UNA REPRESENTACION DEL ESPACIO $C_0^k(\Omega, E)$

por

PABLO GALINDO (*)

SUMMARY

In this paper we give a representation of the spaces $C_0^k(\Omega,E)$ and prove that the space $C^k(I,E)$ has certains properties of complementation. Other related spaces are studied.

1. PRELIMINARES.

Con la palabra "espacio" designaremos a cualquier espacio vectorial –sobre $\mathbb{C}$– topológico, E, localmente convexo y separado. Representaremos por $\mathcal{T}$ a una familia de seminormas de E que definan su toplogía. Si E y F son dos espacios isomorfos pondremos $E \simeq F$. Si $A \subset E$, A° representa al polar absoluto de A.

Si E es un espacio, $c_o(E)$ representa, como es usual, al espacio de las sucesiones de E convergente a cero en E dotado de la topología definida por la familia de seminormas:

$$|(x_n)|_q := \sup\left\{q(x_n) : n\in\mathbb{N}\right\} \quad q\in\mathcal{T} \quad (x_n)\in c_o(E)$$

Un espacio E diremos que tiene la propiedad de complementación de Pelczynski si satisface la siguiente condición: "Si F es un espacio isomorfo a un subespacio complementado de E y a su vez, F tiene un subespacio complementado isomorfo a E, entonces $F \simeq E$".

Los siguientes resultados serán útiles a continuación: a) $c_o(E)$ tiene la propiedad de complementación de Pelczynski (2). b) Si F es un subespacio complementado de E, $c_o(F)$ también lo es de $c_o(E)$ (1). c) Sean E y F espacios, $f:E \to F$ lineal y continua. Si existe $g:F \to E$ lineal y continua tal que $g\circ f = Id_E$, entonces f es una aplicación abierta (en la imagen) y f(E) tiene complemento topológico. Además $f\circ g$ es una proyección de F (5).

(*) Este trabajo se ha realizado bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia en el Depto. de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

En adelante llamaremos "cubos" (en $\mathbb{R}^n$) a los productos cartesianos de n intervalos compactos; pondremos $I := [-1,1]^n$.

Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, E es un espacio y $f:\Omega \to E$ diremos que f es de clase C^k en Ω si existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden menor o igual que k. Si $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es un multiíndice, pondremos $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ y $H := \{\alpha : |\alpha| \leqslant k\}$.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío. En (7) Valdivia construye una partición de la unidad para Ω : Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ consideraremos los cubos de la forma

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) : a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + 1, \quad i = 1, \ldots, n, \; a_i \in Z\right\} \qquad (*)$$

ordenados en una sucesión $\{B_r\}$. Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, sea β_1 la familia de cubos de la forma (*) contenidos en Ω cuya distancia a $\mathbb{R}^n - \Omega$ es mayor o igual que $\sqrt{n}$; por recurrencia se construyen las familias β_{m+1} de cubos de la forma

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) : a_i/2^m \leqslant x_i \leqslant (a_i+1)/2^m, i = 1, \ldots, n, \; a_i \in Z\right\}$$

contenidos en Ω, cuya distancia a $\mathbb{R}^n - \Omega$ es mayor o igual que $\sqrt{n}/2^m$ y no contenidos en ningún cubo de las familias $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Ordenamos los cubos de $\bigcup_{m=1}^{\infty} \beta_m$ en una sucesión $\{B_r\}$. En cualquiera de los casos considerados para Ω, sea $B_r := \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \frac{a_i(r)}{2^{k(r)}} \leqslant x_i \leqslant \frac{a_i(r)+1}{2^{k(r)}}, i = 1, \ldots, n, a_i \in Z\right\}$.

Sean $J := [-4/15, 4/15]^n$, $L := [-4/5, 4/5]^n$ y la aplicación $g_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida según $g_r(x_1, \ldots, x_n) :=$

$$\left(\frac{2a_1(r)+1}{2^{k(r)+1}} + \frac{5}{2^{k(r)+3}} x_1, \ldots, \frac{2a_n(r)+1}{2^{k(r)+1}} + \frac{5}{2^{k(r)+3}} x_n\right);$$

denotemos por $A_r := g_r(\overset{\circ}{I})$ y observemos que $g_r(L) = B_r$. Con esto se tiene: d) Tanto $\{B_r\}$, como $\{\overset{\circ}{A}_r\}$ son recubrimientos localmente finitos de Ω. Además, a lo sumo $4^n + 1$ elementos de $\{A_r\}$ tienen intersección no vacía. Si B_r es tal que $k(r) > 0$, entonces $d(B_r, \mathbb{R}^n - \Omega) \leqslant \sqrt{n} / 2^{k(r)-2}$.

