# UN ESTUDIO NO STANDARD DE LA TEORIA DE LA RECURSIVIDAD RELATIVA

por

JOSE F. PRIDA

Es habitual introducir la noción de función recursiva parcial mediante un cálculo, en el que aparecen algunas funciones iniciales y dos o tres reglas para definir funciones a partir de otras previamente definidas. El método, eficacísimo a la hora de probar la recursividad de ciertas funciones, ni conduce a la convicción de que la noción de recursividad es una contrapartida formal adecuada de la idea intuitiva de computabilidad (Tesis de Church), ni permite probar de forma sencilla ninguno de los cinco teoremas básicos en que se apoya toda la teoría de la computabilidad. Con objeto de obviar esos dos inconvenientes, es igualmente habitual introducir paralelamente la noción de máquina de Turing y, a partir de ella, la de T-computabilidad. La equivalencia de los conceptos de recursividad parcial y T-computabilidad, no solo hace muy plausible la Tesis de Church, sino que además conduce de forma completamente natural a los teoremas de enumeración y de la forma normal, a partir de los que se obtienen sin dificultad los teoremas s-m-n y de recursión. Estos cuatro teoremas, todos ellos demostrados por primera vez por Kleene, constituyen la base en que se apoya toda la teoría de la computabilidad. Cuando esta teoría se generaliza, una noción más sofisticada de T-computabilidad permite no solo probar versiones más fuertes de los cuatro anteriores teoremas, sino también obtener con facilidad el teorema de finitud, quinta herramienta básica de la teoría de la recursividad relativa (cfr. (Pr 1977)).

En el presente trabajo se da otra pureba de los cinco referidos teoremas, introduciendo una técnica completamente distinta, tal vez menos intuitiva, pero con la indudable ventaja de evitar por completo la noción de T-computabilidad, concepto estrictamente matemático, pero nada familiar a la gran mayoría de los matemáticos. Sustituyendo la noción de T-computabilidad por la de representabilidad en una teoría, los habituales métodos de demostración basados en la construcción de máquinas de Turing (o de cualquier otro tipo de algoritmos), se sustituyen, con ventajas obvias, por técnicas de lógica matemática.

Con tal objeto, para una función numérica total cualquiera F, se define una teoría $\Phi_F$, que contiene la aritmética elemental, demostrándose que las funciones representables en ella son precisamente las funciones parciales recursivas en F. El predicado universal $T_n^F$, en vez de ser definido en términos de configuraciones alcanzadas por máquinas de Turing al cabo de cierto número de pasos cuando parten de determinadas situaciones iniciales, se define mediante los conceptos estrictamente lógicos de derivación y sustitución. Los teoremas de enumeración y de la forma normal aparecen como consecuencias inmediatas del teorema de representación, siguiéndose el teorema s-m-n de la recursividad de la función de sustitución, introducida por Gödel en su célebre artículo de 1931. Finalmente, el teorema de recursión aparece como una consecuencia del teorema del punto fijo de la lógica matemática y el teorema de finitud resulta ser la contrapartida en el campo de la computabilidad del teorema del mismo nombre del cálculo de predicados de primer orden. Como consecuencia, demostraciones de teoremas en $\Phi_F$ y cálculos de funciones parciales recursivas en F, resultan ser objetos matemáticos duales, algorítmicamente reducibles unos u otros y, por tanto, de la misma complejidad.

Por otra parte, la equivalencia de computabilidad y demostrabilidad proporciona una diferente formulación de la Tesis generalizada de Church, según la cual las funciones computables en F coinciden con las representables en $\Phi_F$.

## 1. FUNCIONES PARCIALES RECURSIVAS EN F.

Sea F una aplicación de N en N.

DF 1.1.

Una función (parcial o total) de $N^k$ en N ($k = 0, 1, \ldots$) es recursiva en F si es derivable a partir de las funciones iniciales F, $C_0^0$ (función constante nula, con cero argumentos), s (función sucesor), $U_k^n$ con $n > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (funciones de proyección), + (suma), $\cdot$ (producto), y $f_<$ (función característica de la relación $<$), mediante las dos siguientes reglas:

Regla de sustitución: derivar $\psi$ de $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$, donde $\phi$ es una función (parcial o total) con m argumentos, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ son funciones (parciales o totales) con n argumentos, y para toda n-pla de números naturales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (abreviadamente a) se verifica:

$$\psi(a) = \phi(\phi_1(a), \phi_2(a), \ldots, \phi_m(a)).$$

Regla de minimalización: derivar $\psi$ de g (donde g es una función total con $n + 1$ argumentos) si para toda n-pla de números naturales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (abreviadamente a) se verifica:

$$\psi(a) = \begin{cases} \mu y\,(g(a, y) = 0) & \text{si existe un tal y} \\ \uparrow & \text{si no existe un tal y.} \end{cases}$$

Habitualmente funciones parciales serán denotadas con letras griegas y funciones totales con letras latinas. Funciones totales recursivas en F se denominarán simplemente funciones recursivas en F.

