NORMALIDAD EN REALIZACIONES GENERALIZADAS ($R_Y(X)$)

por

CARLOS RUÍZ SALGUERO y JOAQUÍN LUNA TORRES

ABSTRACT.

We build a topological space $R_Y(X)$ with a cosimplicial space Y and a simplicial set X copying Milnor's realization method. The features of $R_Y(X)$ depend on both cosimplicial, topological structures of Y and the simplicial structure of X. (Cf [7]). We show that there exist a general cell structure over the space $R_Y(X)$.

The main purpose of this paper is to find conditions for the celular space $R_Y(X)$ could be a normal space.

INTRODUCCIÓN.

Partiendo de un espacio cosimplicial Y y de un conjunto simplicial X se construye, calcando el método de Milnor para las realizaciones, un espacio topológico $R_Y(X)$ cuyas características dependen naturalmente (a) de la estructura cosimplicial de Y, (b) de la estructura topológica de Y, (c) de la estructura simplicial de X. (Cf [7]). Uno de los objetivos de este artículo, el objetivo central, consiste en buscar las condiciones que hagan de $R_Y(X)$ un espacio normal.

Para lograrlo, recurrimos a los complejos celulares generales: que son espacios cuya construcción y tratamiento se asemeja a la de los C.W. complejos, pero en los que las celdas que intervienen ya no son las celdas euclídeas; y aprovechamos los resultados de [4] que, entre otras cosas, establece condiciones relativamente fáciles de manejar que aseguran la normalidad en dichos espacios.

Así el camino que nos vimos obligados a tomar comporta dos tramos bien diferentes:

(1) Demostrar que existe una estructura celular general sobre el espacio R_Y (X), imponiendo una condición simple y no demasiado exigente sobre la estructura cosimplicial de Y.

(2) Establecer condiciones sobre la estructura topológica de Y para que el complejo celular que resulta se adapte al caso general estudiado en [4].

El resultado final se presenta progresivamente en dos teoremas que, ambos, hacen aparecer la necesidad de que Y no tenga subobjetos puntuales, y, al fin y al cabo, la normalidad de los pisos Y (n).

El aparte sobre la estructura celular de R_Y (X) se pudo realizar gracias a los resultados de [6], en donde se establecían dos condiciones sobre el conjunto cosimplicial Y que permitían una descripción manejable del conjunto subyacente de R_Y (X), semejante en un todo a la de la realización de Milnor. Sin embargo Rudolf Fritsch en [1] nos hace observar que una de esas condiciones no es absolutamente indispensable, y en consecuencia nuestro resultado final la elimina.

CONDICIONES SOBRE Y PARA QUE R_Y (X) ADMITA ESTRUCTURA CELULAR GENERAL.

1. DESCOMPOSICIÓN CELULAR DE R_Y (X).

1.1. *Descripción Somera de* R_Y (X).

1. En lo que sigue denotaremos por: (a) Δ la categoría cuyos objetos son los conjuntos ordenados $(n) = \{0 < 1 < 2, \ldots < n\}$, uno por cada entero $n \geqslant 0$, y cuyas flechas son las aplicaciones $\alpha : (n) \to (m)$ no decrecientes, (b) $Y: \Delta \to$ Top un functor covariante de Δ en la categoría Top de los espacios topológicos y aplicaciones continuas, (c) $X: \Delta^\circ \to$ Conj un functor contravariante de Δ° en la categoría Conj de los conjuntos *(conjunto simplicial).*

2. Para cada n ($\geqslant 0$) se efectúa el producto de los conjuntos X (n) x Y (n). Sobre la suma $\coprod_n X(n) \times Y(n)$ se define la relación de equivalencia engendrada por la relación de Milnor:

$$(X(w)(x), y) \sim (x, Y(w)(y))$$

en donde $w: (p) \to (q)$ es una flecha de Δ, $X(w): X(q) \to X(p)$ y

$$Y(w): Y(p) \to Y(q)$$

son las aplicaciones asociadas a w por los functores X y Y, x es un elemento de X (q), en tanto que y está en Y (p), ($p, q \geqslant 0$).