2. LOS ESPACIOS $C^k(Q,E)$

1. Definición. Si Q *es un cubo de interior no vacío,* $C^k(Q,E)$ *representa al espacio de las funciones,* $f:Q \to E$, *continuas, de clase* C^k en $\overset{\circ}{Q}$ *y tal que sus derivadas se pueden extender de manera continua a* Q *dotado de la topología definida por las seminormas*

$$\| f \|_q^Q := \sum_{\alpha \in H} \sup \left\{ q[D^\alpha f(x)] : x \in \mathring{Q} \right\} \qquad q \in \mathcal{T}$$

2. *Lema.* $C^k(Q,E)$ coincide con el espacio vectorial, S, de las funciones definidas en Q con valores en E que admiten derivadas parciales continuas —entendidas lateralmente en la frontera— hasta orden k.

Demostración. Será suficiente considerar el caso $k = 1$.

Sea $f \in C^k(Q,E)$, sea $q \in \mathcal{T}$ y $u \in q^{-1}[0,1]^\circ$. Si $x,y \in \mathring{Q}$, se tiene $\operatorname{Re} u(f(x) - f(y) - \sum_{i=1}^n D_i f(y)(x_i - y_i)) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i). \operatorname{Re} u\,(D_i f(s) - D_i f(y))$ donde $s \in [x,y] \subset \mathring{Q}$.

Por otra parte como $D_i f$ tienen prolongación continua a Q, $\widetilde{D_i} f$, son uniformemente continuas en Q, luego para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $s,t \in \mathring{Q}$ con con $d(s,t) < \delta$, entonces $q[D_i f(s) - D_i f(t)] < \epsilon/2$. Por tanto, volviendo a la igualdad anterior con $d(x,y) < \delta$ se tendrá

$$\left| \operatorname{Re} u(f(x) - f(y) - \sum_{i=1}^n D_i f(y)(x_i - y_i)) \right| < \epsilon/2 \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{y}$$

por tanto

$$q[f(x) - f(y) - \sum_{i=1}^n D_i f(y)(x_i - y_i)] \leqslant \epsilon \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Sea $x_o \in Q$; si $x,y \in B(x_o, \delta/2) \cap \mathring{Q}$, la anterior desigualdad se satisface, luego por ser $B(x_o, \delta/2) \cap \mathring{Q}$ denso en $B(x_o, \delta/2) \cap Q$ y $\widetilde{D_i} f$ continuas, si $x,y \in B(x_o, \delta/2) \cap Q$ se tendrá

$$q[f(x) - f(y) - \sum_{i=1}^n \widetilde{D_i} f(y)(x_i - y_i)] \leqslant \epsilon \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Tomando $x = x_o + h \cdot e_i$ ($e_i := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$), $y = x_o$, resulta que f tiene derivada —lateral en la frontera— y coincide con $\widetilde{D_i} f$. Así, $f \in S$ y se tiene $C^k(Q,E) \subset S$; la otra inclusión es obvia.

Recordemos que si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}^k(K,E)$ es el espacio —definido por Schwartz (6)— de las funciones de clase C^k en $\mathbb{R}^n$ con valores en E de soporte contenido en K y dotado de la topología definida por las seminormas $\| \cdot \|_q^K$, análogas a las de 1. La siguiente proposición utiliza el lema anterior y se obtiene con los métodos de Valdivia para el caso escalar (7. pág. 447); lo mismo sucede con el corolario. (Una prueba detallada de estos resultados se da en (4)).

3. Proposición. Sean Q,Q' *cubos en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $Q \subset \mathring{Q}'$, *entonces existe un operador lineal de extensión,* V, *de* $C^k(Q,E)$ *en* $\mathcal{D}^k(Q',E)$ *de manera que para cada* $q \in \mathcal{T}$, *existe una constante* C_q *tal que*

$$\| Vf \|_q^{Q'} \leqslant C_q \cdot \| f \|_q^Q \qquad f \in C^k(Q,E) .$$

No es difícil comprobar que $C^k(Q,E) \simeq C^k(I,E)$ y que $\mathcal{D}^k(Q,E) \simeq \mathcal{D}^k(I,E)$ usando una aplicación afín de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo que transforme a Q en I.

5. Corolario. $C^k(I,E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{D}^k(I,E)$. También $\mathcal{D}^k(I,E)$ lo es a uno de $C^k(I,E)$.

3. LOS ESPACIOS $C_0^k(\Omega,E)$.

6. Definición. Sea Ω *un abierto no vacío de* $\mathbb{R}^n$, *llamaremos* $C_0^k(\Omega,E)$ *al subespacio de* $C^k(\Omega,E)$ *formado por las funciones tales que ellas y sus derivadas se "anulan en la frontera de* Ω*", es decir, dados* $\alpha \in H$, $q \in \mathcal{T}$ *y* $\epsilon > 0$, *existe un compacto* K *de* Ω *tal que si* $x \in \Omega - K$, $q[D^\alpha f(x)] < \epsilon$.

De esta definición se deduce que tanto f, como sus derivadas son acotadas en Ω por lo que existe

$$\| f \|_q := \sum_{\alpha \in H} \sup \left\{ q[D^\alpha f(x)] : x \in \Omega \right\} \qquad q \in \mathcal{T}$$

Entonces, la familia $\{\| \cdot \|_q : q \in \mathcal{T}\}$ define una topología localmente convexa separada que será la habitual en $C_0^k(\Omega,E)$.

