LA RELATIVITÀ GENERALE PROIETTIVA ED IL CAMPO TENSORIALE-VETTORIALE

por

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)*

1. GRAVITAZIONE E MAGNETOIDRODINAMICA

La relatività generale di Einstein può essere perfezionata in modo *univoco,* a partire dalla "relatività speciale proiettiva" (RSP), basata sull'Universo di De Sitter a curvatura constante $+ 1/r^2$, e sul gruppo di Fantappié a 10 parametri. Otteniamo allora la "Relatività Generale Proiettiva" (RGP) nella quale, come abbiamo visto nel precedente lavoro [1], si introduce la metrica pentadimensionale

$$ds^2 = \gamma_{AB} d\bar{x}^A \, d\bar{x}^B \qquad (A,B = 1,2..5) \tag{1,1}$$

In conseguenza, le equazioni di Einstein generalizzate

$$\boxed{R_{AB} - (1/2)\, R\, \gamma_{AB} = \chi T_{AB}} \tag{1,2}$$

stabiliscono un legame tra il tensore di curvatura e torsione di Cartan [2] ed il tensore energetico del campo magnetoidrodinamico H_{AB}, dato da

$$T_{AB} = H_{AS} H^{S}_{\cdot B} + (1/4)\, \gamma_{AB} H_{RS} H^{RS} \tag{1,3}$$

che abbiamo calcolato a partire dalle equazioni di Maxwell generalizzate nell'Universo di De Sitter [3].

Per trascrivere le (1,2) in forma quadridimensionale, imponiamo la condizione di normalizzazione di Weierstrass

$$\gamma_{AB} \bar{x}^A \bar{x}^B = r^2 \tag{1,4}$$

*Lavoro eseguido nell'ambito del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Italia).

ed otteniamo allora il legame tra le coordinate proiettive $\bar{x}^A$ e le coordinate x^i (con i = 1,2..4), cioé

$$\bar{x}^i = x^i \mathcal{A}^{-1} \quad ; \quad \bar{x}^5 = r\,\mathcal{A}^{-1} \tag{1,5}$$

dove abbiamo posto

$$\boxed{\mathcal{A}^2 = \gamma_{55} + 2\gamma_{is} x^i/r + \gamma_{ik} x^i x^k/r^2} \tag{1,6}$$

Sostituendo le (1,5) nelle (1,1), otteniamo la metrica generalizzata di Beltrami, non simmetrica, data da

$$\begin{cases} g_{\underline{ik}} = \mathcal{A}^{-4} (\mathcal{A}^2 \gamma_{ik} - X_i X_k + Y_i Y_k) \\ g_{\underset{\vee}{ik}} = \mathcal{A}^{-4} (X_i Y_k - X_k Y_i) \end{cases} \tag{1,7}$$

dove i due vettori X_i ed Y_i sono così definiti

$$\begin{cases} X_i = \gamma_{is} + \gamma_{is} x^s/r \\ 2Y_i = \partial_i \gamma_{55} + (x^s/r)\partial_i \gamma_{s5} + (x^r x^s/r^2)\partial_i \gamma_{rs} \end{cases} \tag{1,8}$$

Tale metrica diventa simmetrica nei casi in cui $X_i = 0$, oppure $Y_i = 0$, ovvero $X_i = Y_i$ (in particolare $X_i = Y_i = 0$). Otteniamo in tal modo tre casi notevoli della RGP.

In questo lavoro ci proponiamo di scrivere le equazioni gravitazionali generalizzate nel caso del *campo vettoriale-tensoriale*, in cui

$$\gamma_{i5} = \phi_i \quad ; \quad \gamma_{55} = 1 \tag{1,9}$$

Per semplificare i calcoli, supporremo che $x^i/r \sim 0$, e cioé ci limiteremo al caso di piccole distanze spazio-temporali dall'osservatore ($\vec{x}/r \sim 0$, $t/t_0 \sim 0$). In conseguenza, dalle (1,6) ed (1,8) si deduce che

$$\mathcal{A} = 1 \quad ; \quad X_i = \phi_i \quad ; \quad Y_i = 0 \tag{1,10}$$

e quindi la metrica indotta é simmetrica

$$g_{\underline{ik}} = \gamma_{ik} - \phi_i \phi_k \quad ; \quad g_{\underset{\vee}{ik}} = 0 \tag{1,11}$$