El conjunto cociente de $\coprod_n \dot{X}(n) \times Y(n)$ por dicha relación de equivalencia se nota R_Y (X), y se denomina *Realización* del conjunto simplicial X con modelos en Y. La aplicación canónica

$$\coprod_n X(n) \times Y(n) \to R_Y(X)$$

se denotará por θ.

3. R_Y (X) puede además ser considerado como un espacio topológico, con la topología cociente de la topología suma de $\coprod_n X(n) \times Y(n)$ (aquí cada conjunto X (n) se considera con la topología discreta).

1.2. *Caracterización de* $R_Y(X)$ *por pares óptimos.*

Recordamos que un functor Y satisface la *propiedad* M.0.1 si *no* admite subobjetivos puntuales.

1. Un punto x (de X (p) por ejemplo) es *no degenerado* si el único epimorfismo σ: (p) $\to$ (?) de Δ para el cual x está en la imagen de X (σ) es la identidad.

Un punto y (digamos de Y (P)) es *interior* si el único monomorfismo w: (?) $\to$ (p) de meta (p), para el cual se cumple que y ϵ Imagen de Y (w) es la identidad (p) $\to$ (p).

Un par (x, y) en $\coprod_n X(n) \times Y(n)$ es *óptimo* si su componente x es no degenerada y su componente y es interior.

2. En el Teorema central de [6] aparece el siguiente resultado "Si Y satisface las propiedades M.0.1 y M.0.2, entonces la aplicación de identificación

$$\coprod_n X(n) \times Y(n) \to R_Y(X),$$

asociada con la relación de Milnor, establece una correspondencia 1 a 1 entre el conjunto de pares óptimos y el conjunto R_Y (X)".

Otra demostración presentada por R. Fritsch [1], hace resaltar que la condición M.0.2 es superflua, y por eso no la mencionamos.

1.3. *Descomposición celular conjuntista de* R_Y (X).

1. A partir del conjunto subyacente del espacio cosimplicial Y: $\Delta \to$ Top formamos, perdiendo información, la familia de celdas tipo: para cada n, tomamos a (Y (n), ∂ Y (n)), en donde

$$\partial Y(n) = \bigcup_{i=0}^{n} \text{ imágenes } \partial_i (Y(n-1))$$

2. La familia ζ de células en R_Y (X) se define así: para cada valor de $n \in N$ y para cada x no degenerado en X (n), se denota por

$$c(x) = \theta(\{x\} \times \operatorname{int} Y(n)), \text{ y, } \tilde{c}(x) = \theta(\{x\} \times Y(n))$$

allí θ es la aplicación canónica $\coprod_n X(n) \times Y(n) \to R_Y(X)$ al cociente, y,

$$\operatorname{int} Y(n) = Y(n) - \partial Y(n).$$

Formamos $\zeta = \{ c(x)/x$ es no degenerado en X, en las diferentes dimensiones $\}$.

3. Si nos situamos en las condiciones de 1.2.2. se cumple que si x y x' son diferentes y ambos no degenerados entonces $c(x) \cap c(x') = \Phi$. Esta anotación nos da derecho a definir la aplicación d: $\zeta \to N$ (de "dimensión") por la igualdad $d(c(x)) = n$ si $x \in X(n)$ (x no degenerado).

4. Para completar la descomposición celular de R_Y (X) quedan por definir las aplicaciones características: θ_x es la restricción de la aplicación θ, es decir

$$\theta_x : Y(n) \to R_Y(X) \qquad (x \in X(n) \text{ no degenerado})$$

$$\theta_x(y) = \theta(x, y)$$

Φ denota la colección $\{ \theta_x / x$ no degenerado $\}$.

5. ***Proposición:*** Si el conjunto cosimplicial Y satisface la condición M.0.1. entonces la terna (ζ, d, Φ) es una descomposición celular de R_Y (X). (Relativa a la familia de celdas tipo $\{ Y(n), \partial Y(n) \}$.

