ESTABILIDAD DE LA CONVERGENCIA DEBIL DE MEDIDAS

por

J. FERNANDEZ NOVOA Y P. JIMENEZ GUERRA

INTRODUCCION

La estabilidad de la convergencia simple y de la convergencia simple sobre cada $H \in \mathcal{H}$ frente a la medida imagen , al producto tensorial de medidas y al producto por funciones se ha estudiado en (5) y (7) para medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) sobre un espacio topológico arbitrario.

Por otra parte, en (6) se estudia la estabilidad de los dos tipos de convergencia anteriores frente al límite proyectivo de medidas de Radon (no necesariamente localmente finitas) sobre espacios topológicos (no necesariamente separados).

En (2) y (12) se estudia la estabilidad de la convergencia débil de sucesiones de medidas de probabilidad en espacios métricos separables, frente a la medida imagen.

En este trabajo se introduce un nuevo tipo de convergencia, la convergencia débil sobre cada $H \in \mathcal{H}$, para medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) sobre un espacio topológico arbitrario y se estudian sus relaciones con la convergencia simple, la simple sobre cada $H \in \mathcal{H}$ y la convergencia débil. Se estudia también la estabilidad de la convergencia débil y de la débil sobre cada $H \in \mathcal{H}$ frente a la medida imagen, al producto por funciones, al producto tensorial y al límite proyectivo de medidas.

A lo largo del trabajo, E designará un espacio topológico no necesariamente separado, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{B}$ las clases de los abiertos y de los conjuntos de Borel de E respectivamente, $\mathcal{H}$ una familia filtrante ($\subset$) de conjuntos cerrados en E y $M(E,\mathcal{H})$ el conjunto de las medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) sobre E. En lo relativo a la teoría general de las medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) nos remitiremos a (10) mientras que las definiciones de los distintos tipos de convergencia, en el espacio $M(E,\mathcal{H})$, no explicitadas en este trabajo, pueden verse, por ejemplo, en (7).

El método de introducción de las convergencias simple y débil sobre cada $H \in \mathcal{H}$ puede extenderse al caso de medidas regulares más generales que las medidas de Radon y, para estas medidas, puede hacerse un estudio similar al realizado en (5), (7) y en este trabajo.

1. CONVERGENCIA DEBIL DE MEDIDAS.

*1. **Definición:*** Sean $(\mu_i)_{i\in I}$ una red en $M(E,\mathcal{H})$ y $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. Se dice que la red $(\mu_i)_{i\in I}$ es *débilmente convergente sobre cada* $H \in \mathcal{H}$ a μ o, de manera más breve, $\omega(\mathcal{H})$-*convergente* a μ, cuando

$$\mu(G \cap H) \leqslant \liminf \mu_i (G \cap H)$$

para todo abierto $G \subset E$ y todo $H \in \mathcal{H}$.

Es evidente que la convergencia simple implica la convergencia simple sobre $H \in \mathcal{H}$ y que ésta implica la convergencia débil sobre cada $H \in \mathcal{H}$. Más adelante veremos algunos casos en los que también se dan las implicaciones en sentido contrario.

*2. **Proposición:** Sean* $(\mu_i)_{i\in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ *y* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. *Entonces son equivalentes:*

2.1. *La red* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ.

2.2. *Para cada* $H \in \mathcal{H}$ *se tiene*

$$\mu(H) \leqslant \liminf \mu_i(H).$$

2.3. *Para cada conjunto* μ*-medible* $X \subset E$ *se verifica*

$$\mu^{\cdot}(X) \leqslant \liminf \mu_i^{\cdot}(H).$$

Demostración: Del teorema 74 de (10) resulta que

$$\begin{aligned} \mu(H) &= \sup \left\{ \mu(G \cap H) : G \in \mathcal{G} \right\} \\ &\leqslant \sup \left\{ \liminf \mu_i(G \cap H) : G \in \mathcal{G} \right\} \\ &\leqslant \liminf \mu_i(H) \end{aligned}$$

luego 2.1 implica 2.2.

Por el teorema 75 de (10), para cada conjunto $\mu^{\cdot}$-medible $X \subset E$ se verifica

$$\begin{aligned}\mu^{\cdot}(X) &= \sup \left\{ \mu(H) : X \supset H \in \mathcal{H} \right\} \\ &\leqslant \sup \left\{ \liminf \mu_i(H) : X \supset H \in \mathcal{H} \right\} \\ &\leqslant \liminf \mu_i(X)\end{aligned}$$

y, por tanto, 2.2 implica 2.3.

