SOBRE LA APROXIMACION NUMERICA DE UN PROBLEMA DE CONTROL GEOMETRICO

por

ENRIQUE FERNÁNDEZ CARA

ABSTRACT.

The purpose of this paper is to introduce a new method for solving an optimum design problem: determining the ***aerodynamic*** body of ***minimum-drag profile*** at constant velocity in a viscous incompressible fluid. The stationnary Navier-Stokes problem (in velocity-pressure formulation) is discretized by means of a mixed finite element method. In some particular cases, the existence of solutions allows us to prove convergence results.

1. INTRODUCCIÓN. EL PROBLEMA FÍSICO.

Un problema clásico de la Mecánica de Fluidos es la determinación del cuerpo aerodinámico (por ejemplo de volumen dado) que opone resistencia mínima al arrastre cuando se desplaza a velocidad constante $\vec{Z}$ en un fluido viscoso incompresible. Esta cuestión ha sido tratada por O. Pironneau [6] desde un punto de vista teórico, y por R. Glowinski & O. Pironneau [2] en cuanto a su resolución numérica. En este trabajo nos proponemos introducir un nuevo método de cálculo de las soluciones aproximadas (estrechamente relacionado con el de A. Marrocco & O. Pironneau [3]), así como mostrar ciertas propiedades de convergencia.

En términos matemáticos, si $\mathcal{O} \subset R^N$ ($N = 2$ ó 3) es un abierto acotado (la región ocupada por el fluido), y $S = \overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$ es el *obstáculo*, después de tomar un sistema de referencia fijo respecto de S, el campo de velocidades del fluido $\vec{u}$ y la presión p son solución del problema estacionario de Navier-Stokes:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Hallar } (\vec{u}, p) \in (\vec{u}_0 + H_0^1(\mathcal{O}\backslash S)^N) \times L_0^2(\mathcal{O}\backslash S) \textit{ tal que:} \\ 2\nu \int_{\mathcal{O}\backslash S} \sigma_{ij}(\vec{u})\, \sigma_{ij}(\vec{v}) + \int_{\mathcal{O}\backslash S} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j - \int_{\mathcal{O}\backslash S} p \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \qquad\qquad \forall v \in H_0^1(\mathcal{O}\backslash S)^N, \\ \int_{\mathcal{O}\backslash S} q \cdot \operatorname{div} \vec{u} = 0 \qquad \forall q \in L_0^2(\mathcal{O}\backslash S). \end{array}\right| \tag{1.1a}$$

En (1.1), $\vec{u}_0$ es una función de $H^1(\mathcal{O}\backslash S)^N$ que verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{u}_0 = 0 \textit{ en } \mathcal{O}\backslash S, \\ \vec{u}_0 = \vec{Z} \textit{ sobre } \partial \mathcal{O}, \\ \vec{u}_0 = 0 \textit{ sobre } \partial S. \end{array}\right| \tag{1.1b}$$

En lo que sigue se supondrá que $\partial \mathcal{O}$ es suficientemente regular (por ejemplo de clase C^1 a trozos acoplados por ángulos no nulos)[(1)]. En la práctica, $\bar{\mathcal{O}}$ será un polígono convexo. Sea $\mathcal{C}$ una familia de abiertos $\Omega \subset\subset \mathcal{O}$ de frontera continua y parametrizable a trozos y llamemos $\mathcal{S}$ a la familia de los correspondientes $S = \bar{\Omega}$, donde $\Omega \in \mathcal{C}$. Se supone que existe un cerrado $U \subset \mathcal{O}$ que contiene a todo elemento de $\mathcal{S}$. En estas condiciones siempre existe una función

$$\vec{u}_0 \in H^1(\mathcal{O}\backslash S)^N$$

que verifica (1.1b) y la condición (cf. O. A. Ladyzhenskaya [4])

$$\operatorname{sop}(\vec{u}_0) \subset \mathcal{O}\backslash U. \tag{1.1c}$$

El problema de control geométrico puede ahora formularse como sigue:

$$\min_{S \in \mathcal{S}} \left\{ \nu \int_{\mathcal{O}\backslash S} \sigma_{ij}(\vec{u})\, \sigma_{ij}(\vec{u}) \,/\, (\vec{u}, p) \textit{ es solución de } (1.1a) \right\}. \tag{1.2}$$

Obsérvese que el funcional

$$\xi(S) = \nu \int_{\mathcal{O}\backslash S} \sigma_{ij}(\vec{u})\, \sigma_{ij}(\vec{u}) \ , \ (\vec{u}, p) \textit{ solución de } (1.1a), \tag{1.3}$$

(1) Véase por ejemplo [1].

asocia a cada posible obstáculo $S \in \mathcal{S}$ la energía asociada que se disipa en el fluido, lo que supone (salvo un factor y términos de orden mayor en

$$d = m(S)/m(\mathcal{O}))$$

una buena aproximación de la resistencia al arrastre que ofrece S.

Recordemos los siguientes resultados de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de estado:

Teorema 1.1. (O. A. Ladyzhenskaya [4]).

En las condiciones precedentes, el problema (1.1a) admite al menos una solución para cada $S \in \mathcal{S}$.

Teorema 1.2. (R. Finn [5]).

Si ∂S es una hipersuperficie lipschitziana a trozos,(2) y

$$\frac{1}{\nu} \|\vec{u}_0\|_{1,\mathcal{O}} \leqslant \mu_1^{1/4} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2} \tag{1.4a}$$

donde μ_1 es el menor valor propio del operador Δ en $\mathcal{O}\backslash S$ con condiciones de Dirichlet homogéneas, o bien se tiene(3)

$$\nu > N^{1/2} D_{\mathcal{O}} |\vec{u}|_{1,\mathcal{O}} \quad ; \ D_{\mathcal{O}} = \sup_{\vec{v} \in H^1(\mathcal{O})^N} \frac{\|\vec{v}\|_{L^4}}{|\vec{v}|_{1,\mathcal{O}}}, \tag{1.4b}$$

entonces la solución de (1.1a) es única. Además si $\partial \mathcal{O}$ y ∂S son suficientemente regulares, se verifica

$$\vec{u} \in W^{2,r}(\mathcal{O}\backslash S) \qquad \forall r > 1$$

$$p \in H^1(\mathcal{O}\backslash S),$$

(2) Es decir, en todo punto x de ∂S existe un entorno $N(x)$ tal que $N(x) \cap \partial S$ puede ser descrito por cartas locales lipschitzianas.

(3) $\|\vec{v}\|_{L^4} = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{O}} |v_i|^4 \right)^{1/4}$.

i.e., el par $(\vec{u}, p)$ es una solución clásica del problema estacionario de Navier-Stokes

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{array}\right\} \textit{en} \quad \mathcal{O}\backslash S, \\ \vec{u} = \vec{z} \quad \textit{sobre} \quad \partial \mathcal{O}, \\ \vec{u} = 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial S. \end{array}\right| \tag{1.5}$$

En lo que sigue se supondrá que se verifica al menos una de las condiciones (1.4), de suerte que todos los problemas de Navier-Stokes considerados admitirán una solución única.