## 2. LA TEORIA $\psi_F$

Sea F una función total de N en N y sea S el conjunto de símbolos $\{\underline{0}, \underline{s}, \underline{+}, \underline{\cdot}, \underline{F}\}$. Sea $L^S$ el conjunto de fórmulas de primer orden con símbolos de S, definido de la forma usual. El término $\underline{s}\underline{s}\underline{s}\ldots\underline{s}\underline{0}$ (n veces $\underline{s}$), será denotado por $\underline{n}$.

DF 2.1.

$\Psi_F$ es el conjunto de sentencias de $L^S$ derivables (mediante las reglas de derivación de un cálculo de predicados de primer orden completo), a partir del siguiente conjunto $\Phi_F$ de sentencias:

$$\forall x\, \neg(\underline{s}\, x \equiv \underline{0})$$

$$\forall x\, (\neg x \equiv \underline{0} \rightarrow \exists y\, (\underline{s}\, y \equiv x))$$

$$\forall x\; \forall y\, (\underline{s}\, x \equiv \underline{s}\, y \rightarrow x \equiv y)$$

$$\forall x\, (x \,\underline{+}\, \underline{0} \equiv x)$$

$$\forall x\; \forall y\, (x \,\underline{+}\, \underline{s}\, y \equiv \underline{s}\, (x \,\underline{+}\, y))$$

$$\forall x\, (x \,\underline{\cdot}\, \underline{0} \equiv \underline{0})$$

$$\forall x\; \forall y\, (x \,\underline{\cdot}\, \underline{s}\, y \equiv ((x \,\underline{\cdot}\, y) \,\underline{+}\, x))$$

$$\{\, \underline{F}\, \underline{a} \equiv \underline{b} \;/\; F(a) = b \,\}.$$

## 3. REPRESENTABILIDAD EN $\Psi_F$.

Sea libr($\alpha$) el conjunto de variables libres de la fórmula $\alpha$.

DF 3.1.

La fórmula $\alpha$ tal que libr($\alpha$) = $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ representa en $\Psi_F$ a la función parcial $\psi$, si para todo $a_1, a_2, \ldots, a_n, c \in N$ se verifica:

$$\psi\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \simeq c \;\Rightarrow\; \Psi_F \vdash \alpha\,(x_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{c} \tag{3.1}$$

$$\psi\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \uparrow \;\Rightarrow\; \Psi_F \nvdash \exists\, x_0\; \alpha\,(x_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \tag{3.2}$$

## 4. REPRESENTABILIDAD EN $\Psi_F$ DE LAS FUNCIONES PARCIALES RECURSIVAS EN F.

DF 4.1.

Una teoría $\Phi$, es $\omega$-consistente si para ninguna fórmula $\alpha$ se verifica:

$$\exists\, x\, \alpha \in \Phi; \neg\alpha\,(\underline{0}) \in \Phi; \neg\alpha\,(\underline{1}) \in \Phi; \neg\alpha\,(\underline{2}) \in \Phi; \ldots \tag{4.1}$$

TH 4.1.

Si $\Psi_F$ es $\omega$-consistente, entonces las funciones parciales recursivas en F son representables en $\Psi_F$.

***Demostración:***

El teorema es consecuencia inmediata de los tres siguientes lemas:

***Lema 4.1:*** Las funciones F, $C_0^0$, $U_n^k$, F, +, $\cdot$ y $f_<$ son respectivamente representables en $\Psi_F$ mediante las fórmulas:

$$\begin{array}{ll} \underline{F}\, x_1 \equiv x_0 & \qquad\qquad x_0 \equiv \underline{s}\, x_1 \\ x_0 \equiv \underline{0} & \qquad\qquad x_0 \equiv x_1 \,\underline{+}\, x_2 \\ x_0 \equiv x_k & \qquad\qquad x_0 \equiv x_1 \,\underline{\cdot}\, x_2 \end{array}$$

$$\exists x_3 (x_1 + \underline{s} x_3 \equiv x_2 \land x_0 \equiv \underline{s0}) \lor \exists x_3 (x_2 + x_3 \equiv x_1 \land x_0 \equiv \underline{0})$$

La prueba es trivial.

*Lema 4.2:* Si $\psi(a) = \phi(\phi_1(a), \ldots, \phi_m(a)$ y $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ representan respectivamente a $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_m$ en $\Psi_{I'}$, entonces

$$\exists y_1 \ldots \exists y_m (\alpha_1 (y_1, x) \land \ldots \land \alpha_m (y_m, x) \land \alpha (x_0, y_1, \ldots, y_m))$$

(donde x es una abreviatura de $x_1, x_2, \ldots, x_n$) representa a $\psi$ en $\Psi_{I'}$.