6. ***Demostración de la Proposición:*** 1.3.5.: (a) que la familia sea una partición de R_Y (X) es una consecuencia inmediata del Teorema central de [6], que copiamos en 1.2.2. Igualmente sucede con la biyectividad de $\theta_x |$ int Y (n). (b)La característica M.0.1 de Y permite mostrar (como en [5] y en [6]) que dado (x, y) existe un par óptimo (x', y') en la misma clase de (x, y) con dim x' $\leqslant$ dim x. Si el par (x, y) no es óptimo (por ejemplo si $y \in \partial(n)$) entonces dim x' $<$ dim x. Este hecho asegura que $\theta_x(\partial Y(n))$ está en el (n − 1) esqueleto de R_Y (X).

2. ESTRUCTURA CELULAR DE R_Y (X)

2.1. *Topología débil sobre* R_Y (X) *asociada* $\{ \theta_x | x$ *en* X, *no degenerado* $\}$.

1. Si un punto x de X (n) es degenerado, existe un epimorfismo σ de Δ,

σ: (n) $\to$ (p), y un punto x_1 de X (p) no degenerado, tales que X (σ) (x_1) = x. Con las notaciones que traemos, se cumple que

$$\theta_x = \theta_z \circ Y(\sigma) : Y(n) \to Y(p) \to R_Y(X).$$

Es decir que toda función θ_x se factoriza a través de un θ_z con z no degenerado. En consecuencia,

2. Las topologías finales sobre R_Y (X) asociadas a las familias $\{\theta_x/x \text{ en } X\}$ y $\{\theta_z/z \text{ en } X, z \text{ no degenerado}\}$ coinciden con la topología cociente debida a θ.

2.2. *Resultado fundamental (resumen).*

De acuerdo con [4] el espacio topológico R_Y (X) (con la topología cociente) soporta una estructura celular con celdas tipo $\{Y(n), \partial Y(n)\}$ $n \in \mathbb{N}$, con aplicaciones características $\{\theta_x\}$ x no degenerado, cuando el "modelo" Y satisface la condición M.0.1.

CONDICIONES SOBRE Y PARA QUE R_Y (X) SEA UN ESPACIO NORMAL

3. NORMALIDAD EN ESPACIOS CELULARES GENERALES.

Sean **f** una clase de aplicaciones continuas y $\mathbb{P}$ una clase de espacios topológicos. Diremos que **f** y $\mathbb{P}$ son *compatibles* si cada vez que una función f de **f** tiene su fuente en $\mathbb{P}$ también tiene su meta en $\mathbb{P}$.

Una función continua f: X $\to$ Y que satisface la siguiente propiedad de extensión: "Para cada pareja de cerrados disyuntos A y B en Y y cada aplicación continua u: X $\to \mathbb{R}$, tal que $u^{-1}\{0\} \supset f^{-1}A$, $u^{-1}\{1\} \supset f^{-1}B$; existe una función continua v: Y $\to \mathbb{R}$ tal que

$$v^{-1}\{0\} \supset A, \quad v^{-1}\{1\} \supset B \text{ y } vf = u",$$

se denomina *cofibración de Urysohn.*

Si U denota la clase de las cofibraciones de Urysohn y N la clase de los espacios normales (i. e.: cerrados disjuntos se separan por abiertos disjuntos), U y N son compatibles. Es más X $\in$ N si y solo si $\Phi \to$ X es de Urysohn.

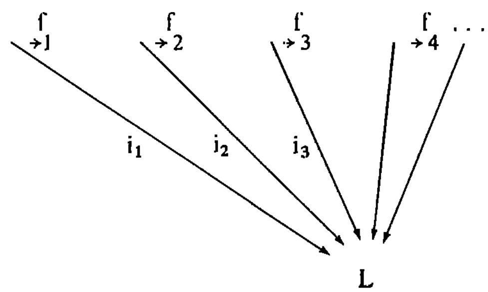
La clase U de las cofibraciones de Urysohn *satisface:*

(i) Todo homeomorfismo está en U.

(ii) U es cerrado por composición.
(iii) Si $\{f_\lambda\}$ es una familia de flechas de U, $\coprod_n f_\lambda \in$ U.
(iv) U es estable por cambio de cobase: es decir si en un diagrama cocartesiano (push-out)

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ f\downarrow & & \downarrow g\,, \\ & \rightarrow & \end{array}$$

la flecha f está en U, también g está en U.
(v) Si en el siguiente diagrama L representa el límite inductivo (en Top) de la familia $\{f_n\}$ $n = 1, 2 \ldots$ y los i_n son las flechas estructurales.



si cada f_n está en la clase U, entonces cada una de la i_n está en la clase U.