El problema (1.1) - (1.2) posee especial interés (desde el punto de vista de la Ingeniería) cuando la familia $\mathcal{S}$ viene dada por alguna de las $\mathcal{S}_i$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ descritas a continuación.

Sea C_0 la familia de todos los abiertos Ω de frontera continua y parametrizable a trozos por hipersuperficies rectificables tales que

$$\Omega \subset U,$$

y sea $\mathcal{S}_0$ la familia de las correspondientes adherencias

$$S = \bar{\Omega}, \quad \textit{donde} \quad \Omega \in C_0.$$

Definimos entonces las familias $\mathcal{S}_i$ por las relaciones siguientes:

(i) *Carenas de volumen dado* ($v_1 > 0$, constante conocida)

$$\mathcal{S}_1 = \{ S / S \in \mathcal{S}_0 ; m(S) = v_1 \} . \tag{1.6a}$$

(ii) *Carenas de medida superficial dada* ($v_2 > 0$, constante conocida).

$$\mathcal{S}_2 = \{ S / S \in \mathcal{S}_0 ; \int_{\partial S} d\sigma = v_2 \}.^{(4)} \tag{1.6b}$$

(iii) *Carenas alrededor de un objeto dado* (D abierto conocido no vacío, $D \subset\subset U$).

$$\mathcal{S}_3 = \{ S / S \in \mathcal{S}_0 ; S \supset D \}. \tag{1.6c}$$

(4) $d\sigma$ es el elemento de área de ∂S.

Otros casos interesantes, por simplicidad no mencionados aquí, pueden consultarse en O. Pironneau [1, 6].

2. UN RESULTADO DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES.

En esta sección enunciaremos un resultado de existencia de soluciones del problema (1.1) — (1.2) que generaliza (y "formaliza" en un cierto sentido) el de O. Pironneau [6]. En lo que sigue, se supone que la familia C verifica la propiedad siguiente:

Propiedad (P.1).

De toda sucesión $\{\Omega_k\}$ *de abiertos de* C *puede extraerse una subsucesión* $\{\Omega_\mu\}$ *tal que:*

(a) $\bar{\Omega}_\mu$ *converge en el sentido de la distancia de Hausdorff hacia un*

$$S = \bar{\Omega} \in S.$$

(b) *Las funciones características* χ_μ *de los correspondientes* $\mathcal{O}\backslash\Omega_\mu$ *convergen en* $L^\infty(\mathcal{O})$ *débil* hacia una función* χ *que se anula c.p.d. en* S.

Nota 2.1. Es evidente que toda familia C que cumple la propiedad (P.1) es cerrada para la topología de Hausdorff.

Teorema 2.1.

En las condiciones precedentes, si la familia C verifica la propiedad (P.1), el problema (1.1) — 1.2) admite solución.

La demostración de este resultado puede hallarse en E. Fernández Cara [7]. En particular, si todas las fronteras $\partial\Omega$, donde $\Omega \in C$, son parametrizables a trozos sobre los mismos trozos por hipersuperficies equilipschitzianas (cf. O. Pironneau [6]), el problema (1.1) — (1.2) admite al menos una solución.

Nota 2.2. Si S es la familia S_2, definida por (1.6b), una sencilla aplicación del Principio de Elección de Helly prueba que S verifica la propiedad (P.1).

3. APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS MIXTOS.

Seguidamente recordaremos un método de aproximación de la ecuación de estado (1.1a) por elementos finitos mixtos; el esquema aproximado será utilizado en la Sección 4 para formular el problema aproximado de diseño óptimo, cuya resolución es, como se verá, relativamente sencilla. Para simplificar la notación, supongamos que $N = 2$, y que el abierto $\Omega_h = \mathcal{O}\backslash S$ es poligonal.

Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación de $\overline{\Omega}_h$, y sea $\widetilde{\mathcal{T}}_h$ la triangulación obtenida uniendo los puntos medios de los lados de $\mathcal{T}_h$ (véase la Figura 1). En lo que sigue se utilizarán los espacios siguientes:

$$\left.\begin{aligned} X_h(\Omega_h;\mathcal{T}_h) = \Big\{ \vec{v}_h / \vec{v}_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}_h)^2 ; \vec{v}_h|_{\widetilde{T}} \in P_1(\widetilde{T})^2 \quad \forall\, \widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}_h ; \\ v_h = 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega_h \Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (3.1.)$$

$$\left.\begin{aligned} M_h(\Omega_h;\mathcal{T}_h) = \Big\{ q_h / q_h \in L^2(\Omega_h);\ q_h|_T \in P_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h ; \\ \int_{\Omega_h} q_h = 0 \Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

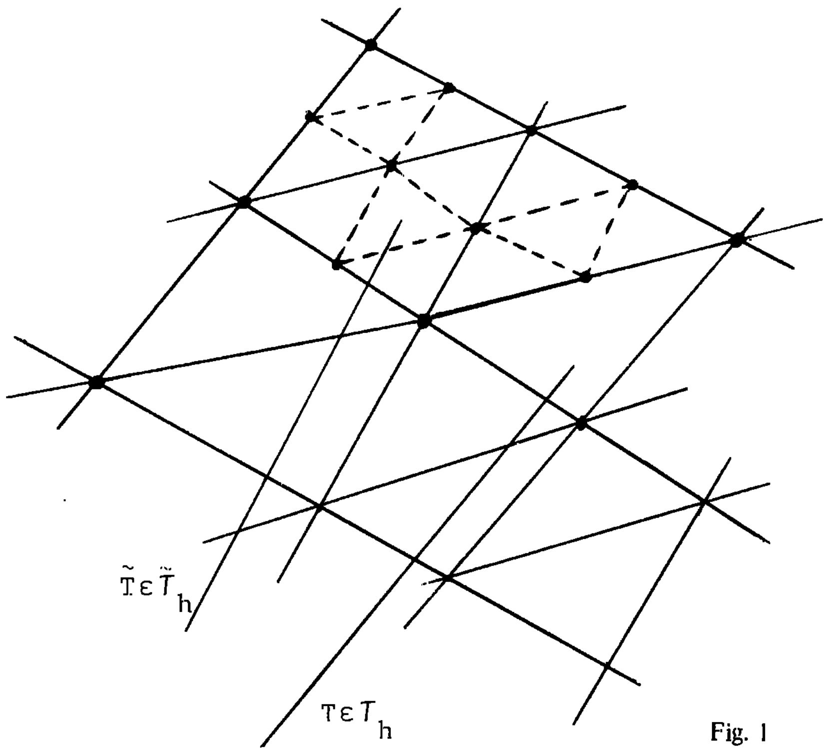

Fig. 1

Es bien sabido que $X_h(\Omega;\mathcal{T}_h)$ (resp. $M_h(\Omega;\mathcal{T}_h)$) es un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)^2$ (resp. $L_0^2(\Omega)$). Además, toda función $\vec{v}_h \in X_h(\Omega;\mathcal{T}_h)$ (resp. $q_h \in M_h(\Omega;\mathcal{T}_h)$) está unívocamente determinada por sus valores en los *vértices de los triángulos* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}_h$ (resp. en los *baricentros de todos salvo uno de los triángulos* $T \in \mathcal{T}_h$).