Se ne deduce che le coordinate proiettive (1,5) si riducono a quelle cartesiane, cioè

$$\bar{x}^i = x^i \quad ; \quad \bar{x}^5 = r \tag{1,12}$$

Con queste ipotesi semplificative, le equazioni del campo gravitazionale vettoriale-tensoriale, assumono un aspetto assai semplice, ed otteniamo una teoria formalmente analoga alla "relatività proiettiva" di Veblen [5], ma con una intepretazione fisica del tutto diversa, come vedremo meglio al n° 5. La teoria così ottenuta vale allora "localmente" e per campi gravitazionali intensi, come quelli generati dalla materia iperdensa.

2. IL TENSORE METRICO E LA CONNESSIONE PROIETTIVA

La teoria vettoriale-tensoriale, si ottiene a partire dal tensore

$$\boxed{\gamma_{ik} = g_{ik} + \phi_i \phi_k \quad ; \quad \gamma_{is} = \phi_i \quad ; \quad \gamma_{ss} = 1} \tag{2,1}$$

Se allora teniamo conto della identità

$$\gamma^{AS}\gamma_{SB} = \delta^A{}_B \tag{2,2}$$

otteniamo il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{is}(g_{sk} + \phi_s\phi_k) + \gamma^{is}\phi_k = \delta^i{}_k \quad ; \quad \gamma^{is}\phi_s + \gamma^{is} = 0 \\ \gamma^{ss}(g_{sk} + \phi_s\phi_k) + \gamma^{ss}\phi_k = 0 \quad ; \quad \gamma^{is}\phi_i + \gamma^{ss} = 1 \end{array} \right. \tag{2,4}$$

Se ne deduce che

$$\boxed{\gamma^{ik} = g^{ik} \quad ; \quad \gamma^{is} = -\phi^i \quad ; \quad \gamma^{ss} = 1 + \phi_s \phi^s} \tag{2,4}$$

dove abbiamo posto $\phi^i = g^{ik}\phi_k$.

Fatta questa premessa, per calcolare le componenti della connessione proiettiva

$$2\pi^A_{BC} = \gamma^{AS}(\bar{\partial}_B\gamma_{CS} + \bar{\partial}_C\gamma_{BS} - \bar{\partial}_S\gamma_{BC}) \tag{2,5}$$

teniamo presente che dalle (1,12) si deduce che

$$\bar{\partial}_i = \partial_i \quad ; \quad \bar{\partial}_s = 0 \tag{2,6}$$

Se allora utilizziano le (2,1) e (2,4) e poniamo per brevità

$$2\Omega_{ik} = \partial_i\phi_k - \partial_k\phi_i \quad ; \quad 2\Sigma_{ik} = \partial_i\phi_k + \partial_k\phi_i \tag{2,7}$$

la connessione proiettiva (2,5) ha le seguenti componenti 4-dimensionali

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi^{i}_{k1} = \{{}^{\,i}_{k1}\} + \phi_k \Omega^{i}_{\cdot 1} + \phi_1 \Omega^{i}_{\cdot k} \\ \pi^{5}_{k1} = \Sigma_{k1} - \phi_s \pi^{s}_{k1} \;;\; \pi^{5}_{k5} = -\phi_s \Omega^{s}_{\cdot k} \\ \pi^{i}_{k5} = \Omega^{i}_{\cdot k} \;;\; \pi^{i}_{55} = 0 \;;\; \pi^{5}_{55} = 0 \end{array}} \tag{2,8}$$

le quali sono espresse in funzione della connessione (costruita con le g_{ik}) e del campo vettoriale ϕ_i.

3. Studio del tensore proiettivo di curvatura-torsione

Contraendo il tensore di curvatura e torsione di Cartan, otteniamo il seguente tensore doppio simmetrico

$$R_{AB} = \overline{\partial}_A \pi^{C}_{BC} - \overline{\partial}_C \pi^{C}_{BA} + \pi^{C}_{BD} \pi^{D}_{CA} - \pi^{C}_{BA} \pi^{D}_{CD} \tag{3,1}$$

Utilizzando le formule (2,8) e con calcoli laboriosi, ma elementari, si trovano le componente covarianti di tale tensore

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{ik} = \hat{R}_{ik} + 2\Omega_{i\cdot}^{\;s} \Omega_{sk} - \phi_i \;\; {}_s\Omega^{s}_{\cdot k} - \phi_k \nabla_s \Omega^{s}_{\cdot i} + \phi_i \phi_k \Omega^2 \\ R_{i5} = \phi_i \Omega^2 - \nabla_s \Omega^{s}_{\cdot i} \;;\; R_{55} = \Omega^2 \end{array}} \tag{3,2}$$

dove $\hat{R}_{ik}$ é il tensore di curvatura contratto e ∇_i la derivata covariante, costruiti a partire dalla metrica g_{ik}, mentre $\Omega^2 = \Omega_{ik}\Omega^{ik}$.