Cada función de $C_0^k(\Omega,E)$ se puede extender a $\mathbb{R}^n - \Omega$ definiéndola como cero; la función prolongada resulta de clase C^k en $\mathbb{R}^n$ y así las consideraremos en lo sucesivo. Una demostración de este hecho se puede encontrar en (4), otra diferente se puede obtener de manera análoga a la ofrecida en (3) para funciones de clase infinito.

Dado el abierto Ω, sean $\{B_r : r \in \mathbb{N}\}$ y $\{A_r : r \in \mathbb{N}\}$ las familias de cubos anteriormente indicadas. Pongamos $G := \{ (f_r)_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^k(I,E) : \lim_{r\to\infty} 2^{k(r)k} \cdot \| f_r \|_q^I = 0 \quad \forall q \in \mathcal{T} \}$ al que dotaremos de la topología definida por las seminormas

$$||| (f_r) |||_q := \sup \left\{ 2^{k(r)k} \cdot \| f_r \|_q^I : r \in \mathbb{N} \right\} \qquad q \in \mathcal{T}$$

Es inmediato comprobar que $S : c_0(\mathcal{D}^k(I,E)) \to G$ definida como $S[(f_r)] := (f_n/2^{k(n)k})$ es un isomorfismo.

Sean $(g_r)_{r \in \mathbb{N}}$ las funciones indicadas en los preliminares para Ω.

7. Proposición. Si $(f_r) \in G$ *y ponemos* $T[(f_r)] := \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ g_r^{-1}$, *entonces* $T[(f_r)] \in C_0^k(\Omega,E)$ *y la aplicación* $T: G \to C_0^k(\Omega,E)$ *así definida es lineal y continua.*

Demostración. Como (A_r) es localmente finita en Ω, $T[(f_r)]$ es de clase C^k en Ω y si $\alpha \in H$ y $x \in \Omega$, $D^\alpha T[(f_r)](x) = \sum_{r\in\mathbb{N}} D^\alpha (f_r \circ g_r^{-1})(x)$.

Sean $q \in \mathcal{T}$ y $\epsilon > 0$, existe $p_o \in \mathbb{N}$ tal que si $r > p_o$, entonces $2^{k(r)k} \| f_r \|_q^I < \epsilon / (4^n + 1)(8/5)^{|\alpha|}$. Elijamos, ahora, un compacto K de Ω que incluya a $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{p_o}$ y sea $x \in \Omega - K$; como en $D^\alpha T[(f_r)](x)$ interesan los sumandos tales que $x \in \mathring{A}_r$ –los demás son nulos– y de éstos hay a lo sumo $4^n + 1$, resultará $D^\alpha T[(f_r)](x) = \sum_{i=1}^{j} D^\alpha (f_{r_i} \circ g_{r_i}^{-1})(x)$ con $j \leqslant 4^n + 1$ y $r_i > p_o$ luego $q[D^\alpha T[(f_r)]](x) \leqslant \sum_{1\ i\ j} q[D^\alpha f_{r_i}(g_{r_i}^{-1}(x))] 2^{k(r_i)|\alpha|} (8/5)^{|\alpha|}$ $\leqslant (4^n + 1) 2^{k(r_i)k} \| f_{r_i} \|_q^I (8/5)^{|\alpha|} \leqslant \epsilon$. Por tanto, $T[(f_r)] \in C_0^k(\Omega,E)$.

Una desigualdad análoga a la penúltima de las obtenidas es válida para todo x de Ω, de lo que se deduce que $\| T[(f_r)] \|_q \leqslant \sum_{\alpha\in H} (4^n + 1)(8/5)^k \||| (f_r) \|||_q$ y por ello, T, que es lineal, es continua.

*8. **Lema.*** Sea $f \in C_0^k(\Omega,E)$, $\alpha \in H$, $q \in \mathcal{T}$; si designamos por $a_r := \sup \{ q[D^\alpha (f \circ g_r)(x)] : x \in I \} \cdot 2^{k(r)k}$, se tiene $\lim_{r\to\infty} a_r = 0$. (8.1)

Además existe una constante, C^α, independiente de f, tal que $a_r \leqslant C^\alpha \| f \|_q$ (8.2).

Demostración. $D^\alpha (f \circ g_r)(x) = (5/8)^{|\alpha|} 2^{-k(r)|\alpha|} \cdot D^\alpha f(g_r(x))$, luego $a_r = (5/8)^{|\alpha|} 2^{k(r)(k - |\alpha|)} \sup \{ q[D^\alpha f(t)] : t \in A_r \}$.