El problema aproximado de Navier-Stokes se formula como sigue:

$$\left.\begin{array}{l}
\textit{Hallar } (\vec{u}_h, p_h) \in (\vec{u}_0 + X_h(\Omega;\mathcal{T}_h)) \times M_h(\Omega;\mathcal{T}_h), \textit{ tal que:} \\[2ex]
2\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u}_h)\,\sigma_{ij}(\vec{v}_h) + \int_\Omega u_{ih} \dfrac{\partial u_{ih}}{\partial x_j} v_{jh} \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad \int_\Omega p_h \cdot \operatorname{div} \vec{v}_h = 0 \qquad \forall \vec{v}_h \in X_h, \\[2ex]
\int_\Omega q \cdot \operatorname{div} \vec{u}_h = 0 \qquad \forall q \in M_h.
\end{array}\right\} \quad (3.3)_h$$

Se puede demostrar (como en Girault & P. A. Raviart [8]) que el problema $(3.3)_h$ admite al menos una solución, que por otra parte es única si g satisface la desigualdad

$$\nu \geqq C_{\mathcal{O}}, \tag{3.4}$$

donde $C_{\mathcal{O}}$ es una constante positiva que sólo depende de $\mathcal{O}$.

En estas condiciones, si H es una sucesión generalizada de R_+ convergente hacia 0, y a cada $h \in H$ le asociamos una triangulación $\mathcal{T}_h$ de tal forma que la familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in H}$ sea *regular* (en el sentido de P.G. Ciarlet [9]), las soluciones aproximadas $(\vec{u}_h, p_h)$ convergen fuertemente en $H^1(\Omega_h)^N \times L_0^2(\Omega_h)$ hacia la solución $(\vec{u}, p)$ del problema de Naviert-Stokes en Ω_h (para estimaciones del error y otros detalles, cf. [8]).

En las secciones siguientes supondremos que se verifica la relación (3.4), de suerte que todos los problemas aproximados que se considerarán admitirán una solución única.

4. UN MÉTODO DE RESOLUCIÓN.

Podemos ya describir el método de resolución aproximada del problema (1.1) – (1.2), objetivo principal de nuestro trabajo. Para no complicar excesivamente el desarrollo que sigue, supondremos que $\bar{\mathcal{O}}$ es un polígono convexo de R^2.

Sea H una sucesión generalizada de R_+, convergente hacia 0. A cada $h \in H$ le asociamos una familia S_h de K_h-tuplas $\left\{a_h^k\right\}_{k=1}^{K_h}$ de puntos de $\overline{\mathcal{O}}$ que definen:

(a) *Los subdominios* $\Omega_h = \mathcal{O} \setminus S_h$, *donde* $S_h \subset U$ *es el cerrado poligonal cuyos vértices son los* n_h *primeros* a_h^k.

(b) *Las triangulaciones* T_h *y* $\widetilde{T}_h$ *de* $\overline{\Omega}_h$.

Se supone que una de las condiciones (1.6) es verificada por todos los S_h definidos por los elementos de S_h. Para cada $h \in H$, el problema aproximado de diseño óptimo se escribe:

$$\min_{\left\{a_h^k\right\} \in S_h} \left\{ \nu \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\vec{u}_h)\, \sigma_{ij}(\vec{u}_h) \;/\; (\vec{u}_h, p_h) \text{ } \textit{es solución de } (3.3)_h \right\}. \qquad (4.1)_h$$

Nota 4.1. Dado que $(4.1)_h$ es, para cada $h \in H$, un problema de minimización finito-dimensional con dependencia continua del estado aproximado $\vec{u}_h$ respecto de la variable

$$\left\{a_h^k\right\}_{k=1}^{K_h},$$

y que $\overline{\mathcal{O}}$ es acotado, se tendrá la existencia de soluciones de $(4.1)_h$, siempre que S_h sea un cerrado de $(R^2)^{K_h}$. En la práctica, conviene construir los a_h^k a partir de curvas transversales (que impidan la degeneración de los triángulos de T_h); un análisis detallado de la situación aparecerá en E. Fernández Cara [10].

En lo que sigue, denotaremos v_h^k (resp. w_h^k) las funciones de base usuales (continuas y afines por triángulos) asociadas a la triangulación T_h (resp. $\widetilde{T}_h$). El símbolo $\vec{\alpha}^\ell$ indicará un desplazamiento del vértice a^ℓ de T_h, así como la función de $L^2(\Omega)^2$ que se reduce a un vector constante en cada triángulo de T_h y toma los valores

$$\vec{\alpha}^\ell(x) = \begin{cases} \vec{\alpha}^\ell, & \textit{si } x, a^\ell \in T, \quad T \in T_h, \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

En Teoría de Control, desde el punto de vista numérico, las condiciones de optimalidad del problema deben obtenerse directamente sobre la formulación aproximada, y no deducirse por discretización de aquellas que se obtienen a partir del problema continuo (como se hace en R. Glowinski & O. Pironneau [2]). Ello justifica la importancia del resultado que sigue:

Proposición 4.1.

Con la notación precedente, existe una constante $\Lambda > 0$ (que sólo depende de $\mathcal{O}$ y de $\vec{u}_0$) tal que si $\nu > \Lambda$, y el vértice a_h^ℓ de $\mathcal{T}_h$, situado en U, sufre un "pequeño" desplazamiento $\vec{\alpha}^\ell$, el valor del funcional

$$\xi_h(\{a_h^k\}) = \nu \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\vec{u}_h)\,\sigma_{ij}(\vec{u}_h) \tag{4.2}$$

varía en

$$\delta\,\xi_h = L_h^\ell(\vec{u}_h, p_h)\,.\,\vec{\alpha}^\ell + o(\vec{\alpha}^\ell), \tag{4.3}$$

donde la notación $o(\vec{\alpha}^\ell)$ indica que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{o(\lambda\,\vec{\alpha}^\ell)}{\lambda} = 0\,, \tag{4.4}$$

y L_h^ℓ viene definido por

$$L_h^\ell(\vec{u}_h, p_h)\cdot\vec{\alpha}^\ell \equiv \Pi_{1h}(\vec{u}_h, \vec{w}_h) + \Pi_{2h}(\vec{u}_h; \vec{w}_h) + \Theta_h(p_h, \vec{w}_h) - 2\nu \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\vec{u}_h)\,\sigma_{ij}(v_h^\ell(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\vec{u}_h) + \nu \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\vec{u}_h)\,\sigma_{ij}(\vec{u}_h)(\nabla v_h^\ell\,.\,\vec{\alpha}^\ell) \tag{4.5a}$$

$$\Pi_{1h}(\vec{u}, \vec{w}) \equiv 2\nu \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(v_h^\ell(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\vec{w}) + \sigma_{ij}(v_h^\ell(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{w}) - \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{w})(\nabla v_h^\ell.\vec{\alpha}^\ell)\,, \tag{4.5b}$$