Le componenti miste di R_{AB} si trovano così

$$R^{A}_{\cdot B} = \gamma^{AS} R_{BS} = \gamma^{As} R_{sB} + \gamma^{A5} R_{5B} \tag{3,3}$$

Tenendo conto delle (2,4) e delle (3,2), otteniamo le seguenti formule che ci danno le componenti miste

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{R}^{i}_{\cdot k} = \hat{R}_{\cdot k} + 2\Omega^{r}_{\cdot k} \Omega^{i}_{\cdot r} - \phi_k \nabla_r \Omega^{ri} \\ R^{5}_{\cdot i} = (\phi_i \Omega^2 - \nabla_s \Omega^{s}_{\cdot i}) - \phi^s (\hat{R}_{si} + 2\Omega^{r}_{\cdot s} \Omega_{ir} - \phi_i \nabla_s \Omega^{r}_{\cdot s}) \\ R^{i}_{\cdot 5} = \nabla_s \Omega^{si} \;;\; R^{5}_{\cdot 5} = \Omega^2 + \phi_r \nabla_s \Omega^{rs} \end{array} \right. \tag{3,4}$$

Invece, le componenti controvarianti del tensore R_{AB}, si trovano con le formule

$$R^{AB} = \gamma^{AS} R^{B}_{\cdot S} = \gamma^{As} R^{B}_{\cdot s} + \gamma^{A5} R^{B}_{\cdot 5} \tag{3,5}$$

e risultano le seguenti

$$(3,6)\qquad \begin{cases} R^{ik} = \hat{R}^{ik} + 2\Omega^{ri}\Omega^{k}_{.r} \;\; ; \;\; R^{is} = \nabla_s \Omega^{is} - \phi_s \hat{R}^{is} \\ R^{55} = \Omega^2 + 2\phi^r \nabla_s \Omega^{s}_{.r} + \phi_r \phi_s \hat{R}^{rs} \end{cases}$$

Infine, l'invariante scalare é dato da

$$(3,7)\qquad R = \gamma^{AB} R_{AB} = \gamma^{rs} R_{rs} + 2\gamma^{r5} R_{r5} + \gamma^{55} R_{55}$$

Fatti i calcoli si trova che é dato da

$$(3,8)\qquad \boxed{R = \hat{R} - \Omega^2}$$

Dai risultati ottenuti si vede che le componenti più semplici del tensore di curvatura e torsione contratto cono le seguenti

$$(3,9)\qquad R^{ik} = \hat{R}^{ik} + 2\Omega^{is}\Omega_{1}{}^{k}_{.} \;\; ; \;\; R^{i}_{.5} = \nabla_s \Omega^{is} \;\; ; \;\; R_{55} = \Omega^2$$

nelle quali il campo vettoriale ϕ_i interviene solo attraverso il tensore doppio antisimmetrico $2\,\Omega_{ik} = \mathrm{Rot}\,\phi_i$.

4. Il campo gravitazionale tensoriale-vettoriale

Le equazioni generalizzate di Einstein (1,2), nel caso del campo vettoriale-tensoriale, se teniamo conto delle (2,1) e (3,2), si scrivene così, in termini 4-dimensionali:

$$(4,1)\begin{cases} \hat{G}_{ik} + 2E_{ik} - \phi_i \nabla_s \Omega^{s}_{.k} - \phi_k \nabla_s \Omega^{s}_{.i} + (1/2)(3\Omega^2 - \hat{R})\phi_i \phi_k = \chi T_{ik} \\ \phi_i (3\Omega^2 - \hat{R}) - 2\nabla_s \Omega^{s}_{.i} = \chi T_{i5} \;\; ; \;\; 3\Omega^2 - \hat{R} = 2\chi T_{55} \end{cases}$$

nelle quali abbiamo posto per brevità

$$(4,2)\qquad \hat{G}_{ik} = \hat{R}_{ik} - (1/2)\, g_{ik} \hat{R} \;\; ; \;\; E_{ik} = \Omega^{s}_{i.}\, \Omega_{sk} + (1/4) g_{ik} \Omega^2$$