Finalmente, para cada abierto $G \subset E$ y cada $H \in \mathcal{H}$, el conjunto $G \cap H$ es de Borel y, por consiguiente, μ-medible, luego 2.3 implica 2.1.

*3. **Proposición:** Sean* $(\mu_i)_{i\in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ *y* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$*. Se verifican las siguientes propiedades:*

3.1. *Si* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ*, entonces* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es débilmente convergente a* μ *si y sólo si*

$$\limsup \mu_i(E) \leqslant \mu(E).$$

3.2. *Si todo* $H \in \mathcal{H}$ *es* μ*-Riemann integrable* ([1]), *entonces* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ *si y sólo si para cada abierto* $G \subset E$ *de medida* $\mu(G) < +\infty$*, se verifica*

$$\mu(G) \leqslant \liminf \mu_i(G).$$

3.3. *Si* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es débilmente convergente a* μ *y todo* $H \in \mathcal{H}$ *es* μ*-Riemann integrable, entonces* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ.

3.4. *Si* $\mu(E) < +\infty$*, todo* $H \in \mathcal{H}$ *es* μ*-Riemann integrable y* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es débilmente convergente a* μ*, entonces* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es simplemente convergente a* μ *(y, por tanto,* $s(\mathcal{H})$*-convergente a* μ*).*

Demostración:

3.1. Es evidente que si $(\mu_i)_{i\in I}$ es ω-convergente a μ, se verifica

$$\limsup \mu_i(E) \leqslant \mu(E) .$$

Supongamos ahora que se cumple esta desigualdad. Por la proposición 2, para cada abierto $G \subset E$ es $\mu(G) \leqslant \liminf \mu_i(G)$ y, además,

$$\mu(E) \leqslant \liminf \mu_i(E) \leqslant \limsup \mu_i(E) \leqslant \mu(E),$$

luego $(\mu_i)_{i\in I}$ es ω-convergente a μ.

(1) La definición de conjunto μ-Riemann integrable puede verse, por ejemplo, en (9) ó en (11).

3.2. De la proposición 2 se deduce que si $(\mu_i)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ, entonces

$$\mu(G) \leqslant \lim \inf \mu_i(G)$$

para todo abierto $G \subset E$. Recíprocamente, supongamos que se verifica esta condición. Entonces, para cada $H \in \mathcal{H}$, se cumple

$$\mu(H) = \mu(\mathring{H}) \leqslant \lim \inf \mu_i(\mathring{H}) \leqslant \lim \inf \mu_i(H)$$

y de la proposición 2 resulta que $(\mu_i)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ.

3.3. Es consecuencia inmediata de 3.2.

3.4. Como en este caso $(\mu_i)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ, de la proposición 2 se deduce que

$$\mu(B) \leqslant \lim \inf \mu_i(B) \leqslant \lim \sup \mu_i(B)$$

para todo conjunto de Borel $B \subset E$. Por otra parte,

En consecuencia, $\lim \mu_i(B) = \mu(B)$ y, por tanto, $(\mu_i)_{i \in I}$ es s-convergente a μ.

*4. **Proposición:** Sean* $(\mu_i)_{i \in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ *y* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. *Entonces, son equivalentes*

4.1. $(\mu_i)_{i \in I}$ *es* $s(\mathcal{H})$*-convergente a* μ.

4.2. $(\mu_i)_{i \in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ *y para cada* $H \in \mathcal{H}$ *se cumple*

$$\lim \sup \mu_i(H) \leqslant \mu(H).$$

Demostración: Es evidente que 4.1 implica 4.2. Supongamos que se verifica 4.2. Entonces, de la proposición 2 se deduce que

$$\mu(B \cap H) \leqslant \lim \inf \mu_i(B \cap H) \leqslant \lim \sup \mu_i(B \cap H)$$

para todo conjunto de Borel B y todo $H \in \mathcal{H}$. Por otra parte, de manera análoga a como hemos procedido en la demostración de 3.4, se prueba que

$$\lim \sup \mu_i(B \cap H) \leqslant \mu(B \cap H).$$

Por consiguiente, $(\mu_i)_{i \in I}$ es $s(\mathcal{H})$-convergente a μ.

*5. **Corolario:** Sean* $(\mu_i)_{i \in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ *y* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. *Entonces, son equivalentes*

5.1. $(\mu_i)_{i\in I}$ *es s-convergente a* μ.