$$\Pi_{2h}(\vec{u}; \vec{w}) \equiv \int_{\Omega_h} (\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\,\vec{u}\,.\,\vec{u}\,(\nabla v_h^\ell\,.\,\vec{w}) - (\vec{w}.\nabla)\vec{u}.\vec{u}(\nabla v_h^\ell.\vec{\alpha}^\ell)\,, \tag{4.5c}$$

$$\Theta_h(p, \vec{w}) \equiv \int_{\Omega_h} p\,(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\,\vec{w}\,.\,\nabla v_h^\ell + 2\int_{\Omega_h} (p.\mathrm{div}\,\vec{w})(\nabla v_h^\ell\cdot\vec{\alpha}^\ell), \tag{4.5d}$$

y $\vec{w}_h$ es la única solución del problema adjunto:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\textit{Hallar } \vec{w}_h \in X_h(\Omega_h; T_h) \textit{ tal que} \\[2ex]
\int_{\Omega_h} q_h \,.\, \operatorname{div} \vec{w}_h = 0 \qquad \forall q_h \in M_h(\Omega_h; T_h); \\[2ex]
2\nu \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\vec{w}_h)\,\sigma_{ij}(\vec{z}_h) + \int_{\Omega_h} \vec{w}_h \cdot \nabla\, (\vec{u}_h \cdot \vec{z}_h) = \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad = 2\nu \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\vec{u}_h)\,\sigma_{ij}(\vec{z}_h) \\[2ex]
\quad \forall \vec{z}_h \in X_h(\Omega_h; T_h) \textit{ tal que} \\[2ex]
\int_{\Omega_h} q_h \,.\, \operatorname{div} \vec{z}_h = \int_{\Omega_h} \{ (\vec{\alpha}^{\ell} \cdot \nabla)\, \vec{u}_h \cdot \nabla v_h^{\ell} \cdot \operatorname{div} \vec{u}_h\, (\nabla v_h^{\ell} \cdot \vec{\alpha}^{\ell}) \}\, q_h \\[2ex]
\quad \forall q_h \in M_h(\Omega_h; T_h).
\end{array}
\right|
\tag{4.6}
$$

En el resto de esta Sección omitiremos el subíndce h. Recordemos que dada la triangulación T del abierto Ω, $\widetilde{T}$ es la triangulación obtenida al unir los puntos medios de los lados de T.

La demostración de la Proposición 4.1 se basa en los cuatro Lemas que damos a continuación. A partir de este momento, designaremos Ω', T', $\vec{u}'$, etc. todos los elementos geométricos y funciones asociados a la k-tupla a'^{k} de S, donde

$$
a'^{k} = \begin{cases} a^{k}, & \textit{si } k \neq \ell, \quad 1 \leqq k \leqq K, \\[1ex] a^{\ell} + \vec{\alpha}^{\ell} & \textit{en caso contrario.} \end{cases}
\tag{4.7}
$$

Lema 4.1.

Con la notación que precede, si r es un entero no negativo, y

$$
f \in \prod_{\widetilde{T} \in \widetilde{T}} P_r(\widetilde{T}),
\tag{4.8}
$$

se tiene que

$$
\sum_{\widetilde{T} \in \widetilde{T}} \{ \int_{\widetilde{T}' \backslash \widetilde{T}} f \qquad \int_{\widetilde{T} \backslash \widetilde{T}'} f \} =
\tag{4.9}
$$

$$
= \int_{\Omega} \{ f\, (\nabla v^{\ell} . \vec{\alpha}^{\ell}) + v^{\ell}\, (\nabla f . \vec{\alpha}^{\ell}) \} + o\,(\vec{\alpha}^{\ell}).
$$

Demostración:

Sólo probaremos (4.9) en el caso de la Figura 2. Observemos por ejemplo que

$$\int_{T_1'\setminus T_1} f' - \int_{T_1\setminus T_1'} f = \int_{[a^\ell,\, a^{3\ell}]} f v^\ell (\vec{\alpha}^\ell \cdot \vec{n}_1)\, d\sigma +$$

$$+ \int_{[a^{3\ell},\, a^{1\ell}]} f v^\ell (\vec{\alpha}^\ell \cdot \vec{n}_1)\, d\sigma + \int_{[a^{1\ell},\, a^\ell]} f v^\ell (\vec{\alpha}^\ell \cdot \vec{n}_1)\, d\sigma + o(\vec{\alpha}^\ell) =$$

$$= \int_{\partial T_1} f v^\ell (\vec{\alpha}^\ell \cdot \vec{n}_1)\, d\sigma + o(\vec{\alpha}^\ell),$$

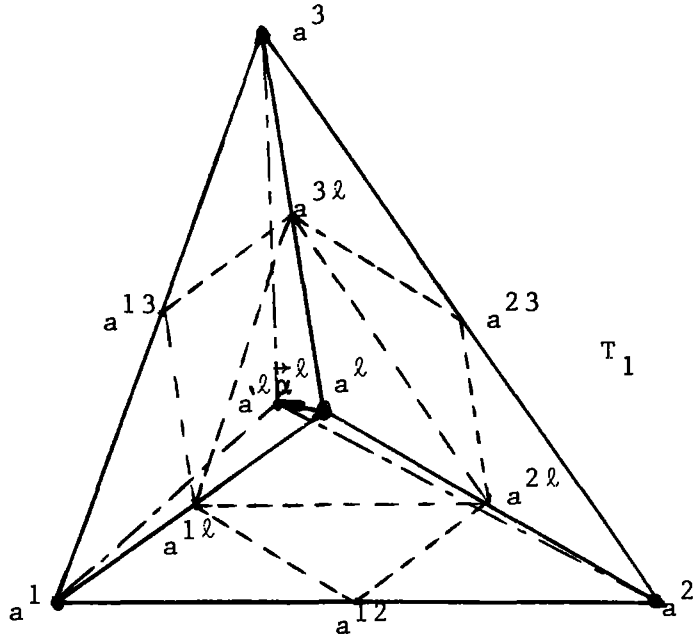

Fig. 2

donde $\vec{n}_1$ es el vector normal unitario exterior a T_1. Procediendo de forma análoga con todos los triángulos de la Figura, y aplicando en cada uno de ellos la fórmula de Green, resulta

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}} \left\{ \int_{\tilde{T}'\setminus\tilde{T}} f' - \int_{\tilde{T}\setminus\tilde{T}'} f \right\} &= \sum_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}} \int_{\partial\tilde{T}} f v^\ell (\vec{\alpha}^\ell \cdot \vec{n}_T)\, d\sigma + o(\vec{\alpha}^\ell) \\ &= \sum_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}} \int_{\tilde{T}} \nabla (f v^\ell) \cdot \vec{\alpha}^\ell + o(\vec{\alpha}^\ell). \end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

De forma análoga se prueba:

Lema 4.2.