En [4] se demostró que si las celdas tipo $\{E^n, \partial E^n\}$ son tales que cada inclusión $\partial E^n \to E^n$ es una cofibración de Urysohn, todo espacio celular que con ellas se construya, es un espacio normal [1].

4. NORMALIDAD EN ESPACIOS DE LA FORMA $R_Y(X)$.

4.1. ***Lema.*** Supongamos que las funciones continuas i: $K \to L$ y j: $K \to L$ satisfagan (i) i(K) y j (K) son cerrados en L, y, (ii) ambas, i y j, son de Urysohn. Entonces la inclusión

$$Z = i(K) \cup j(K) \to L$$

es también una cofibración de Urysohn.

Demostración:

1. Nos damos dos cerrados disyuntos A y B de L y una función continua

u: $Z \to \mathbb{R}$ que separe $A \cap Z$ de $B \cap Z$, es decir tal que (i) $A \cap Z \subset u^{-1}\{0\}$, (ii) $B \cap Z \subset u^{-1}\{1\}$; afirmamos poder encontrar una función continua π: $L \to \mathbb{R}$ que separe A de B y prolongue u; es decir

$$\pi|_Z = u, \quad A \subset \pi^{-1}\{0\}, \quad B \subset \pi^{-1}\{1\}$$

Con este fin, nos vemos obligados a dividir la construcción en cuatro partes, tal como aparece en los numerales siguientes:

2. Noremos α: $K \to \mathbb{R}$ la función $u \circ i$ (de manera precisa, si i' denota la aplicación $K \to Z$ asociada a i: $K \to L$, $\alpha = u \circ i'$).

Aplicamos la propiedad de Urysohn de la función i: existe una función $\tilde{\alpha}$: $L \to \mathbb{R}$, continua, que cumple

a) $\tilde{\alpha} \circ i = \alpha = u \circ i'$

b) $\tilde{\alpha}^{-1}\{0\} \supset A$

c) $\tilde{\alpha}^{-1}\{1\} \supset B$

3. Comparemos $\tilde{\alpha}$ con u: es decir la restricción de $\tilde{\alpha}$ a $Z \cup A \cup B$ se compara con la función u^*: $Z \cup A \cup B \to \mathbb{R}$ que vale u sobre Z, cero en A y uno en B.

Como se supuso que i (K) y j (K) son ambos cerrados en L, Z será también cerrado en L. En consecuencia la función u^* (que está bien definida) es continua.

Calculamos $\tilde{\alpha} - u^*$: $Z \cup A \cup B \to \mathbb{R}$. Esta función se anula en A, B y en i(K).

4. Aplicamos a $(\tilde{\alpha} - u^*) \circ j'$: $K \to \mathbb{R}$ (j': $K \to Z$ factoriza a j: $K \to L$) la propiedad de Urysohn de j: si denotamos por C el conjunto reunión de A, B y i (K), la función $(\tilde{\alpha} - u^*) \circ j'$ separa evidentemente j^{-1} C del varío (tomando el valor cero, sobre j^{-1} C); entonces existe una función continua r: $L \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\text{(a) } r \circ j = (\tilde{\alpha} - u^*) \circ j' \quad , \quad \text{(b) } r^{-1}\{0\} \supset C$$

5. Definimos π : $L \to \mathbb{R}$, como $\tilde{\alpha} - r$ y observamos que cumple las condiciones requeridas en 4.1.1.

4.2. ***Aplicación:*** *Si* Y: $\Delta \to$ *Top es un espacio cosimplicial, y si para cada* n *y cada* $i = 0, \ldots, n$ *las aplicaciones continuas.*

$$\partial_i = Y(\delta_i) : Y(n-1) \to Y(n)$$

son de Urysohn y si además suponemos que, en Y (n), los ∂_i (Y (n − 1)) son cerrados, entonces las celdas (Y (n), ∂ Y (n)) cumplen la condición: la inclusión del "borde" ∂ Y (n) en Y (n) es una cofibración de Urysohn.