5.2. $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ, *todo conjunto de Borel de medida finita es* $(\mu_i)_{i\in I}$*-regular y*

$$\limsup \mu_i(H) \leqslant \mu(H)$$

para todo $H \in \mathcal{H}$.

Demostración: Se deduce inmediatamente de la proposición anterior y de la proposición 8 de (7).

6. ***Corolario:*** *Sean* $(\mu_i)_{i\in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ *y* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. *Si* $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ *y se verifica*

$$\limsup \mu_i(H) \leqslant \mu(H)$$

para todo $H \in \mathcal{H}$, *entonces para cada abierto* $G \subset E$ *y cada* $H \in \mathcal{H}$, *el conjunto* $G \cap H$ *es* $(\mu_i)_{i\in I}$*-compacto.*

Demostración: Es consecuencia inmediata de la proposición 4 de este trabajo y de la proposición 7 de (7).

7. ***Observación:*** Sean $(\mu_i)_{i\in I}$ una red en $M(E,\mathcal{H})$ y $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. Si $(\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ, entonces todo conjunto $\mu^{\cdot}$-medible $X \subset E$ que sea $(\mu_i)_{i\in I}$-compacto, es μ-compacto ya que, dados un $\epsilon > 0$ y un recubrimiento abierto $(G_i)_{i\in I}$ de X, existe un subconjunto finito F de I tal que

$$\begin{aligned}\mu^{\cdot}(X - \bigcup_{i\in F} G_i) &\leqslant \liminf \mu_i(X - \bigcup_{i\in F} G_i)\\ &\leqslant \limsup \mu_i(X - \bigcup_{i\in F} G_i).\end{aligned}$$

8. ***Proposición:*** *Sean* $(\mu_i)_{i\in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ *y* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. *Si* $\mu(E) < +\infty$, *son equivalentes*

8.1. $(\mu_i)_{i\in I}$ *es s-convergente a* μ.

8.2. $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ *y*

$$\limsup \mu_i(E) \leqslant \mu(E).$$

Demostración: Es evidente que 8.1 implica 8.2. Supongamos que se verifica 8.2. Entonces, de la proposición 2 se deduce que

$$\mu(B) \leqslant \limsup \mu_i(B)$$

para todo conjunto de Borel B y, procediendo de manera análoga a como hemos hecho en la demostración de 3.4 se prueba que

$$\limsup \mu_i(B) \leqslant \mu(B),$$

luego $(\mu_i)_{i\in I}$ es s-convergente a μ. (2)

*9. **Proposición:** Sean* $(\mu_i)_{i\in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$ *e* $Y \subset E$ *un conjunto* μ*-Riemann integrable.*

9.1. *Si para cada* $H \in \mathcal{H}$ *es* $\limsup \mu_i(H) \leqslant \mu(H)$, *entonces*

$$\lim \mu_i^{\cdot}(Y \cap H) = \mu^{\cdot}(Y \cap H)$$

para todo $H \in \mathcal{H}$.

9.2. *Si para cada* $H \in \mathcal{H}$ *es* $\limsup \mu_i(H) \leqslant \mu(H)$ *y* $\mu^{\cdot}(Y) < +\infty$ *entonces la igualdad*

$$\lim \mu_i^{\cdot}(Y) = \mu^{\cdot}(Y)$$

se verifica si y sólo si Y *es* $(\mu_i)_{i\in I}$*-regular* (3).

9.3. *Si* $\limsup \mu_i(E) \leqslant \mu(E) < +\infty$, *entonces*

$$\lim \mu_i^{\cdot}(Y) = \mu^{\cdot}(Y).$$

Demostración:

9.1. Se deduce inmediatamente de la proposición 4 de este trabajo y de la proposición 3 de (9).

9.2. Es consecuencia de la proposición 4 del presente trabajo y de la proposición 4 de (9).

9.3. Resulta de la proposición 3 de este artículo y de la proposición 6 de (9).

*10. **Proposición:** Sean* $(\mu_i)_{i\in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$ *y* $\mu \in M(E,\mathcal{H})$. *Si cada* $H \in \mathcal{H}$ *es completamente regular con la topología relativizada, entonces son equivalentes*

10.1. $(\mu_i)_{i\in I}$ *es* $s(\mathcal{H})$*-convergente a* μ.