Sea $T \in \mathcal{T}$, q la función característica del triángulo T, y f una función que verifica (4.8). Entonces, si $\delta q = q' - q$, tenemos

$$\int_\Omega \delta q . f = \int_{T_0} \{ f(\nabla v^\ell . \vec{\alpha}^\ell) + v^\ell (\nabla f . \vec{\alpha}^\ell) \} + o(\vec{\alpha}^\ell).$$

Lema 4.3.

Con la notación precedente, si $\delta w^i = w'^i - w^i$, se tiene:

$$\delta w^i(x) = \begin{cases} -(\nabla w^i . \vec{\alpha}^\ell) v^\ell + o(\vec{\alpha}^\ell), & \text{si } x, a^\ell \in \text{sop } (v^\ell), \\ o(\vec{\alpha}^\ell), & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \tag{4.11}$$

Demostración:

Por ejemplo, consideremos el caso en que x, $a^\ell \in \widetilde{T}$, $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}$, y sean a^i, a^j, a^k los vértices de $\widetilde{T}$. Entonces

$$\delta w^i(a^i) = w'^i(a^i) - w^i(a^i) = w'^i(a'^i - \vec{r}^i) - w^i(a^i) =$$

$$= -\nabla w^i . \vec{r}^i + o(\vec{\alpha}^\ell),$$

donde $\vec{r}^i = a'^i - a^i$ es el desplazamiento del vértice a^i. Procediendo análogamente con a^j y a^k, se deduce que

$$\delta w^i(a^m) = \begin{cases} -\nabla w^i . \vec{\alpha}^\ell + o(\vec{\alpha}^\ell), & \textit{si } m = \ell, \\ -\frac{1}{2} \nabla w^i . \vec{\alpha}^\ell + o(\vec{\alpha}^\ell), & \textit{si } m \neq \ell \end{cases}$$

Pero δw^i puede escribirse en $\widetilde{T}$ como la suma de una función afín y un término de orden mayor en $\vec{\alpha}^\ell$. Cuando $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ no contiene el vértice a^ℓ, pero $\widetilde{T} \subset$ sop (v^ℓ), un cálculo similar demuestra que

$$\delta w^i(a^m) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \nabla w^i . \vec{\alpha}^\ell + o(\vec{\alpha}^\ell), & \textit{si } v^\ell(a^m) \neq 0, \\ o(\vec{\alpha}^\ell), & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esto demuestra (4.11).

Nota 4.2. Globalmente,

$$\delta\, w^i = \cdot (\nabla w^i \cdot \vec{\alpha}^\ell)\, v^\ell + o\,(\vec{\alpha}^\ell)\,,$$

de donde $\delta\, w^i$ es la suma de una función que verifica (4.8) con $r = 1$ (pero no es continua y un término de orden superior en $\vec{\alpha}^\ell$. El Lema 4.3 generaliza en cierto sentido el Lema 4.2 de A. Marrocco & O. Pironneau [3].

Lema 4.4.

Sea H un espacio de Hilbert, $\pi\,(.\,,.)$ una forma bilineal, continua y coerciva sobre H:

$$\pi\,(v, v) \geqq \alpha\, \|v\|_H^2 \quad , \quad \forall\, v \in H, \quad \alpha > 0. \tag{4.12}$$

Sean B un operador lineal continuo de H en sí mismo, y χ, $f \in H$ tales que:

i) La variedad lineal

$$H\,(\chi) = \{\, w \,/\, w \in H, \quad B\, w = \chi \,\}$$

es no vacía.

ii) Si $u \in H$ verifica

$$\pi\,(u, v) = (f, v)_H \qquad \forall\, v \in \mathrm{Ker}\,(B),$$

entonces existe $v_0 \in H\,(\chi)$ tal que:

$$\pi\,(u, v_0) = (f, v_0)_H.$$

Entonces, el problema

$$\pi\,(u, v) = (f, v)_H \qquad \forall\, v \in H\,(\chi), \qquad u \in \mathrm{Ker}\,(B) \tag{4.13}$$

admite una solución única.

Demostración:

La hipótesis de coercividad (4.12) entraña la existencia de un único $\hat{u} \in \mathrm{Ker}(B)$ tal que

$$\pi(\hat{u}, \hat{v}) = (f, \hat{v})_H \quad , \quad \forall \hat{v} \in \mathrm{Ker}(B). \tag{4.14}$$

Además existe $v_0 \in H(\chi)$ tal que

$$\pi(\hat{u}, v_0) = (f, v_0)_H.$$

Entonces $\hat{u}$ es solución de (4.13).

Por otra parte, si u es solución de (4.13),

$$\pi(u, \hat{v}) = (f, \hat{v})_H \qquad \forall \hat{v} \in \mathrm{Ker}(B),$$

de donde la solución de (4.13) es única, y coincide con la solución (en Ker (B)) de (4.14).

Todos los elementos necesarios para probar las relaciones (4.3) – (4.6) están ya a nuestra disposición:

Demostración de la Proposición 4.1.

Sea ξ el funcional definido por (4.2). Se observa fácilmente que

$$\delta \xi = \nu \int_{\Omega'} \sigma_{ij}(\vec{u}') \sigma_{ij}(\vec{u}') - \nu \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \sigma_{ij}(\vec{u}) =$$

$$= 2\nu \int_{\Omega' \cap \Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \sigma_{ij}(\delta \vec{u}) + \nu \sum_{\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}} \left\{ \int_{T' \setminus T} \sigma_{ij}(\vec{u}') \sigma_{ij}(\vec{u}') - \right.$$

$$\left. - \int_{T \setminus T'} \sigma_{ij}(\vec{u}) \sigma_{ij}(\vec{u}) \right\} + o(\vec{\alpha}^{\ell}).$$

Pongamos

$$\vec{u} \equiv (u_1, u_2) \equiv \left(\sum_i \phi_1^i w^i \quad , \quad \sum_i \phi_2^i w^i \right) + \vec{u}_0 \, , \tag{4.16}$$

donde el índice i toma los valores asociados a aquellos vértices de $\widetilde{\mathcal{T}}$ que pertenecen a Ω. Entonces, dado que $a^{\ell} \in U$ y que $\vec{u}_0$ puede elegirse de soporte contenido en $\mathcal{O} \setminus U$ (cf. O.A. Ladyzhenskaya [4]), de acuerdo con el Lema 4.3,

$$\left.\begin{aligned} \delta \vec{u} &= \delta \vec{u} - \quad (\nabla u_1 \cdot \vec{\alpha}^{\ell}) v^{\ell}, (\nabla u_2 \cdot \vec{\alpha}^{\ell}) v^{\ell}) \ + \ o(\vec{\alpha}^{\ell}) \\ &\equiv \widetilde{\delta} \vec{u} - v^{\ell} (\vec{\alpha}^{\ell} \cdot \nabla) \vec{u} \ + \ o(\vec{\alpha}^{\ell}), \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

donde

$$\widetilde{\delta}\vec{u} \equiv \left(\sum_i \delta \phi_1^i \, w^i \ , \ \sum_i \delta \phi_2^i \, w^i \right). \tag{4.18}$$