Se nelle (4,1) teniamo conto delle due ultime equazioni, esse si semplificano nel seguente modo

$$(4,3)\qquad \boxed{\begin{array}{l} \hat{G}_{ik} + 2\,E_{ik} = \chi(T_{ik} - \phi_i T_{k5} - \phi_k T_{i5} - \phi_i \phi_k T_{55}) \\ \nabla_s \Omega^{s}_{.i} = \chi(\phi_i T_{55} - T_{i5}) \;\; ; \;\; 3\Omega^2 - \hat{R} = 2\chi T_{55} \end{array}}$$

In particolare, se il tensore energetico del campo magnetoidrodinamico é nullo ($T_{AB} = 0$), esse si riducono alle

$$(4,4) \qquad G_{ik} + 2\, E_{ik} = 0 \quad ; \quad \nabla_s \Omega^{s}_{\cdot i} = 0 \quad ; \quad 3\Omega^2 = \hat{R}$$

Dalla prima equazione, contraendo abbiano $\hat{R} = 0$, ed allora

$$(4,5) \qquad \boxed{\hat{R}_{ik} + 2\, \Omega^{s}_{\cdot i} \Omega_{ks} = 0 \;\; ; \;\; \nabla_s \Omega^{s}_{\cdot i} = 0 \;\; ; \;\; \Omega^2 = 0}$$

Se invece il campo gravitazionale vettoriale é del tipo

$$(4,6) \qquad \phi_i = T_{i5}/T_{55}$$

le (4,3) si semplificano notevolmente, e diventano

$$(4,7) \qquad \begin{cases} \hat{G}_{ik} + 2\, E_{ik} = \chi (T_{ik} - 3\, T_{i5} T_{k5}/T_{55}) \\ \nabla_s \Omega^{s}_{\cdot i} = 0 \quad ; \quad 3\, \Omega^2 - \hat{R} = 2\, \chi T_{55} \end{cases}$$

Se poi vogliamo scrivere le equazioni del campo tensoriale-vettoriale in forma mista, avremo le equazioni

$$(4,8) \qquad \boxed{R^{A}_{\cdot B} - (1/2) \delta^{A}_{\cdot B}\, R = \chi T^{A}_{\cdot B}}$$

In base alle (3,4) esse equivalgono alle

$$(4,9) \qquad \begin{cases} \hat{G}^{i}_{\cdot k} + 2\, E^{i}_{\cdot k} - \phi_k \nabla_r \Omega^{ri} = \chi T^{i}_{\cdot k} \\ \nabla_s \Omega^{si} = \chi T^{i}_{\cdot 5} \quad ; \quad 2\, \phi_r \nabla_s \Omega^{sr} + 3\Omega^2 - \hat{R} = 2\, \chi T^{5}_{\cdot 5} \end{cases}$$

e tenendo conto delle due ultime equazioni, esse si possono scrivere nel seguente modo

$$(4,10) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \hat{G}^{i}_{\cdot k} + 2\, E^{i}_{\cdot k} = \chi (T^{i}_{\cdot k} + \phi_k\, T^{i}_{\cdot 5}) \\ \nabla_s \Omega^{si} = \chi T^{i}_{\cdot 5} \quad ; \quad 3\Omega^2 - \hat{R} = 2\chi (T^{5}_{\cdot 5} - \phi_s\, T^{s}_{\cdot 5}) \end{array}}$$

In particolare, se $T^{i}_{\cdot 5} = 0$, tali equazioni si semplificare riducendosi a quelle più semplici

$$(4,11) \qquad G^{i}_{\cdot k} + 2\, E^{i}_{\cdot k} = \chi T^{i}_{\cdot k} \quad ; \quad \nabla_s \Omega^{si} = 0 \quad ; \quad 3\Omega^2 - \hat{R} = 2\chi T^{5}_{\cdot 5}$$