Vamos a probar en primer lugar el lema para el caso $\Omega \neq \mathbb{R}^n$: Sea $h := k - |\alpha|$, si $\beta \in H$ con $|\beta| = h$ y $\epsilon > 0$, existe un compacto L de Ω tal que $q[D^\beta (D^\alpha f)(z)] \leqslant \frac{h!}{2} (16n)^{-h} (8/5)^{|\alpha|} \cdot \epsilon$ si $z \in \Omega - L$. Sea $d := d(L, \mathbb{R}^n - \Omega)$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{n} / 2^{p-4} < d$. Elijamos un compacto P de Ω con $L \subset P$ de manera que si $z \in \Omega - P$, entonces $q[D^\alpha f(z)] < \epsilon (8/5)^{|\alpha|} / 2^{h \cdot p}$.

Como $\{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$ es localmente finita, existirá $p' \in \mathbb{N}$ para el cual si $n > p'$, $A_n \cap P = \emptyset$. Si $r > p'$, puede suceder que $k(r) \leqslant p$ o que $k(r) > p$; analizaremos los dos casos separadamente.

i) $k(r) \leqslant p$

Como $A_r \cap P = \emptyset$, $a_r \leqslant 2^{h(k(r)-p)} \cdot \epsilon < \epsilon$, desigualdad útil para 8.1.

ii) $k(r) > p$

(El mismo razonamiento es válido para la prueba de 8.2 si $k(r) > 0$). Como $k(r) > 0$, aplicando d) resulta $d(B_r, \mathbb{R}^n - \Omega) \leq \sqrt{n}/2^{k(r)-2}$, luego existirá $x_o \in \mathbb{R}^n - \Omega$ tal que $d(x_o, B_r) \leq \sqrt{n}/2^{k(r)-3}$; entonces si $t \in A_r$, tendremos $d(x_o,t) \leq d(x_o,B_r) + \operatorname{diam}(B_r) + d(B_r,t) \leq \sqrt{n}/2^{k(r)-3} + \sqrt{n}/2^{k(r)} + 1/2^{k(r)+3} + \sqrt{n}/2^{k(r)-4} \leq \sqrt{n}/2^{p-4} < d$. De esta última desigualdad se deduce que el segmento $[x_o,t]$ no corta a L.

Sea $u \in q^{-1}[0,1]^\circ$ y efectuemos el desarrollo de Taylor de $\operatorname{Re} u \circ D^\alpha f$ en x_o: existirá $s \in [x_o,t]$ tal que

$$\operatorname{Re} u \circ D^\alpha f(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_h=1}^{n} \operatorname{Re} u \frac{\partial^h}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_h}} D^\alpha f(s) \cdot (t_{i_1} - x_o^{i_1}) \ldots (t_{i_h} - x_o^{i_h}) \frac{1}{h!}$$

pues los demás sumandos se anulan por ser $x_o \notin \Omega$. Notemos que

$$\sum_{i_1,\ldots,i_h=1}^{n} |t_{i_1} - x_o^{i_1}| \ldots |t_{i_h} - x_o^{i_h}| \leq [d(t,x_o) \cdot \sqrt{n}]^h$$

y teniendo en cuenta las observaciones anteriores resulta

$$|\operatorname{Re} u \circ D^\alpha f(t)| \leq \begin{cases} \| f \|_q \cdot [d(t,x_o) \cdot \sqrt{n}]^h \cdot 1/h! & 8.2 \\ (1/2)(16n)^{-h}(8/5)^{|\alpha|} \cdot \epsilon \cdot [d(t,x_o) \cdot \sqrt{n}]^h & 8.1 \end{cases}$$

y por la desigualdad relativa a $d(t,x_o)$, obtendremos

$$q[D^\alpha f(t)] \leq \begin{cases} 2 \cdot \| f \|_q \cdot n^h/2^{(k(r)-4)h} \cdot h! & 8.2 \\ (16n)^{-h}(8/5)^{|\alpha|} \cdot \epsilon \cdot n^h/2^{(k(r)-4)h} & 8.1 \end{cases}$$

con lo que

$$a_r \leq \begin{cases} 2(5/8)^{|\alpha|} \cdot n^h \cdot 2^{4h} \cdot (\frac{1}{h!}) \cdot \| f \|_q & 8.2 \\ \epsilon & 8.1 \end{cases}$$

Hemos probado ya que $\{a_r\}$ converge a cero. Para demostrar 8.2 nos queda considerar al caso $k(r) = o$, pero entonces $a_r \leq (5/8)^{|\alpha|} \| f \|_q$ luego podemos tomar $C^\alpha := \max \{ (5/8)^{|\alpha|}, 2(5/8)^{|\alpha|}(2^4 n)^h / h! \}$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $C^\alpha := (5/8)^{|\alpha|}$ resuelve 8.2; además, sea $\epsilon > 0$ y P un compacto tal que si $t \in P$, $q[D^\alpha f(t)] < \epsilon$, también existe $p \in \mathbb{N}$ tal que si $r > p$, $A_r \cap P = \emptyset$ de lo que se deduce que $a_r \leq (5/8)^{|\alpha|} \cdot \epsilon$. c.q.d.