En consecuencia, $\delta\,\xi$ viene dado por

$$\left.\begin{aligned} \delta\,\xi = {} & 2\,\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(\widetilde{\delta}\vec{u}) - 2\,\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(v^\ell\,(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\,\vec{u}) \\ & + \nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{u})\,(\nabla v^\ell.\vec{\alpha}^\ell) + o(\vec{\alpha}^\ell). \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

Por otra parte,

$$\left.\begin{aligned} & 2\,\nu \int_{\Omega'} \sigma_{ij}(\vec{u}')\,\sigma_{ij}(\vec{w}') + \int_{\Omega'} u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} w'_j + \int_{\Omega'} p' \operatorname{div}\vec{w}' = 0 \\ & \forall w' \in X(\Omega'; T'). \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Restando la primera ecuación de (3.3) de (4.20), y aplicando los Lemas 4.1-4.3, se obtiene:

$$\begin{aligned} & 2\,\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\widetilde{\delta}\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{w}) - 2\,\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(v^\ell\,(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\,\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{w}) + \\ & + 2\,\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{w})\,(\nabla v^\ell.\vec{\alpha}^\ell) - 2\,\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(v^\ell\,(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\,\vec{w}) + \\ & + \int_\Omega \widetilde{\delta}\,u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w_j + \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{\delta}\,u_i)\,w_j - \int_\Omega (\nabla u_i \cdot \vec{\alpha}^\ell) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w_j\,v^\ell - \\ & - \int_\Omega u_i\,(\nabla u_i \cdot \vec{\alpha}^\ell) \frac{\partial v^\ell}{\partial x_j} w_j - \int_\Omega u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\nabla w_j \cdot \vec{\alpha}^\ell)\,v^\ell + \\ & + \int_\Omega u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w_j\,(\nabla v^\ell.\vec{\alpha}^\ell) + \int_\Omega u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v^\ell\,(\nabla w_j \cdot \vec{\alpha}^\ell) + \\ & + \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v^\ell\,(\nabla u_i \cdot \vec{\alpha}^\ell) - \int_\Omega \widetilde{\delta}\,p \cdot \operatorname{div}\vec{w} - \\ & - \int_\Omega (p.\operatorname{div}\vec{w})\,(\nabla v^\ell.\vec{\alpha}^\ell) + \int_\Omega p\,(\vec{\alpha}^\ell.\nabla)\,\vec{w}\cdot\nabla v^\ell - \\ & - \int_\Omega (p.\operatorname{div}\vec{w})\,(\nabla v^\ell.\vec{\alpha}^\ell) = o(\vec{\alpha}^\ell), \end{aligned}$$

donde, para

$$p = \sum_{T \in \mathcal{T}} p(T)\, \chi_T$$

(χ_T es la función característica del triángulo T), hemos utilizado la notación

$$\tilde{\delta}\, p = \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta\, p(T)\, \chi_T. \tag{4.21}$$

De la expresión anterior se deduce que el par $(\tilde{\delta}\, \vec{u}, \tilde{\delta}\, p)$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} & 2\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\tilde{\delta}\, \vec{u})\, \sigma_{ij}(\vec{w}) + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \cdot \tilde{\delta}\, u_i)\, w_j \; \cdot \\ & \int_\Omega \tilde{\delta}\, p \cdot \operatorname{div} \vec{w} = \Pi_1(\vec{u}, \vec{w}) + \Pi_2(\vec{u}; \vec{w}) + \Theta(p, \vec{w}) + o(\vec{\alpha}^{\ell}) \\ & \forall\, w \in X(\Omega; \mathcal{T}). \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

Suponemos de momento que el problema adjunto de Navier-Stokes (4.6) admite una solución única $w \in X(\Omega; \mathcal{T})$. Entonces se tienen las igualdades

$$2\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\, \sigma_{ij}(\tilde{\delta}\, \vec{u}) = 2\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\tilde{\delta}\, \vec{u})\, \sigma_{ij}(\vec{w}) + \int_\Omega \nabla(\vec{u} \cdot \tilde{\delta}\, \vec{u}) \cdot w =$$

$$= \Pi_1(\vec{u}, \vec{w}) + \Pi_2(\vec{u}; \vec{w}) + \Theta(p, w),$$

de donde se deduce (4.5). Queda por probar tan sólo la existencia de una constante $\Lambda > 0$ tal que para $\nu > \Lambda$ el problema (4.6) admite solución. En primer lugar demostraremos que si ν es suficientemente grande, la forma bilineal

$$\Pi(\vec{w}, \vec{v}) \equiv 2\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{w})\, \sigma_{ij}(\vec{v}) + \int_\Omega \nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} \tag{4.23}$$

es coerciva sobre $H_0^1(\Omega)^2$. En efecto, integrando por partes se observa que

$$\int_\Omega \nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = -\int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) \operatorname{div} \vec{v} \qquad \forall\, \vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2. \tag{4.24}$$

Pero la desigualdad de Hölder muestra que

$$\int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) \operatorname{div} \vec{v} \leqq \left(\int_\Omega |\vec{u}|^4\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |\vec{v}|^4\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |\operatorname{div} \vec{v}|^2\right)^{1/2},$$

y los resultados de [4] aseguran la existencia de una constante $\Lambda_0(\mathcal{O}, \vec{Z})$ tal que

$$\int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v}) \operatorname{div}\vec{v} \leqq \Lambda_0 \left(\int_\Omega |\vec{v}|^4\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |\operatorname{div}\vec{v}|^2\right)^{1/2}.$$

Del Teorema de Inyección de Sobolev (cf. R.A. Adams [11]) y de la desigualdad de Korn (cf., por ejemplo, Duvaut & J. L. Lions [12]) se deduce la existencia de $\Lambda_1 (\mathcal{O}, \vec{Z}) > 0$ tal que

$$\int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v}) \operatorname{div}\vec{v} \leqq \Lambda_1 \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2.$$

Por tanto, cuando $\nu > \Lambda_1/2$, la forma (4.23) es coerciva. La demostración de la Proposición 4.1 se deduce fácilmente del Lema 4.4 para $\Lambda = \Lambda_1/2$.

Nota 4.3. De la Demostración del Lema 4.4 se deduce que (para $\nu > \Lambda$) $\vec{w}$ es también la única solución de:

$$\left.\begin{array}{l} 2\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{w})\,\sigma_{ij}(\vec{z}) + \int_\Omega \vec{w}\cdot\nabla(\vec{u}\cdot\vec{z}) = 2\nu\int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{z}) \\ \forall \vec{z} \in X(\Omega; T), \qquad \int_\Omega q\cdot \operatorname{div}\vec{z} = 0 \qquad \forall q \in M(\Omega; T). \end{array}\right\} \quad (4.25)$$

Podemos introducir la "presión" λ como un multiplicador de Lagrange asociado a la restricción

$$\int_\Omega q\cdot\operatorname{div}\vec{w} = 0 \qquad \forall q \in M(\Omega : T),$$

resultanto que el par $(w, \lambda) \in X(\Omega; T) \times M(\Omega; T)$ es la solución única del problema adjunto (en formulación mixta):

$$\left.\begin{array}{l} 2\nu \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{w})\ \sigma_{ij}(\vec{z}) + \int_\Omega \vec{w}\cdot\nabla(\vec{u}\cdot\vec{z}) \quad \int \operatorname{div}\vec{z} = \\ = 2\nu\int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\sigma_{ij}(\vec{z}) \qquad \forall \vec{z} \in X(\Omega; T), \end{array}\right\} \quad (4.26)$$

$$\int_\Omega q\cdot\operatorname{div} w = 0 \qquad \forall q \in M(\Omega; T) \qquad (4.27)$$

El cálculo efectivo del estado adjunto es ahora más simple, y además el problema (4.26) - (4.27) es coherente con el problema adjunto formulado por O. Pironneau [1] en el caso continuo.