Per concludere, scriviamo le equazioni del campo in forma controvariante, cioé partiamo dalle

$$\boxed{R^{AB} - (1/2)\gamma^{AB} R = \chi T^{AB}} \tag{4,12}$$

In base alle (2,4) ed alle (3,6) esse diventano

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{R}^{ik} + 2\Omega^{ri}\Omega^{k}_{\cdot r} - (1/2)g^{ik}(\hat{R} - \Omega^2) = \chi T^{ik} \\ \nabla_s\Omega^{si} - \phi_s\hat{R}^{is} + (1/2)\phi^i(\hat{R}-\Omega^2) = \chi T^{is} \\ \Omega^2 + 2\phi^r \nabla_s\Omega^{s}_{\cdot r} + \phi_r\phi_s\hat{R}^{rs} - (1/2)(1 + \phi_s\phi^s)(\hat{R}-\Omega^2) = \chi T^{55} \end{array}\right. \tag{4,13}$$

Se teniamo conto delle ultime equazioni, esse si possono scrivere in forma semplificata, così

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{G}^{ik} + 2E^{ik} = \chi T^{ik} \quad ; \quad \nabla_s\Omega^{si} - \phi_s\hat{G}^{is} - (1/2)\phi^i\Omega^2 = \chi T^{is} \\ (3\Omega^2 - \hat{R}) + 3\phi_r\varphi_s(\hat{G}^{rs} + g^{rs}\Omega^2) = \chi(T^{55} - 2\phi_s T^{s5}) \end{array}} \tag{4,14}$$

Abbiamo così trascritto le equazioni di Einstein generalizzate, nel caso del campo gravitazionale vettoriale-tensoriale, nelle tre forme covariante, controvariante e mista.

5. CONFRONTO CON LA RELATIVITA' PROIETTIVA DI VEBLEN

Come é ben noto, nella "relatività proiettiva" di Veblen [5], si introduce una varietà proiettiva X_4 ed un tensore simmetrico γ_{AB} che definisce un campo di quadriche Q poste negli spazi tangenti ai punti della varietà. Le quadriche Q hanno le equazioni

$$\gamma_{AB}x^A x^B = 0 \tag{5,1}$$

e sono l'assolute di una metrica non euclidea locale. Se allora poniamo

$$\gamma_{55} = 1 \quad ; \quad \gamma_{A5} = \phi_A \tag{5,2}$$

si può definire una metrica riemanniana 4-dimensionale data da

$$g_{AB} = \gamma_{AB} - \gamma_{A5}\gamma_{B5} = \gamma_{AB} - \phi_A\phi_B \tag{5,3}$$

Infatti poiamo verificare che $g_{i5} = g_{5i} = 0$ ed inoltre $g_{55} = 0$. Si può in conseguenza costruire una geometria a connessione proiettiva per la X_4, legata al campo di quadriche, la quale stia alla metrica non euclidea che tali quadriche determinano, in una relazione analoga a quella che passa tra la geometria riemanniana e quella euclidea.

Fatta questa premessa, la connessione proiettiva di Veblen (2,5), si può esprimere in funzione del tensore g_{AB} e del vettore ϕ_A, nel seguente modo

(5,4)
$$2\pi^A_{BC} = g^{AS}(\partial_C g_{BS} + \partial_B g_{CS} - \partial_S g_{BC}) + \delta^A_5 \Sigma_{BC} + 2g^{AS}(\phi_B F_{SC} + \phi_C F_{SB})$$

dove abbiamo posto

(5,5) $$2F_{AB} = \partial_B \phi_A - \partial_A \phi_B \quad ; \quad 2\Sigma_{AB} = \partial_A \phi_B + \partial_B \phi_A$$

In conseguenza, il tensore R_{AB}, dato dalla (3,1) diventa

(5,6) $$R_{AB} = \delta^i_A \delta^k_B \hat{R}_{ik} - (\delta^i_A \phi_B + \delta^i_B \phi_A) \nabla_k F^k_{\cdot i} + 2 F^i_{\cdot A} F_{iB} + \phi_A \phi_B F^2$$

dove abbiamo posto $F^2 = F_{rs}F^{rs}$. Si ha infine $R = \hat{R} - F^2$.