4.3. *Teorema Central*

1. ***Teorema:*** (Normalidad de realizaciones generalizadas). Sea Y : $\Delta \to$ Top un espacio cosimplicial, que satisface (i) la condición M.0.1 (ii) para cada n $\geqslant$ 1 y cada monomorfismo δ_i : (n - 1) $\to$ (n), la función Y (δ_i) es de Urysohn y tiene imagen cerrada en Y (n), y finalmente, (iii) Y (0) es un espacio normal. Entonces, cualquiera que sea el conjunto simplicial X, el espacio R_Y (X) cumple.

a) El n-esimo esqueleto R_Y $(X)^{(n)}$ es un espacio normal.

b) R_Y (X) es normal.

Este teorema es conclusión inmediata de los resultados aparecidos en (4) y de 4.2.

2. Un caso particular importante es el siguiente, en el que suponemos, por separado, que Y satisface M.0.1.

Los Y (n) son compactos Hausdorff, (en este caso es menester cuidarse de pensar que la propiedad de Hausdorff se transmita al espacio R_Y (X). Pero ese hecho no se necesita en el teorema 4.3.1.).

3. Nótese que si Y (0) es normal y las Y (∂) son de Urysohn entonces, todos los Y (n) serán normales. Vamos a reescribir el Teorema 4.3.1., haciendo desaparecer la hipótesis sobre los Y (∂) y reemplazándola por la de normalidad (y Hausdorff) sobre las Y (n). A continuación veremos algunas de esas características, antes de presentar la otra versión del Teorema.

4. (a) Si A $\to$ B $\to$ A son aplicaciones continuas y ri = id_A entonces (i) i es inyectiva, r sobreyectiva, (ii) A se identifica, por i, con un sub-espacio de B, (iii) A tiene la topología cociente de B, por r. (b) Comparando las funciones i $\circ$ r: B $\to$ B y la identidad de B se puede concluir que, si B es de Hausdorff, i (A) es cerrado en B. (c) Es el caso del espacio cosimplicial Y: Las funciones Y (∂_i): Y (n) $\to$ Y (n + 1) y y (σ_i): Y (n + 1) $\to$ Y (n) hacen el papel de i y de r respectivamente. Así que, con cualquiera de las inclusiones Y (∂_i) identifica Y (n) con su imagen en Y (n + 1). Si además los Y (K) son de Hausdorff, entonces dichas imágenes son cerradas, como se exigía en la hipótesis (ii) del teorema. (d) Si suponemos que los Y (n), en un espacio cosimplicial, son normales, además de Hausdorff, las inclusiones Y (∂) van a resultar de Urysohn.

Teorema: Si un espacio cosimplicial Y cumple (a) M.0.1, (b) Los Y (n) son normales Hausdorff entonces, R_Y (X) es normal, sea cual fuere el conjunto simplicial X.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. FRITSCH. *"Remark on the simplicial cosimplicial tensor product"*. Versión actualizada de *"Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen I."* Math Z. 108 (1969). 329 – 367.

[2] A. LUNDELL and S. WEINGRAM: *The topology of C.W.-Complexes.* Van Nostrand. Reinhold Co. 1969.

[3] J. MILNOR. *"The geometric realization of a semisimplicial complex,"* Ann. of. Math 65 (1957).

[4] C. RUIZ S. *"Topologia de Complejos Celulares Generales"* Curso de Postgrado U. Nal. (1979).

[5] C. RUIZ S. and R. RUIZ S.: *"Remarks about the Eilenberg – Zilber type descomposition in Co-simplicial sets"*, Rev. Col. Mat. XII, 3 - 4 (1978) 62-81.

[6] C. RUIZ S. an' R. RUIZ S.: *"Characterization of the set.– Theoretical geometric realization in th. noneuclidean case"*. Proccedings of the Am. Math Soc. 81,2 (1981) 321-324.

[7] R. RUIZ S.: *"Change of models in top And $\Delta^\circ S$"*. Doctoral Thesis. Temple Univ. (1978).

CARLOS J. RUIZ SALGUERO
Dpto. de Matemáticas
U. Nacional de Colombia
Bogotá. D. E.

JOAQUIN LUNA TORRES
Dpto. de Matemáticas
U. Distrital "Francisco
José de Caldas"
Bogotá. D. E.