5. CASOS PARTICULARES: CONVERGENCIA DE LA SOLUCION APROXIMADA.

La cuestión importante que queda por responder es la siguiente: ¿Converge la solución del problema aproximado hacia una solución del problema (1.1)-(1.2)?

Desafortunadamente, la existencia de soluciones del problema continuo está supeditada a una condición de tipo acotación uniforme (no totalmente satisfactoria, como se hace notar en [6]). Sin embargo, en ciertos casos particulares, de las condiciones necesarias de optimalidad de la solución del problema discreto puede deducirse la existencia de una solución de (1.1)-(1.2) (cf. [10]). En esta Sección admitiremos que este problema posee solución; para fijar ideas nos situaremos en el caso de la familia S_2, definida por (1.6b).

Sea entonces H una sucesión generalizada de R_+ convergente hacia 0; a cada h le asociamos una familia S_{2h} de K_h- tuplas

$$\left\{a_h^k\right\}_{k=1}^{K_h}$$

que describen (como en la Sección 4) la frontera de los cerrados S_h, y las triangulaciones T_h y T_h. Supondremos que todo cerrado S_h definido por un elemento de S_{2h} pertenece a S_2, y que la familia $\{S_{2h}\}_{h \in H}$ es *regular* en el sentido siguiente:

$$\delta(T) \equiv \textit{diámetro de } T \leqq h \qquad \forall T, \ \forall \{a^k\}, \quad \forall h, \tag{5.1}$$

Sea ρ (T) *la magnitud de* T, *definida como el diámetro de la mayor bola contenida en* T. *Entonces existe* $\sigma > 0$ *tal que*

$$\delta(T)/\rho(T) \leqq \sigma \qquad \forall T, \ \forall \{a^k\}, \quad \forall h. \tag{5.2}$$

El resultado que sigue es un caso particular de otro más general, que aparecerá en [10], por lo que nos limitaremos a dar la idea de su demostración. Dada una función $\vec{v}$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathcal{O}$, llamaremos $\widetilde{v}$ la prolongación por cero de $\vec{v}$ a $\mathcal{O}$.

Teorema 5.1.

Con la notación precedente, si la familia $\{S_{2h}\}_{h \in H}$ es regular, y para cada $h \in H$ $\vec{u}_h$ es una solución de $(4.1)_h$, existe al menos una subsucesión H' de H tal que

$$\widetilde{u}_{h'} \to \widetilde{u}_* \text{ en } H^1(\mathcal{O})^2 - \text{débil cuando } h' \in H', \quad h' \to 0$$

donde $\vec{u}_*$ es una solución de (1.1)-(1.2) para $S = S_2$.

Idea de la Demostración.

1ª Parte: Estimaciones "a priori".

Siguiendo la técnica de [4], es fácil probar la existencia de una constante $C > 0$ (que sólo depende de ν, $\mathcal{O}$ y $\vec{Z}$) tal que

$$\|\tilde{u}_h\|_{1,\mathcal{O}} \leqq C \qquad \forall\, h \in H. \tag{5.3}$$

Por tanto, existe una subsucesión H' y una función $\vec{v}_* \in H^1(\mathcal{O})^2$ tales que

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{h'} \to \vec{v}_* \quad \textit{en} \quad H^1(\mathcal{O})^2 \textit{-débil, cuando } h' \in H',\ h' \to 0, \\ &\vec{v}_* = \vec{Z} \quad \textit{sobre} \quad \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por otra parte, de la definición de S_2 se deduce (como en [6, 7]) la existencia de una subsucesión de H' (de nuevo llamada H'), y de un cerrado $S_* \in S_2$, tales que

$$\left.\begin{aligned} &S_{h'} \to S_* \text{ para la topología de Hausdhorff,} \\ &\chi_{h'} \to \chi_* \text{ en } L^{\infty}(\mathcal{O}) \text{ débil*,} \\ &\int_{\partial S_*} d\sigma = v_2\,, \end{aligned}\right| \tag{5.5}$$

donde $\chi_{h'}$ (resp. χ_*) es la función característica de $\mathcal{O}\backslash S_{h'}$ (resp. $\mathcal{O}\backslash S_*$). De (5.4) y (5.5) se deduce que $\vec{v}_* = \chi_* \vec{v}_*$, de donde podemos escribir

$$\vec{v}_* = \tilde{u}_*\,, \quad \vec{u}_* \in \vec{u}_g + H_0^1(\mathcal{O}\backslash S_*)^2.$$

2ª Parte: Propiedades de $\vec{u}_*$. (I).

Supongamos que existe $\vec{\phi} \in H_0^1(\mathcal{O}\backslash S_*)$ tal que $\operatorname{div}\vec{\phi} = 0$ y

$$\left| 2\nu \int_{\mathcal{O}\backslash S_*} \sigma_{ij}(\vec{u}_*)\,\sigma_{ij}(\vec{\phi}) + \int_{\mathcal{O}\backslash S_*} u_{*i}\,\frac{\partial u_{*i}}{\partial x_j}\,\phi_j \right| \geqq \epsilon > 0.$$

Se puede asegurar la existencia de una sucesión $\{\vec{\phi}_{h'}\}_{h' \in H'}$ tal que (cf. [6]):

$$\vec{\phi}_{h'} \in H_0^1(\mathcal{O}\backslash S_{h'})^2, \quad \operatorname{div}\ \vec{\phi}_{h'} = 0 \quad \textit{en} \quad \mathcal{O}\backslash S_{h'}\,,$$

$$\tilde{\phi}_{h'} \to \tilde{\phi} \quad \textit{en} \quad H_0^1(\mathcal{O})^2 \textit{-fuerte.}$$

Por tanto, si h' es suficientemente pequeño,

$$\left| 2\nu \int_{\mathcal{O}} \sigma_{ij}(\tilde{u}_*)\,\sigma_{ij}(\tilde{\phi}_{h'}) + \int_{\mathcal{O}} \tilde{u}_{*i} \frac{\partial \tilde{u}_{*i}}{\partial x_j} \tilde{\phi}_{jh'} \right| \geqq \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Ahora bien, de (5.1)-(5.2) se deduce que existen funciones

$$\psi_{h'} \in X_{h'}(\mathcal{O} \setminus S_{h'}; \mathcal{T}_{h'})$$

tales que

$$\|\vec{\phi}_{h'} - \vec{\psi}_{h'}\|_{1,\mathcal{O}\setminus S_{h'}} = \eta(h'), \tag{5.6}$$

donde $\eta(h') \to 0$ cuando $h' \in H'$, $h' \to 0$. De (5.3), (5.6) se deduce (para h' suficientemente pequeño) que

$$\left| 2\nu \int_{\mathcal{O}\setminus S_{h'}} \sigma_{ij}(\vec{u}_{h'})\,\sigma_{ij}(\vec{\psi}_{h'}) + \int_{\mathcal{O}\setminus S_{h'}} u_{ih'} \frac{\partial u_{ih'}}{\partial x_j} \psi_{jh'} \right| \geqq \frac{\epsilon}{4}\,,$$

lo cual es absurdo. En consecuencia, $\vec{u}_*$ es la solución del problema de Navier-Stokes en $\mathcal{O} \setminus S_*$.