10.2. *Para cada* $H \in \mathcal{H}$ *y todo* $Y \subset E$ *tal que* $Y \cap H$ *sea* μ*-Riemann integrable se verifica*

$$\mu^{\cdot}(Y \cap H) = \lim \mu_i^{\cdot}(Y \cap H).$$

(2) Obsérvese que si cada $H \in \mathcal{H}$ es μ-Riemann integrable, la implicación 8.2 $\Rightarrow$ 8.1 resulta inmediatamente de 3.1 y 3.4.

(3) Si $\mu^{\cdot}(Y) = +\infty$, la igualdad $\mu^{\cdot}(Y) = \lim \mu_i^{\cdot}(Y)$ es trivial puesto que $\mu^{\cdot}(Y) \leqslant \liminf \mu_i^{\cdot}(Y) \leqslant \limsup \mu_i^{\cdot}(Y)$.

Demostración: la implicación 10.1 $\Rightarrow$ 10.2 resulta inmediatamente de la proposición 3 de (9). Supongamos que se verifica 10.2. Por ser $\mu(H) < +\infty$ para todo $H \in \mathcal{H}$, del teorema 77 de (10) se deduce que

$$\mu(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = \inf \{ \mu(F) : F \in \mathcal{F} \}$$

para toda familia $\mathcal{F}$ de conjunto cerrados en H filtrante a la izquierda. Del Teorema de Portmanteau se sigue que $(\mu_i)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ y que

$$\mu(H) = \lim \mu_i(H)$$

para todo $H \in \mathcal{H}$ y, por la proposición 4, $(\mu_i)_{i \in I}$ es $s(\mathcal{H})$-convergente a μ.

2. ESTABILIDAD DE LA CONVERGENCIA DEBIL FRENTE A LA MEDIDA IMAGEN.

Si $\mu \in M(E,\mathcal{H})$, E' es un espacio topológico arbitrario, $T: E \to E'$ es una aplicación μ-medible y para cada conjunto de Borel B' de E' ponemos $\mu'(B') = = \mu(T^{-1}(B'))$, del teorema 83 de (10) resulta que la función de conjunto $\mu' = T\mu$ pertenece a $M(E',\mathcal{H}')$, siendo $\mathcal{H}'$ la clase de los conjuntos cerrados H' de E' de medida $\mu'(H') < +\infty$ que sean imagen por T de algún $H \in \mathcal{H}$.

11. Teorema: Sean $(\mu_i)_{i \in I}$ *una red en* $M(E,\mathcal{H})$, $T: E \to E'$ *una aplicación* μ_i*-medible para todo* $i \in I$ *y* μ *una medida de Radon de tipo* $(\mathcal{H})$ *sobre* E *tal que* T *es* μ*-medible. Si* $\mathcal{H}'_i = \mathcal{H}'$ *para todo* $i \in I$ *y la red* $(\mu_i)_{i \in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$*-convergente a* μ*, entonces la red* $(T\mu_i)_{i \in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H}')$*-convergente a* $T\mu$.

Demostración: Sean G' un abierto de E' y $H' \in \mathcal{H}'$. Como la aplicación T es μ-medible Lusin, por el teorema 83 de (10), el conjunto $T^{-1}(G' \cap H')$ es μ-medible y de la proposición 2 se deduce que

$$\begin{aligned} T\mu(G' \cap H') &= \mu(T^{-1}(G' \cap H')) \\ &\leqslant \liminf \mu_i(T^{-1}(G' \cap H')) \\ &= \liminf T\mu_i(G' \cap H') \end{aligned}$$

luego la red $(T\mu_i)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H}')$-convergente a $T\mu$.

12. Corolario: Con las notaciones del teorema 11, si $\mathcal{H}'_i = \mathcal{H}'$ *para todo* $i \in I$*, cada* $H \in \mathcal{H}$ *es* μ*-Riemann integrable y la red* $(\mu_i)_{i \in I}$ *es* ω*-convergente a* μ*, entonces la red* $(T\mu_i)_{i \in I}$ *es* ω*-convergente a* $T\mu$.

Demostración: De la proposición 3 se deduce que la red $(\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ y por el teorema anterior, la red $(T\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H}')$-convergente a $T\mu$. Además, en este caso, se verifica

$$T\mu(E') = \mu(E) = \lim \mu_i(E) = \lim \mu_i(T^{-1}(E')) = \lim T\mu_i(E')$$

y por tant, la red $(T\mu_i)_{i\in I}$ es débilmente convergente a $T\mu$.