Sea h: $\mathbb{R}^n \to [0,1]$ de clase C^∞ con sop h = I tal que $h(x) > 0$ si $x \in \mathring{I}$ y $h(x) = 1$ si $x \in L$. *Si* $f \in C_0^k(\Omega,E)$, *pondremos* $Wf := \{(f\circ g_r)h : r \in \mathbb{N}\}$.

*9. **Proposición.** Si* $f \in C_0^k(\Omega,E)$, *entonces* $Wf \in G$ *y la aplicación* $W: C_0^k(\Omega,E) \to G$ *es lineal y continua.*

Demostración. Aplicando la regla de Leibnitz, $D^\alpha[(f\circ g_r)h](x) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} A_{\alpha\beta}\, D^\beta(f\circ g_r)(x) \cdot D^{\alpha-\beta}h(x)$ donde $A_{\alpha\beta}$ son constantes independientes de las funciones. Por lo tanto,

$$\sup\left\{ q[D^\alpha[(f\circ g_r)h](x)] : x \in I\right\} \leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha} A_{\alpha\beta} \sup\left\{ q[D^\beta(f\circ g_r)(x)] : x \in I\right\} .$$

$$\sup\left\{ |D^{\alpha-\beta}h(x)| : x \in I\right\} \leqslant \| h \| \sum_{\beta\leqslant\alpha} A_{\alpha\beta} \sup\left\{ q[D^\beta(f\circ g_r)(x)] : x \in I\right\},$$

luego $2^{k(r)k} \cdot \sup\ q[D^\alpha[(f\circ g_r)h](x)] : x \in I \leqslant$

$\| h \| \cdot \sum_{\beta\leqslant\alpha} A_{\alpha\beta} 2^{k(r)k} \cdot \sup\left\{ q[D^\beta(f\circ g_r)] : x \in I\right\}$ y como según 8.1 cada uno de los sumandos tiende a cero cuando $r \to \infty$, tendremos que $\lim 2^{k(r)k} \cdot \| (f\circ g_r) h \|_q = 0$. Además por 8.2

$$|||\, Wf\, |||_q = \sup\left\{ 2^{k(r)k} \cdot \sum_{\alpha\in H} \sup\left\{ q[D^\alpha[(f\cdot g_r)h](x)] : x \in I\right\} : r \in \mathbb{N}\right\} \leqslant$$

$$\sup\left\{ \| f \|_q \cdot \| h \| \cdot \sum_{\alpha\in H}\sum_{\beta\leqslant\alpha} A_{\alpha\beta} \cdot C^\beta : r \in \mathbb{N}\right\} = \| f \|_q \cdot \| h \| \left\{ \sum_{\alpha\in H}\sum_{\beta\leqslant\alpha} A_{\alpha\beta} \cdot C^\beta\right\}$$

luego W es continua.

*10. **Lema.*** Si $f \in C_0^k(\Omega,E)$ y $\alpha \in H$, entonces $f\cdot D^\alpha(\sum_{j=1} h\circ g_j^{-1}) \in C_0^0(\Omega,E)$.

Demostración. Sea $q \in \mathcal{T}$ y $\epsilon > 0$, de 8.1 se deduce la existencia de $p \in \mathbb{N}$ tal que si $j > p$, $2^{k(r)k} \cdot \sup\{ q[(f\circ g_j)(t)] : t \in I\} \leqslant \epsilon \cdot (5/8)^{|\alpha|}/(4^n + 1) \cdot \| h \|$. Sea K un compacto de Ω que contenga a $A_1 \cup \ldots \cup A_p$; si $x \in \Omega - K$ y teniendo en cuenta d), resultará

$$q[f(x)\cdot D^\alpha(\sum_{j=1}^\infty h\circ g_j^{-1})(x)] \leqslant \sum_{j=1}^\infty q[f(x)]\, |D^\alpha h(g_j^{-1}(x))|\, 2^{k(j)|\alpha|} (8/5)^{|\alpha|} \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^\infty q[(f\circ g_j)(g_j^{-1}(x))] \cdot \| h \|\, 2^{k(j)k} (8/5)^{|\alpha|} \leqslant \epsilon$$

ya que los sumandos no necesariamente nulos son aquéllos en los que $x \in \mathring{A}_j$ –de los que a lo sumo hay $4^n + 1$– y entonces $j > p$.

11. Lema. Sea $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq m$ y sea $f \in C_o^m(\Omega,E)$, entonces $f \cdot D^\alpha(\sum_{j=1}^{\infty} h \circ g_j^{-1}) \in C_o^{m-|\alpha|}(\Omega,E)$. Si $U_\alpha(f) := f \cdot D^\alpha(\sum_{j=1}^{\infty} h \circ g_j^{-1})$, U_α es una aplicación lineal y continua de $C_o^m(\Omega,E)$ en $C_o^{m-|\alpha|}(\Omega,E)$.