Fatta questa premessa, le equazioni della teoria unitaria di Veblen, si ricavano a partire da un principio variazionale, e sono date da

(5,7) $$\boxed{\Gamma_{AB} - \phi_A \phi_B \Gamma = 0}$$

dove abbiamo posto per vrevità

(5,8) $$\Gamma_{AB} = R_{AB} - (1/2)\gamma_{AB} R \quad ; \quad \Gamma = \gamma^{AB}\Gamma_{AB} = -3R/2$$

Le (5,7) scritte in forma 4-dimensionale, diventano

(5,9) $$\boxed{G^{ik} + 2 M^{ik} = 0 \quad ; \quad \nabla_s F^{is} = 0 \quad ; \quad \hat{R} = 0}$$

dove abbiamo posto

(5,10) $$M^{ik} = F^{is}F^k_{s\cdot} + (1/4)g^{ik} F^2$$

Se allora interpretatiamo le ϕ_i (con $\phi_5 = \gamma_{55} = 1$) come potenziali elettromagnetici, le F_{ik} ci danno il campo elettromagnetico, mentre M^{ik} sarà il tensore energetico del campo elettromagnetico. Se ne deduce che la prima equazione (5,9) é quella di Einstein, in presenza di un campo elettromagnetico, la seconda equazione coincide con quella di Maxwell, in assenza di cariche-correnti elettriche.

Otteniamo allora una "teoria unitaria del campo elettromagnetico e gravitazionale", e cioé la "relatività proiettiva" di Veblen.

Ma la teoria di Veblen é insoddisfacente perché non ci spiega per quale motivo la fisica deve essere sviluppata in uno spazio a 5 dimensioni ed interpretata in termini di geometria proiettiva differenziale.

Come abbiamo visto nei precedenti lavori [6], se prima di ampliare la relatività generale, si perfeziona quella ristretta, si può costruire in modo *univoco* una "relatività generale proiettiva", il cui significato fisico é univocamente determinato.

Infatti, nella relatività ristretta proiettiva, l'Universo di De Sitter viene descritto adoperando la sua rappresentazione geodetica, e quindi con i metodi della geometria proiettiva. Inoltre, le equazioni di Maxwell generalizzate si possono interpretare come equazioni del campo magnetoidrodinamico. Se ne deduce che nelle equazioni di Einstein generalizzate (1,2), il tensore di curvatura e torsione del Cartan, deve essere legato al tensore energetico del campo magnetoidrodinamico, e questo fissa in modo univoco il significato fisico di tali equazioni.

In un successivo lavoro ci proponiamo di studiare le equazioni di Einstein generalizzate nel caso del campo scalare-tensoriale. Si otterranno allora delle equazioni simili a quelle della gravitazione scalare-tensoriale di Brans-Dicke [7]. Ma mentre la teoria di Brans-Dicke é costruita in modo arbitrario, e sono quindi possibili varie sue versioni [8], la teoria alla quale noi perveniamo é costruita in modo univoco, cosa che fissa chiaramente il suo significato fisico.

BIBLIOGRAFIA

(1) G. Arcidiacono, *Il tensore di curvatura-torsione di Cartan e la relatività generale proiettiva,* Coll. Math. XXXV, n° 2 (1983); *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie,* Coll. Math. XVI, 149 (1964).

(2) E. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces a connexion projective,* Gauthier-Villars, Paris, 1937.

(3) G. Arcidiacono, *Magnetohydrodynamics and cosmology,* Gen. Rel. Grav. *9,* 949-956 (1978); *Relatività e Cosmologia,* Veschi, Roma, vol. II (1979).

(4) G. Arcidiacono, *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo in cosmologia e microfisica,* Coll. Math., XXXIII, fasc. 1 (1982).

(5) O. Veblen, *Projective relativitätstheorie,* Berlin, Springer, 1933; *Projective relativity,* Phys. Rev. *36*, 810 (1955). Vedi pure: E. Schmutzer, *Projective unified field theory,* Exp. Tecn. Phyxik, *28*, 395-402 (1980).

(6) G. Arcidiacono, Memorie su Coll. Math. del 1958-84 e su Gen. Rel. Gravitation (New York) del 1976-81.

(7) C. Brans, R.H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation,* Phys. Rev. *124,* 925 (1961).

(8) T. Singh, L.N. Rai, *Scalar-tensor theories of gravitation: foundations and prospect,* Gen. Rel. Grav. *15*, n° 9 (1983).

Prof. Giuseppe Arcidiacono
Via Acq. Peschiera, 96
Italia 00135 Roma