3. ESTABILIDAD DE LA CONVERGENCIA DEBIL FRENTE AL PRODUCTO POR FUNCIONES

En el teorema 100 de (10) se demuestra que si $\mu \in M(E,\mathcal{H})$ y p es una función no negativa y μ-integrable sobre cada $H \in \mathcal{H}$, entonces la función real de conjunto ν definida sobre la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de E por

$$\nu(B) = \sup \; \{ \textstyle\int_H p \, d\mu : B \supset H \in \mathcal{H} \}$$

pertenece a $M(E,\mathcal{H})$, y que si $\mu(B) < +\infty$ $(B \in \mathcal{B})$, entonces

$$\nu(B) = \textstyle\int_B p \, d\mu \, .$$

Esta medida ν se denomina *producto de μ por* p y se denota por $p\mu$.

*13. **Teorema:** Sean $(\mu_i)_{i\in I}$ una red en $M(E,\mathcal{H})$, $\mu \in M(E,\mathcal{H})$ y p una función no negativa e integrable sobre cada $H \in \mathcal{H}$ respecto a las μ_i y respecto a μ. Si la red $(\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ, entonces la red $(p\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a $p\mu$.*

Demostración: sean G un abierto de E y $H \in \mathcal{H}$. Dado $\epsilon > 0$ existe una función simple $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$ con $\alpha_k \geqslant 0$ $(k = 1, \dots, m)$ tal que $f \leqslant p$ y

$$\begin{aligned} p\mu(G \cap H) &= \textstyle\int_{G \cap H} p d\mu \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu(A_k \cap G \cap H) + \epsilon \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \liminf \mu_i(A_k \cap G \cap H) + \epsilon \\ &\leqslant \liminf \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu_i(A_k \cap G \cap H) + \epsilon \\ &\leqslant \liminf \textstyle\int_{G \cap H} p d\mu_i + \epsilon \end{aligned}$$

y de aquí se deduce inmediatamente que la red $(p\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a $p\mu$.

14. Corolario: Con las notaciones del teorema 13, si cada $H \in \mathcal{H}$ *es μ-Riemann integrable, la red $(\mu_i)_{i\in I}$ es ω-convergente a μ y* $p\mu(E) = +\infty$, *entonces la red* $(p\mu_i)_{i\in I}$ *es ω-convergente a μ.*

Demostración: Por la proposición 3, la red $(\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ y por el teorema anterior, la red $(p\mu_i)_{i\in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ y como $p\mu(E) = +\infty$, la red $(p\mu_i)_{i\in I}$ es débilmente convergente a $p\mu$.

15. Teorema: Con las notaciones del teorema 13, supongamos que cada $H \in \mathcal{H}$ *es μ-Riemann integrable, que* $\max\{\mu(E), p\mu(E)\} < +\infty$ (4) *y que la red $(\mu_i)_{i\in I}$ es ω-convergente a μ. Entonces son equivalentes*

15.1. *La red* $(p\mu_i)_{i\in I}$ *es ω-convergente a* $p\mu$.

15.2. *Dado* $\epsilon > 0$ *existen un* $H \in \mathcal{H}$ *y una función simple no negativa* f *tales que* $f|_H \leqslant p|_H$ *y*

$$\limsup p\mu_i(E) \leqslant \limsup \int_H f\, d\mu_i + \epsilon .$$

Demostración: Supongamos que se verifica 15.1. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existen un $H \in \mathcal{H}$ y una función simple no negativa $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$ tales que $f \leqslant p$ y

$$\begin{aligned}
\limsup p\mu_i(E) &\leqslant p\mu(E) \\
&\leqslant p\mu(H) + \epsilon/2 \\
&\leqslant f\mu(H) + \epsilon \\
&= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, \mu(A_k \cap H) + \epsilon \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \liminf \mu_i(A_k \cap H) + \epsilon \\
&\leqslant \liminf \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, \mu_i(A_k \cap H) + \epsilon \\
&\leqslant \limsup \int_H f\, d\mu_i + \epsilon .
\end{aligned}$$

(4) Evidentemente, si $\mu(E) < +\infty$ y p está uniformemente acotada sobre cada $H \in \mathcal{H}$, entonces $p\mu(E) < +\infty$.

