UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE SCHUR-ZASSENHAUS

por

MARIA PILAR MARTIN SALVADOR

ABSTRACT.

If A is a group of automorphisms of a finite group G and Π is a set of prime numbers, we give a sufficient condition for the existence of A-invariant Hall Π-subgroups in G. In the particular case of $A = 1$ our result is the well-known theorem of Schur-Zassenhaus.

Una forma de obtener nuevos resultados en grupos finitos consiste en demostrar enunciados válidos para cualquier grupo de automorfismos, A, del grupo, de manera que la particularización, para el grupo de automorfismos trivial o para el grupo de automorfismos internos, proporcione resultados ya conocidos previamente. Así, por ejemplo, P. Hall [3] introdujo el subgrupo A-Frattini como generalización del subgrupo de Frattini de un grupo y, posteriormente, en [2] y en [4] se han demostrado propiedades del subgrupo A-Frattini que, para el grupo de automorfismos trivial, resultan ser propiedades ya conocidas del subgrupo de Frattini. Igualmente, P. Schmid [6] definió y estudió la acción $\mathcal{F}$-hipercentral ($\mathcal{F}$ es una formación definida localmente) como generalización de las formaciones definidas localmente. En la misma línea hemos estudiado [5] los grupos A-nilpotentes y los grupos A-Sylow como generalizaciones de los grupos nilpotentes.

Siguiendo esta misma idea, en esta nota obtenemos una condición suficiente para la existencia en G de Π-subgrupos de Hall A-invariantes, siendo Π un conjunto de números primos y A un grupo de automorfismos del grupo finito G.

Teorema.

Sea $A \leqq \mathrm{Aut}(G)$ con $(|G|, |A|) = 1$ y tal que G o A son resolubles y sea N un Π'-subgrupo de Hall normal de G con N o G/N resolubles. Entonces:

a) G tiene un Π-subgrupo de Hall A-complemento de N en G.

b) Dos A-complementos de N en G son conjugados por un elemento de $C_G(A)$.

Un subgrupo de G se dice A-subgrupo si es invariante por todo elemento de A. Si N es un A-subgrupo normal de G, otro A-subgrupo H de G se dice A-complemento de N si $G = NH$ y $N \cap H = 1$. Si Π es un conjunto cualquiera de números primos entendemos por Π' el complementario, de Π en el conjunto de todos los números primos. Puesto que, según el teorema de Feit-Thompson, todo grupo de orden impar es resoluble, la condición de resolubilidad en las hipótesis del teorema podría eliminarse, por lo que nuestro resultado, en el caso particular de $A = 1$, es el conocido teorema de Schur-Zassenhaus.

La notación que hemos adoptado es la que sigue Gorenstein [1], según la cual $H^x = x^{-1} Hx$ para $x \in G$ y $H \leqq G$; $N_G(H) = \{x \in G / H^x = H\}$; $C_G(A) = \{x \in G / x^a = a(x) = x \ \forall a \in A\}$; $[z, A] = < z^{-1} z^a / a \in A >$.

Demostración del teorema.

a) Por el teorema de Schur-Zassenhaus existe un subgrupo H de G, tal que $G = NH$ y $N \cap H = 1$. Llamemos G^* al producto semidirecto de G por A. Puesto que $G \trianglelefteq G^*$ y $(|N|, |G/N|) = 1$, se tiene que N es característico en G y normal en G^*. Para todo $y \in G^*$ tenemos que $G = NH^y$ y $N \cap H^y = 1$ por lo que H^y es otro complemento de N en G. Por consiguiente, existe un elemento $g \in N$ tal que $H^y = H^g$, es decir, $gy^{-1} \in N_{G^*}(H)$ y obtenemos $G^* = G\, N_{G^*}(H)$. Llamemos $L = N_{G^*}(H)$. Puesto que $A \simeq G^* / G = G\, L / G \simeq L / G \cap L$, usando de nuevo el teorema de Schur-Zassenhaus, existe un complemento B de $L \cap G$ en L. Como, además, $G^* = G\ L = G\,(L \cap G)\, B = G\, B$ y $G \cap B = 1$ se sigue que B es otro complemento de G en G^* y A y B son conjugados por un elemento de G, es decir, existe un elemento $x \in G$ tal que $A = B^x$. Como $B \leqslant N_{G^*}(H)$, B deja invariante H, por lo que $A = B^x$ deja invariante H^x. Como, además, $G = NH^x$ y $N \cap H^x = 1$, resulta que H^x es un A-complemento de N en G.

b) Supongamos que H y K son dos A-complementos de N en G. Por el teorema de Schur-Zassenhaus, existe un elemento $x \in N$ tal que $H^x = K$. Razonando como en la primera parte del apartado a), se tiene

$$G^* = G\, N_{G^*}(K) = N\, K\, N_{G^*}(K) = N\, N_{G^*}(K) = N\, L,$$

siendo $L = N_{G^*}(K)$; ya que A deja invariante H, A^x deja invariante $H^x = K$; es decir, A y A^x están contenidos en L y, como $A^x \simeq A \simeq G^*/G = GL/G \simeq L/G \cap L$, obtenemos $L = (G \cap L)\, A$ y $L = (G \cap L)\, A^x$; pero $G \cap L = N\, K \cap L = (N \cap L)\, K$, por lo cual $L = (N \cap L) K A$ y $L = (N \cap L) K A^x$. Como $N \cap L$ o $L / N \cap L$ son resolubles, serán $K A$ y KA^x conjugados en L, es decir, existe un elemento $y \in N \cap L$ tal que $(K A^x)^y = K A$, de donde $(K A^x)^y = K^y A^{xy} = K A^{xy} = KA$ por lo que $A^{xy} \leqslant K A$; si llamamos $z = xy$ se tiene que $z \in N$ y, además,

$$H^z = H^{xy} = (H^x)^y = K^y = K,$$

es decir, H y K son conjugados por z y $z \in C_G(A)$. En efecto, por una parte, $[z, A] \leqq N$ ya que $N \leqq G^*$ y $z \in N$. Por otra parte, $[z, A] \leqq KA$ pues $A^z \leqq K A$. Por tanto, tenemos $[z, A] \leqq N \cap K A = 1$ y $z \in C_G(A)$.

REFERENCIAS

[1] Gorenstein. D. "Finite groups" Harper-Row. New York (1968).

[2] Gruenberg, K.W. "Cohomological Topics in Group Theory" Lecture Notes in Math., 143, 97-117 (1970).

[3] Hall, P. "The Frattini subgroups of finitely generated groups" Proc. London Math., 11, 327-352 (1961).

[4] Martín, M.P. "Sobre los subgrupos Frattini relativos a automorfos y las relaciones entre ellos" Actas VIII Jor. Lus-Espanh. Mat., Vol. I, Coimbra (1981).

[5] Martín, M.P. "Generalitzacions per automorfos dels grups nilpotents" Publicacions Secc. Mat. U.A.B. Vol. 27, nº 2 (1983).

[6] Schmid. P. "Formatinen und Automorphismengruppen" J. London Math. Soc. 7, 83-94 (1973).

Universidad de Valencia