3.ª Parte: Propiedades de $\vec{u}_*$. (II).

Supongamos ahora que existe $\hat{S} \in \mathcal{S}_2$ tal que

$$\left.\begin{aligned} \xi(\hat{S}) &\equiv 2\nu \int_{\mathcal{O}\setminus\hat{S}} \sigma_{ij}(\vec{v})\,\sigma_{ij}(\vec{v}) < \\ &< 2\nu \int_{\mathcal{O}\setminus S_*} \sigma_{ij}(\vec{u}_*)\,\sigma_{ij}(\vec{u}_*) \equiv \xi(S_*)\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

siendo $\vec{v}$ la solución de (1.1a) en $\mathcal{O} \setminus \hat{S}$. Entonces existe una sucesión de cerrados poligonales $\hat{S}_{h'}$ $(h' \in H')$, definidos por las $K_{h'}$-tuplas $\{\hat{a}^k_{h'}\} \in \mathcal{S}_{2h'}$ que verifican

$$\varlimsup_{\substack{h' \to 0 \\ h' \in H'}} \int_{\mathcal{O}\setminus\hat{S}_{h'}} \sigma_{ij}(\vec{v}_{h'})\,\sigma_{ij}(\vec{v}_{h'}) \leqq \xi(\hat{S})\,, \tag{5.8}$$

donde $\vec{v}_{h'}$ es la solución de $(3.3)_{h'}$ con

$$X_{h'} = X_{h'}(\mathcal{O} \setminus \hat{S}_{h'}; \hat{\mathcal{T}}_{h'})\,, \quad M_{h'} = M_{h'}(\mathcal{O} \setminus \hat{S}_{h'}; \hat{\mathcal{T}}_{h'}).$$

Por otra parte, de $(3.3)_h$; y (5.4) se deduce fácilmente que

$$\lim_{\substack{h' \to 0 \\ h' \in H'}} \int_{\mathcal{O} \setminus S_{h'}} \sigma_{ij}(\vec{u}_{h'})\, \sigma_{ij}(\vec{u}_{h'}) = \xi(S_*). \tag{5.9}$$

Pero (5.7)-(5.9) está en contradicción con que $S_{h'}$ sea (para h' suficientemente pequeño) una solución de $(4.1)_{h'}$.

4ª Parte: Conclusión.

Dado que $S_* \in \mathcal{S}_2$ verifica

$$\xi(S_*) \leqq \xi(S) \qquad \forall S \in \mathcal{S}_2,$$

se deduce que S_* es una solución de (1.1)-(1.2); hemos probado en consecuencia la convergencia débil en $H^1(\mathcal{O})^2$ (al menos para una subsucesión) de las soluciones aproximadas hacia una solución del problema continuo.

NOTACION

Ω, $\mathcal{O}$ abiertos acotados de R^N ($N = 2$ ó 3).

$H^1(\Omega) = \{ v / v \in L^2(\Omega); \nabla \in L^2(\Omega)^N \}$.

$H_0^1(\Omega) \equiv$ adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.(5)

$W^{2,r}(\Omega) = \{ v / v \in L^r(\Omega); \nabla v \in L^r(\Omega)^N \}$.

$\sigma_{ij}(\vec{v}) \equiv 1/2\,(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$.

$L_0^2(\Omega) = \{ q / q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q\, dx = 0 \} \equiv L^2(\Omega)/R$.

$\operatorname{div} \vec{v} \equiv \sum_{i=1}^{N} \partial v_i / \partial x_i$.(6)

(5) $\mathcal{D}(\Omega)$ es el espacio de las funciones definidas en Ω indefinidamente diferenciables y con soporte compacto.

(6) Todos los índices repetidos sumen de 1 a N, y el elemento de integración dx asociado a la medida de Lebesgue será sobreentendido.

$A \subset\subset B \equiv \bar{A} \subset B$ (A está completamente contenido en B).

ν : viscosidad cinemática del fluido, > 0.

m(.): medida de Lebesgue en R^N.

$$|v|_{1,\Omega} \equiv \int_\Omega |v|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx)^{1/2}$$

(norma hilbertiana de $H^1(\Omega)^N$).

$$|\vec{v}|_{1,\Omega} \equiv (\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx)^{1/2}$$

(norma hilbertiana de $H_0^1(\Omega)^N$).

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{N} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\}_{i=1}^{N}$$

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad \nabla \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{N}$$

$P_\ell \equiv$ Espacio de los polinomios de grado $\leqq \ell$.

REFERENCIAS

[1] PIRONNEAU, O. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Mai 1976.

[2] GLOWINSKI, R. & PIRONNEAU, O. "Towards the computation of minimum-drag profiles in viscous laminar flow". Appl. Math. Modelling, Vol. 1, September (1976), pp. 58-66.

[3] MARROCCO, A. & PIRONNEAU, O. "Optimum design with Lagrangian finite elements: Design of an electromagnet". Comp. Math. Appl. Mech. Eng., *15* (1978), pp. 277-308.

[4] LADYZHENSKAYA, O.A. "The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd. Ed.". Gordon & Breach, New York, 1969.

[5] FINN, R. "On steady-state solutions of the Navier-Stokes equations as a limit of non stationary solutions". Arch. Rat. Mech. Anal. *3* (1959) pp. 381-396.

[6] PIRONNEAU, O. "On optimum design in fluid Mechanics". J. Fluid Mech. (1974), Vol. 64, part I, pp. 97-110.

[7] FERNANDEZ CARA, E. Thèse de Doctorat de 3ème. Cycle, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Novembre 1981.

[8] GIRAULT, V. & RAVIART, P.A. "Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations". Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[9] CIARLET, P.G. "The Finite Element Method for Elliptic Problems". North-Holland P. Co., Amsterdam, 1978.

[10] FERNANDEZ CARA, E. "A numerical method for solving minimum-drag profiles problems in viscous incompressible flow". Aparecerá en R.A.I.R.O. (1983).

[11] ADAMS, R.A. "Sobolev Spaces". Academic Press, New York 1975.

[12] DUVAUT, G. & LIONS, J. L. "Les inéquations en Mécanique et en Physique". Dunod. Paris, 1972.

Enrique FERNANDEZ CARA
Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de Sevilla