Supongamos ahora que se verifica 15.2. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existen un $H \in \mathcal{H}$ y una función simple no negativa $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$ tales que $f|_H \leqslant p|_H$ y

$$\begin{aligned}
\limsup p\mu_i(E) &\leqslant \limsup \int_H f \, d\mu_i + \epsilon \\
&= \limsup \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu_i(H \cap A_k) + \epsilon \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, [\limsup \mu_i(H) - \liminf \mu_i(H - A_k)] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k [\mu(H) - \mu(H - A_k)] + \epsilon \\
&= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu(A_k \cap H) + \epsilon \\
&\leqslant \int_H f \, d\mu + \epsilon \\
&\leqslant \int_H p \, d\mu + \epsilon \\
&\leqslant p \, \mu(E) + \epsilon
\end{aligned}$$

y de aquí resulta que

$$\limsup p\mu_i(E) \leqslant p\mu(E)$$

y que la red $(p\mu_i)_{i \in I}$ converge débilmente a $p\mu$ puesto que, en este caso, la red $(\mu_i)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a μ y, por el teorema 13, la red $(p\mu_i)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a $p\mu$.

*16. **Proposición:** Con las hipótesis del teorema 15, se verifica 15.1 si y sólo si todo conjunto de Borel es* $(p\mu_i)_{i \in I}$*-regular.*

Demostración: Si todo conjunto de Borel es $(p\mu_i)_{i \in I}$-regular, de las proposiciones 3 y 8 resulta que la red $(\mu_i)_{i \in I}$ es simplemente convergente a μ y del corolario 7 de (5) se sigue que la red $(p\mu_i)_{i \in I}$ es simplemente convergente y, por tanto, débilmente convergente a μ.

Recíprocamente, si se verifica 15.1, entonces todo $H \in \mathcal{H}$ es $p\mu$-Riemann integrable y como $p\mu(E) < + \infty$, la red $(p\mu_i)_{i \in I}$ converge simplemente a $p\mu$ y del corolario 7 de (5) resulta que todo conjunto de Borel es $(p\mu_i)_{i \in I}$-regular.

4. ESTABILIDAD DE LA CONVERGENCIA DEBIL FRENTE AL PRODUCTO TENSORIAL DE MEDIDAS.

Sean E_1 y E_2 dos espacios topológicos y $\mu^k \in M(E_k,\mathcal{H}_k)$ (k = 1,2), siendo todo $H_k \in \mathcal{H}_k$ regular para la topología relativizada. Si $\mathcal{H}$ es la clase de los subconjuntos cerrados de $E = E_1 \times E_2$ contenidos en algún conjunto de la forma $H_1 \times H_2$ (con $H_k \in \mathcal{H}_k$ para k = 1, 2), por el teorema 103 de (10), existe una única medida $\mu \in M(E,\mathcal{H})$ que verifica $\mu(B_1 \times B_2) = \mu^1(B_1).\ \mu^2(B_2)$ para cada par de conjuntos de Borel $B_1 \subset E_1$ y $B_2 \subset E_2$. Esta medida se llama *producto tensorial* en $M(E,\mathcal{H})$ de μ^1 y μ^2 y se denota por $\mu^1 \otimes \mu^2$.

17. Teorema: Para k = 1, 2, *sea* $(\mu_i^k)_{i\in I}$ *una red en* $M(E_k,\mathcal{H}_k)$ $\omega(\mathcal{H}_k)$-*convergente a* $\mu^k \in M(E_k,\mathcal{H}_k)$ *y supongamos que cada* $H \in \mathcal{H}$ *es* $\mu^1 \otimes \mu^2$-*Riemann integrable, entonces la red* $(\mu_i^1 \otimes \mu_i^2)_{i\in I}$ *es* $\omega(\mathcal{H})$-*convergente a* $\mu^1 \otimes \mu^2$.

Demostración: Sea G un abierto de $E_1 \times E_2$ de medida $\mu^1 \otimes \mu^2(G) < +\infty$. Por el teorema 73 de (10), G es $\mu^1 \times \mu^2$-compacto y como los abiertos de la forma $G_1 \times G_2$ con G_i abierto en E_i para i = 1, 2 constituyen una base de la topología en $E_1 \otimes E_2$, para cada $\epsilon > 0$ existe una familia finita $(G_1^k \times G_2^k)_{k=1,\ldots,m}$ de abiertos de la forma anterior tales que $G_1^k \times G_2^k \subset G$ para k=1, . . . ,m y

$$\mu^1 \otimes \mu^2(G) \leqslant \mu^1 \otimes \mu^2\Big(\bigcup_{k=1}^{m} G_1^k \times G_2^k\Big) + \epsilon .$$