Demostración. Si $\beta \in \mathbb{N}^n$ con $|\beta| \leq m - |\alpha|$ y $\gamma \leq \beta$, aplicando 10 resulta que $D^\gamma f \cdot D^{\alpha+\beta-\gamma}(\sum_{j=1} h \circ g_j^{-1}) \in C_o^o(\Omega,E)$, luego aplicando la regla de Leibnitz, se prueba que $U_\alpha(f) \in C_o^{m-|\alpha|}(\Omega,E)$.

Si $x \in \Omega$, sean j_i, $i = 1, \ldots, s$, $s \leq 4^n + 1$, los índices de los cubos de $\{A_j\}$ tales que $x \in \mathring{A}_j$; llamemos $t_i := g_{j_i}^{-1}(x)$, $t_i \in \mathring{I}$.

$$D^\beta[U_\alpha(f)](x) = \sum_{\gamma \in \beta} A_{\beta\gamma} D^\gamma f(x) \cdot \sum_{i=1}^{s} D^{\alpha+\beta-\gamma}(h \circ g_{j_i}^{-1})(x) =$$

$$\sum_{\gamma \leq \beta} A_{\beta\gamma} D^\gamma f(x) \cdot \sum_{i=1}^{s} D^{\alpha+\beta-\gamma} h(t_i) \cdot [2^{k(j_i)}(8/5)]^{|\alpha+\beta-\gamma|} =$$

$\sum_{\gamma \leq \beta} A_{\beta\gamma} \sum_{i=1}^{s} D^{\alpha+\beta-\gamma} h(t_i)[2^{k(j_i)}(8/5)]^{|\alpha+\beta|} D^\gamma(f \circ g_{j_i})(t_i)$, luego si $q \in \mathcal{T}$, tendremos $q[D^\beta U_\alpha(f)(x)] \leq \sum_{\gamma \leq \beta} A_{\beta\gamma} \cdot \|h\| \cdot (8/5)^m \cdot (4^n + 1) \cdot C_m^\gamma \cdot \|f\|_q$.

Llamando $L^{m-|\alpha|} := \sum_{\beta\ m-|\alpha|} \sum_{\gamma\ \beta} A_{\beta\gamma} \cdot \|h\| \cdot (8/5)^m (4^n + 1) C_m^\gamma$, resulta $\|U_\alpha(f)\|_q \leq L^{m-|\alpha|} \cdot \|f\|_q$.

12. Proposición. Si $f \in C_o^k(\Omega,E)$ *y ponemos* $W_1(f) := f / \sum_{j=1}^{\infty} h \circ g_j^{-1}$, $W_1(f) \in C_o^k(\Omega,E)$ *y* W_1 *es una aplicación lineal y continua de* $C_o^k(\Omega,E)$ *en sí mismo.*

Demostración. Representemos por $s(x) := \sum_{j=1}^{\infty} h \circ g_j^{-1}(x)$. Si $x \in \Omega$, existe $-$ d) $-$ $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{j_o}$, luego $s(x) \geq h \circ g_{j_o}^{-1}(x) = 1$. Así, f/s tiene sentido.

Sea $\lambda \in H$, entonces $D^\lambda(\frac{f}{s})(x) = \sum_{\beta \leq \lambda} A_{\lambda\beta} D^{\lambda-\beta} f(x) D^\beta(\frac{1}{s})(x)$ y $D^\beta(\frac{1}{s})(x) = \sum_i B_i^\beta D^\mu s(x) \cdot D^\nu s(x) \ldots D^\omega s(x) / s(x)^{p_i}$, donde $p_i \in \mathbb{N}$, B_i^β son constantes que aparecen al derivar y en cada sumando, $\mu + \nu + \ldots + \omega = \beta$. Aplicando reiteradamente el lema anterior, se deduce que dados $q \in \mathcal{T}$ y $\epsilon > 0$ existe un compacto K de Ω, de modo que si $x \in \Omega - K$, $q[(D^{\lambda-\beta} f \cdot D^\mu s \cdot D^\nu s \ldots D^\omega s)(x)] < \epsilon$, luego $q[(D^{\lambda-\beta} f \cdot D^\mu s \cdot D^\nu s \ldots D^\omega s / s^{p_i})(x)] < \epsilon$ y por lo tanto, $D^\lambda(f/s) \in C_o^o(\Omega,E)$ es decir, $f/s \in C_o^k(\Omega,E)$. También de 11 se deduce la existencia de unas constantes,

L'^λ, tales que $\|D^{\lambda-\beta}f\cdot D^\mu s\cdot D^\mu s\cdot D^\nu s. \ . \ .D^\omega s\|_q \leqslant \|f\|_q\cdot L'^\lambda$. Con ello, $\|W_1(f)\|_q \leqslant \sum_{\lambda\in H} \sup\Big\{ \sum_{\beta\leqslant\lambda}\sum_i A_{\lambda\beta}\cdot B_i^\beta\cdot q[(D^{\lambda-\beta}f\cdot D^\mu s\cdot D^\nu s. \ .D^\omega s/s^{p_i})(x)]:$ $x\in\Omega\Big\} \leqslant \sum_{\lambda\in H}\sum_{\beta\leqslant\lambda}\sum_i A_{\lambda\beta}\cdot B_i^\beta\cdot L'^\lambda\cdot\|f\|_q$ lo que prueba la continuidad de W_1 ya que es lineal.

