENTO CONDICIONALMENTE ESTRICTAMENTE CICLICOS

por

LUCAS JODAR

SUMMARY

If T is an injective unilateral weighted shift operator which satisfies the conditions: $w_n \searrow 1$ and $\sum_{n\geq 0} (\beta(n))^{-2} < +\infty$, we prove that T is conditionaly strictly cyclic. A sufficient condition for T be strictly cyclic in terms of the weights $\{\omega_n\}$ is given

INTRODUCCION

En lo que sigue T denotará un operador desplazamiento unilateral ponderado e injectivo definido en un espacio de Hilbert X con base ortonormal $\{e_n\}_{n \in N}$, por la relación $Te_n = w_n e_{n+1}$, siendo $\{w_n\}_{n \in N}$ una sucesión de números estríctamente positivos. Supondremos que T está representado en la forma de un operador multiplicación por z, $T = M_z$ en el espacio de Hilbert ponderado $H^2(\beta)$ con $\beta(0) = 1$, y $\beta(n) = w_0 \ldots w_{n-1}$, para $n \geq 1$. Si la sucesión $\{w_n\}$ decrece y converge a 1, y la serie $\sum_{n\geq 0} (\beta(n))^{-2} < \infty$, el operador T no siempre es estríctamente cíclico como queda probado en [2] y [3], donde se dan ejemplos. En este trabajo daremos condiciones en términos de los pesos $\{w_n\}$, para que tales operadores sean estríctamente cíclicos.

Teorema 1. Sea $T = M_z$ en $H^2(\beta)$ y supongamos que se verifican las siguientes condiciones

$$w_{n+1} \leq w_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} w_n = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{n \geq 0} (\beta(n))^{-2} < +\infty \tag{2}$$

$$\sup_{n \in N} \left\{ \frac{\beta(2n)}{\beta(n)} \right\} < +\infty \tag{3}$$

Entonces T es estríctamente cíclico.

Demostración: Por ser $\{w_n\}$ decreciente y por la prop. 32, pág. 96, [1], T es estríctamente cíclico, si, y sólo si, verifica la condición

$$\sup_{n \in N} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\beta(n)}{\beta(k)\,\beta(n-k)} \right)^2 < \infty \tag{4}$$

Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\beta(n)}{\beta(k)\,\beta(n-k)} \right)^2$, para que se verifique (4) acotaremos independientemente las sucesiones $\{S_{2n}\}$ y $\{S_{2n+1}\}$.

Para cada $n \in N$ se verifica que

$$S_{2n} = (\beta(2n))^2 \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{\beta(k)\,\beta(2n-k)} \right)^2 = 2(\beta(2n))^2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\beta(k)\,\beta(2n-k)} \right)^2$$

y teniendo en cuenta que $w_j \geqslant 1$ para cada $j \in N$, y que $\beta(2n-k)^{-2} \leqslant \beta(n)^2$ para $k = 0, 1, \ldots, n$, se sigue que

$$S_{2n} \leqslant 2\left(\frac{\beta(2n)}{\beta(n)}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} (\beta(k))^{-2} \tag{5}$$

Análogamente para cada $n \in N$ se verifica

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= (\beta(2n+1))^2 \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{1}{\beta(k)^2\,\beta(2n+1-k)^2} \right) \leqslant \\ &\leqslant 2 \left[\frac{\beta(2n+1)}{\beta(n+1)} \right]^2 \sum_{k=0}^{n} (\beta(k))^{-2} \end{aligned} \tag{6}$$

Como $\beta(2n+2) = w_{2n+1}\beta(2n+1)$, de (6) se sigue que

$$S_{2n+1} \leqslant 2 \left[\frac{\beta(2n+2)}{\beta(n+1)} \right]^2 \left(\frac{1}{w_{2n+1}} \right)^2 \sum_{k=0}^{n} (\beta(k))^{-2} \tag{7}$$

Por (1) se verifica que existe $M > 0$ tal que $(w_{2n+1})^{-2} \leqslant M$, para todo $n \in N$. Por (3) se verifica que existe $L > 0$ tal que para todo $n \in N$

$$\frac{\beta(2n)}{\beta(n)} < L$$

De aquí y de las expresiones (2), (5) y (7), la condición (4) se satisface y con ello el resultado queda demostrado.

Corolario: Sea $T = M_z$ en $H^2(\beta)$ tal que verifique alguna de las condiciones siguientes:

(i) $\beta(n) = (n+1)^s$, $n\epsilon N$, $s > 1/2$

(ii) $\beta(n) = (n+1)^s \ln(n+2)$, $n\epsilon N$, $n \geqslant 1$, $s > 1/2$

Entonces T es estríctamente cíclico.

Demostración: En el caso (i) tenemos $w_n = (1 + \frac{1}{n+1})^s$, para $n\epsilon N$, siendo claro que T satisface la hipótesis (1) y (2) del teor. 1. Además se verifica que

$$\beta(2n)/\beta(n) = (2n+1/n+1)^s < 2^s \quad , \quad n\epsilon N$$

En el caso (ii) se tiene que $w_n = \frac{\beta(n+1)}{\beta(n)} = (1 + \frac{1}{n+1})^s \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}$, para $n \geqslant 1$. Sea la función de variable real $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+2)}$, definida en $x \geqslant 1$. Se verifica que

$$f'(x) = (\ln(x+2)/x+3 \; - \; \ln(x+3)/x+2) \; (\ln(x+2))^{-2} < 0$$

De este modo la sucesión $\{w_n\}$ verifica la condición (1) del teor. 1, además como $p = 2s > 1$, se verifica que

$$\sum_{n \geqslant 1} (\beta(n))^{-2} = \sum_{n \geqslant 1} (n+1)^{-p} (\ln(n+2))^{-2} < +\infty$$

y por tanto se verifica (2). Finalmente, tenemos que para cada $n\epsilon N$

$$\beta(2n)/\beta(n) \leqslant 2^s \frac{\ln(2n+2)}{\ln(n+2)}$$

lo que prueba (3). Del teor. 1 se concluye el resultado.

REFERENCIAS

[1] A.L. Shields, "Weighted shift operators and analytic function thoery", Topics in Operator Theory, Ed. C. Pearcy. A.M.S. Math. Surveys, Volume 13 (1974).

[2] D.A. Herrero, "Strictly Cyclic weighted shifts", Rev. Un. Mat. Argentina 28 (1976/77), nº 2, 69-74.

[3] Hector N. Salas, "A note on strictly cyclic weighted shifts", Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 83, nº 3, (1981), 555-556.