Sea $(B_1^k \times B_2^k)_{k=1,\ldots,n}$ una familia disjunta de subconjuntos de $E_1 \times E_2$ tales que B_1^k es de Borel en E_1 para k=1, . . . ,n y 1 = 1,2 y

$$\bigcup_{k=1}^{m} G_1^k \times G_2^k = \bigcup_{k=1}^{n} B_1^k \times B_2^k .$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mu^1 \otimes \mu^2 (G) &\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu^1 \otimes \mu^2 (B_1^k \times B_2^k) + \epsilon \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \liminf \mu_i^1(B_1^k).\ \liminf \mu_i^2(B_2^k) + \epsilon \\
&\leqslant \liminf \sum_{k=1}^{n} \mu_i^1 \otimes \mu_i^2(B_1^k \times B_2^k) + \epsilon \\
&\leqslant \liminf \mu_i^1 \otimes \mu_i^2(G) + \epsilon .
\end{aligned}$$

Por consiguiente, para cada abierto G de $E_1 \times E_2$ de medida $\mu^1 \times \mu^2$ $(G) < +\infty$ se verifica

$$\mu^1 \otimes \mu^2 (G) \leqslant \liminf \mu_i^1 \otimes \mu_i^2 (G)$$

y por 3.1., la red $(\mu_i^1 \otimes \mu_i^2)_{i \in I}$ es $\omega(\mathcal{H})$-convergente a $\mu^1 \otimes \mu^2$.

*18. **Teorema:** Con las notaciones del teorema 17, si la red $(\mu_i^k)_{i \in I}$ es ω-convergente a μ^k, $\mu^k(E_k) < +\infty$ y cada $H_k \in \mathcal{H}_k$ es μ^k-Riemann integrable para* k=1, 2, *entonces la red $(\mu_i^1 \times \mu_i^2)_{i \in I}$ es ω-convergente a $\mu^1 \times \mu^2$.*

Demostración: De manera análoga a como hemos procedido en la demostración del teorema 17 se prueba que para cada abierto G de $E_1 \times E_2$ se verifica

$$\mu^1 \otimes \mu^2 (G) \leqslant \liminf \mu_i^1 \otimes \mu_i^2 (G)$$

y de aquí se deduce que la red $(\mu_i^1 \otimes \mu_i^2)_{i \in I}$ converge débilmente a $\mu^1 \otimes \mu^2$ ya que

$$\begin{aligned} \lim \mu_i^1 \otimes \mu_i^2 (E_1 \times E_2) &= \lim \mu_i^1(E_1) \,.\, \lim \mu_i^2(E_2) \\ &= \mu^1(E_1) \,.\, \mu^2(E_2) \\ &= \mu^1 \otimes \mu^2 (E_1 \times E_2)\,. \end{aligned}$$

*19. **Corolario:** Con las hipótesis y notaciones del teorema 18, si $(\mu^1(E_1), \mu^2(E_2)) \notin \{(0, +\infty), (+\infty, 0)\}$, entonces la red $(\mu_i^1 \times \mu_i^2)_{i \in I}$ es ω-convergente a $\mu^1 \times \mu^2$.*

Demostración: Resulta inmediatamente del teorema anterior.

5. ESTABILIDAD DE LA CONVERGENCIA DEBIL FRENTE AL LIMITE PROYECTIVO DE MEDIDAS.

Sean $(E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i)$ un sistema proyectivo de espacios topológicos dotados de medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H}_i)$ y $\mathcal{H}$ una familia de subconjuntos cerrados de E. Si μ es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre E tal que $\mu_i = \pi_i(\mu)$, en el sentido de que $\mu_i(B_i) = \mu[\pi_i^{-1}(B_i)]$ para todo conjunto de Borel B_i de E_i, entonces se dice que μ es *límite proyectivo* de las medidas μ_i. En el caso de que para cada $H \in \mathcal{H}$ exista un índice i_H tal que $\pi_i(H)$ sea cerrado en E_i para todo $i \geqslant i_H$ y de que sea lim sup $\mu_i[\pi_i(H)] < +\infty$, entonces la medida límite proyectivo de las medidas μ_i, si existe, es única.