13. Teorema. $C_0^k(\Omega,E)$ *es isomorfo a un subespacio complementado de* $c_0(\mathfrak{D}^k(I,E))$.

Demostración. Si W y W_1 son las aplicaciones de 9 y 12, $W\circ W_1$ es lineal y continua de $C_0^k(\Omega,E)$ en G. $W\circ W_1(f)=\left\{(\frac{f}{s}\circ g_r)h: r\in\mathbb{N}\right\}$. Si T es la aplicación de 7, tendremos

$$[T\circ(W\circ W_1)](f)(x) = \sum_{r\in\mathbb{N}} (\frac{f}{s}\circ g_r)h\circ g_r^{-1}(x) = \sum_{r\in\mathbb{N}} (\frac{f}{s}\circ g_r)(g_r^{-1}(x))h(g_r^{-1}(x)) =$$

$\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{f(x)}{s(x)}\cdot h\circ g_r^{-1}(x) = f(x)$. Entonces aplicando c) y teniendo presente que $G\simeq c_0(\mathfrak{D}^k(I,E))$ se obtiene 13.

El próximo objetivo es demostrar que $C_0^k(\Omega,E)$ tiene un subespacio complementado isomorfo a $c_0(\mathfrak{D}^k(I,E))$. Pongamos M: $=\left\{(f_r)_{r\in\mathbb{N}}\subset C^k(J,E): \lim 2^{k(r)k}\|f_r\|_q^J=0 \ \forall q\in\mathcal{T}\right\}$, dotado con la topología dada por las seminormas $|||(f_r)_{r\in\mathbb{N}}|||_q:=\sup\left\{2^{k(r)k}\cdot\|f_r\|_q^J: r\in\mathbb{N}\right\}$.

Tal como hemos hecho con G, se prueba que $M\simeq c_0(C^k(J,E))$. Sea U un operador lineal de extensión continuo de $C^k(J,E)$ en $\mathfrak{D}^k(L,E)$.

14. Lema. $X:M\to G$ definida por $X[(f_r)]:=U(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ está bien definida, es lineal y continua.

Omitimos la demostración de este lema por su sencillez.

15. Proposición. $C_0^k(\Omega,E)$ *tiene un subespacio complementado isomorfo a* $c_0(\mathfrak{D}^k(I,E))$.

Demostración. Sea $Y:G\to M$ definida por $Y[(u_r)]:=(u_r|_J)_{r\in\mathbb{N}}$, obviamente es lineal y continua. Si W es la aplicación de 9, $Y\circ W$ es lineal y continua de $C_0^k(\Omega,E)$ en M. También $T\circ X:M\to C_0^k(\Omega,E)$ es lineal y continua. Además por construcción si $r\neq j$, $\mathring{B}_r\cap\mathring{B}_j=\emptyset$, luego si $x\in J$, $g_j(x)\in\mathring{B}_j$ y $g_j(x)\notin\mathring{B}_r$ por lo tanto, $(Y\circ W)\circ(T\circ X)[(f_r)]=\left\{[\sum_{r\in\mathbb{N}} U(f_r)\circ g_r^{-1}]\circ g_j|_J : j\in\mathbb{N}\right\}=\left\{f_j: j\in\mathbb{N}\right\}$, es decir $(Y\circ W)\circ(T\circ X)=Id_M$. Si ahora aplicamos b), 5 y c) resulta la proposición.

16. Corolario. $C^k_o(\Omega,E) \simeq c_o(\mathfrak{D}^k(I,E))$.

Demostración. Aplicar a) teniendo en cuenta 15 y 13.

Si K es un compacto con interior no vacío, se pueden identificar $\mathfrak{D}^k(K,E)$ y $C^k_o(\mathring{K},E)$ tanto algebraica, como topológicamente.

17. Teorema. $C^k_o(\Omega,E) \simeq \mathfrak{D}^k(I,E) \simeq C^k(I,E)$ *y si* K *es un compacto de interior no vacío,* $\mathfrak{D}^k(K,E) \simeq C^k(I,E)$. $C^k(I,E)$ *tiene la propiedad de complementación de Pelczynski.*

Demostración. En vista de la observación anterior, $\mathfrak{D}^k(I,E) \simeq C^k_o(\mathring{I},E) \simeq c_o(\mathfrak{D}^k(I,E))$ de lo que se infiere que $\mathfrak{D}^k(I,E)$ tiene la propiedad de complementación y usando 5, se obtiene el teorema.

18. Proposición. Si $p \in \mathbb{N}$, $[C^k(I,E)]^p$ y$[\mathfrak{D}^k(I,E)]^p$ *son isomorfos a* $C^k(I,E)$ y $\mathfrak{D}^k(I,E)$.