*20. **Teorema:** Sea* $\{(E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *una red de sistemas proyectivos de espacios topológicos dotados de medidas de Radon de tipo* $(\mathcal{K}_i)$ *y supongamos que para cada* $\lambda \in \Lambda$ *existe* $\mu^\lambda \in M(E,\mathcal{K})$ *que es límite proyectivo de las medidas* μ_i^λ. *Si para cada índice* i *la red* $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es* $\omega(\mathcal{K}_i)$*-convergente a una medida* $\mu_i \in M(E_i,\mathcal{K}_i)$ *y existe* $\mu \in M(E,\mathcal{K})$ *que es límite proyectivo de las medidas* μ_i, *entonces la red* $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es* $\omega(\mathcal{K})$*-convergente a* μ *si y sólo si para cada abierto* G *de* E *tal que* $\mu(G) = +\infty$ *se verifica*

$$\liminf \mu_i(G) = +\infty .$$

Demostración: La condición es evidentemente necesaria. Veamos que también es suficiente. Sea G un abierto de E de medida $\mu(G) < +\infty$. Entonces E es μ-compacto y, por tanto, para cada $\epsilon > 0$ existen E_i y un conjunto abierto G_i de E_i tales que $\pi_i^{-1}(G_i) \subset G$ y

$$\begin{aligned} \mu(G) &\leqslant \mu_i(G_i) + \epsilon \\ &\leqslant \liminf \mu_i^\lambda(G_i) + \epsilon \\ &\leqslant \liminf \mu^\lambda(G) + \epsilon , \end{aligned}$$

y de aquí resulta inmediatamente que la red $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es $\omega(\mathcal{K})$-convergente a μ.

*21. **Teorema:** Con las notaciones del teorema 20, si para cada índice* i *la red* $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es* ω*-convergente a una medida* $\mu_i \in M(E_i, \mathcal{K}_i)$, *entonces la red* $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es* ω*-convergente a* μ *si y sólo si para cada abierto* G *de* E *tal que* $\mu(G) = +\infty$ *se verifica*

$$\liminf \mu_i(G) = +\infty .$$

Demostración: Basta proceder como en la demostración del teorema anterior y tener en cuenta que para cada índice i se verifica

$$\mu(E) = \mu_i(E_i) = \lim \mu_i^\lambda(E_i) = \lim \mu^\lambda(E) .$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Billingsley, P.: *Convergence of probability measures.* John Wiley and Sons. New York, 1968.

(2) Billingsley, P. y Topsøe, F.: *Uniformity in weak convergence.* Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verw. Geb. *7* (1967), 1-16.

(3) Dieudonne, J.: *Sur la convergence des suites de mesures de Radon.* Anais Acad. Brasil Ci. *23* (1951), 21-38, 277-282.

(4) Hofmann-Jørgensen, J.: *Weak compactness and tightness of subsets of* M(X). Math. Scand. *31* (1972), 127-150.

(5) Jimenez Guerra, P.: *Stability of tensor products of Radon measures of type* ($\mathcal{H}$). Lect. Notes in Math., *645* (1977), 97-108.

(6) Jiménez Guerra. P.: *Convergencia para redes de límites proyectivos de medidas de Radon.* Collect. Math., *29* (1978), 11-20.

(7) Jiménez Guerra, P.: *Compactness in the space of Radon measures of type* ($\mathcal{H}$). Proc. R. Irish Acad., *78* A (1978), 199-216.

(8) Jiménez Guerra, P.: *Sobre la convergencia de medidas.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, *72* (1978), 610-612.

(9) Jiménez Guerra, P.: *Criterios de convergencia de redes de medidas de conjuntos Riemann-integrables.* Rev. R. Acad. Ci Madrid, *74* (1980), 933-938.

(10) Rodríguez-Salinas, B. y Jiménez Guerra, P.: *Medidas de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$) *en espacios topológicos arbitrarios.* Mem. R. Acad. Ci. Madrid, *10,* 1979.

(11) Schwartz, L.: *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Oxford University Press, 1973.

(12) Topsøe, F.: *Preservation of weak convergence under mappings.* Ann. Math. Statist. *38* (1967), 1661-1665.

(13) Topsøe, F.: *Topology and measure.* Lect. Notes in Math. *133,* 1970.

(14) Topsøe, F.: *Compactness in spaces of measures.* Studia Math. *36* (1970), 194-212.

Dpto. de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciéncias
U.N.E.D.
Ciudad Universitaria
28003 Madrid