Demostración. Basta hacerla para $p = 2$ y después actuar por inducción. Sean Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2 cubos de interior no vacío contenidos en $\mathring{I}$ y tales que $Q'_1 \subset \mathring{Q}_1$, $Q'_2 \subset \mathring{Q}_2$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$; sean $T_1 : C^k(Q'_1,E) \to \mathfrak{D}^k(Q_1,E)$ y $T_2 : C^k(Q'_2,E) \to {}^k(Q_2,E)$ operadores de extensión lineales y continuos. Construyamos $A : C^k(Q'_1,E) \times C^k(Q'_2,E) \to \mathfrak{D}^k(I,E)$ según $A(f,g) := T_1 f + T_2 g$, A es lineal y continua.

Si $B : \mathfrak{D}^k(I,E) \to C^k(Q'_1,E) \times C^k(Q'_2,E)$ está definida según $B(h) := (h|_{Q'_1}, h|_{Q'_2})$, también B es lineal y continua. Como $[B \circ A](f,g) = (f,g)$, utilizando c) se obtiene que $[C^k(I,E)]^2$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathfrak{D}^k(I,E)$ y por 17, también a uno de $C^k(I,E)$; desde luego, $C^k(I,E)$ es un subespacio complementado de $[C^k(I,E)]^2$ y como tiene la propiedad de complementación, se concluye lo deseado.

Si $\mathcal{A}$ es un espacio de funciones aparecido anteriormente y F es un cerrado del dominio de las funciones, $\mathcal{A}_F$ representa al subespacio de $\mathcal{A}$ formado por las funciones tales que ellas y sus derivadas se anulan en los puntos de F; $\mathcal{A}_F$ tendrá la topología inducida por $\mathcal{A}$.

20. Proposición. Si $\Omega - F \neq \emptyset$, *entonces* $C^k_{oF}(\Omega,E) \simeq C^k(I,E)$. *Si* K *es un compacto y* $\mathring{K} - F \neq \emptyset$, *entonces* $\mathfrak{D}^k_F(K,E) \simeq C^k(I,E)$. *Si* Q *es un cubo y* $Q - F \neq \emptyset$, *entonces* $C^k_F(Q,E) \simeq C^k(I,E)$.

Demostración. Notemos que $C^k_{o,F}(\Omega,E) = C^k_o(\Omega - F,E)$ y que $\mathfrak{D}^k_F(K,E) = C^k_o(\mathring{K} - F,E)$. Para probar la tercera afirmación, comencemos eligiendo un cubo Q' tal que $Q \subset \mathring{Q}'$ y sea U un operador de extensión lineal y continuo de $C^k(Q,E)$ en $\mathfrak{D}^k(Q',E)$; además, si $f \in C^k_F(Q,E)$, también $U(f) \in \mathfrak{D}^k_F(Q',E)$, luego $U:C^k_F(Q,E) \rightarrow \mathfrak{D}^k_F(Q',E)$. Si $R:\mathfrak{D}^k_F(Q',E) \rightarrow C^k_F(Q,E)$ está definida por $R(g):= g_{|Q}$, R es lineal y continua y $R \circ U = Id$ luego por aplicación de c), $C^k_F(Q,E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $C^k(I,E)$.

Por otro lado, existen cubos Q'', Q''' de interior no vacío contenidos en $\mathring{Q} - F$, $Q'' \subset \mathring{Q}'''$; si U' es un operador de extensión lineal y continuo de $C^k(Q'',E)$ en $^k(Q''',E)$, $U':C^k(Q'',E) \rightarrow C^k_F(Q,E)$ y razonando como arriba, $C^k(Q'',E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $C^k_F(Q,E)$. Teniendo en cuenta que $C^k(I,E)$ tiene la propiedad de complementación, se demuestra la proposición.

17 ha sido probado por Valdivia en (7) para funciones escalares; en (1) Bonet prueba 16 para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$.

BIBLIOGRAFIA

(1) Bonet, J.: Representaciones de espacios de funciones con valores vectoriales. Tesis doctoral. Valencia. (1980).

(2) Bonet, J.: Representaciones de los espacios $O_M(E)$ y $\mathcal{D}_{L^p}(E)$. Collect. Mat. 33-1 (1982). 23-40.

(3) Bonet, J. y Maestre, M.: Representaciones de los espacios $B_0(\Omega,E)$ y $B_1(\Omega,E)$. Rev. Real Acad. Ciencias Ex., Fís. y Nat. Madrid. 77-1 (1983). 141-159.

(4) Galindo, P.: Espacios de funciones de clase C^k con valores vectoriales. Tesis doctoral. Valencia. (1983).

(5) Horvath, J.: Topological vector spaces and distributions. Addison-Wesley Publ. Co. Reading Massachusetts. (1966).

(6) Schwartz, L.: Espaces de fonctions differentiables à valeurs vectorielles. J. Analyse Math. 4, (1954-55). 88-148.

(7) Valdivia, M.: Topics in locally convex spaces. Math. Studies 67. North-Holland. (1982).