En efecto, demostraremos:

Si $\psi(a) = c$

a1 $\Phi_{I'}, x_0 \equiv \underline{c} \vdash \exists y_1 \ldots \exists y_m (\alpha_1 (y_1, \underline{a}) \land \ldots \land \alpha (x_0, y_1, \ldots, y_m))$

a2 $\Phi_I, \exists y_1 \ldots \exists y_m (\alpha_1 (y_1, \underline{a}) \land \ldots \land \alpha (x_0, y_1, \ldots, y_m)) \vdash x_0 \equiv \underline{c}$.

Si $\psi(a) \uparrow$, entonces

a3 $\Phi_{I'} \not\vdash \exists x_0 \; \exists y_1 \ldots \exists y_m (\alpha_1 (y_1, \underline{a}) \land \ldots \land \alpha (x_0, y_1, \ldots, y_m))$.

ad a1 : Si $\psi(a) = c$, existirán números naturales $b_1, b_2, \ldots, b_m$ tales que

$$\begin{aligned} &\phi_1(a) = b_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\phi_m(a) = b_m \\ &\phi(b_1, b_2, \ldots, b_m) = c \end{aligned} \tag{4.2}$$

con lo que

$$\begin{aligned} &\Phi_{I'} \vdash \alpha_1 (x_0, \underline{a}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{b}_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_{I'} \vdash \alpha_m (x_0, \underline{a}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{b}_m \\ &\Phi_{I'} \vdash \alpha(x_0, \underline{b}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{c} \qquad \text{(donde } \underline{b} \text{ abrevia } \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m) \end{aligned} \tag{4.3}$$

y en consecuencia

$$\Phi_\Gamma \vdash \alpha_1 (\underline{b}_1, \underline{a}) \wedge \ldots \wedge \alpha_m (\underline{b}_m, \underline{a}) \wedge \alpha (\underline{c}, \underline{b}) \tag{4.4}$$

de donde se sigue

$$\Phi_\Gamma \vdash \exists y_1 \ldots \exists y_m (\alpha_1 (y_1, \underline{a}) \wedge \ldots \wedge \alpha_m (y_m, \underline{a}) \wedge \alpha (\underline{c}, y_1, \ldots, y_m)) \tag{4.5}$$

de la que a su vez se obtiene a1.

ad a2 : Puesto que las variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ no están libres ni en $\Phi_\Gamma$ ni en $x_0 \doteq \underline{c}$, bastará demostrar

$$\Phi_\Gamma, (\alpha_1 (y_1, \underline{a}) \wedge \ldots \wedge \alpha_m (y_m, \underline{a}) \wedge \alpha (x_0, y_1, \ldots, y_m)) \vdash x_0 \doteq \underline{c} \tag{4.6}$$

Para ello, denotando por $\beta$ la fórmula de (4.6) situada inmediatamente a la izquierda del símbolo $\vdash$ , se tiene en primer lugar que, puesto que $\psi (a) = c$ implica (4.3),

$$\begin{array}{ll} \Phi_\Gamma, \beta \vdash & y_1 \doteq \underline{b}_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \Phi_\Gamma, \beta \vdash & y_m \doteq \underline{b}_m \end{array} \tag{4.7}$$

con lo que

$$\Phi_\Gamma, \beta \vdash \alpha (x_0, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m) \tag{4.8}$$

de donde, por la última relación de (4.3), se sigue a2.

ad a3 : Supongamos que $\psi (a) \uparrow$ y que

$$\Phi_\Gamma \vdash \exists x_0 \exists y_1 \ldots \exists y_m (\alpha_1 (y_1, \underline{a}) \wedge \ldots \wedge \alpha (x_0, y_1, \ldots, y_m)). \tag{4.9}$$

Caso 1: existe un k $(0 \leqslant k \leqslant m)$ tal que $\phi_k (a) \uparrow$.

Caso 2: existen $b_1, \ldots, b_m$ tales que $\phi_1 (a) = b_1, \ldots \phi_m (a) = b_m$ y $\phi (b_1, \ldots, b_m) \uparrow$.

En el caso 1, por hipótesis no se verifica

$$\Phi_\Gamma \vdash \exists x_0 \alpha_k (x_0, \underline{a}) \tag{4.10}$$

absurdo, puesto que (4.10) se sigue de (4.9).

Análogamente, en el caso 2 por hipótesis no se verifica

$$\Phi_F \vdash \exists x_0\, \alpha(x_0, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m), \tag{4.11}$$

igualmente absurdo, puesto que (4.11) es consecuencia (4.9) y de las m primeras relaciones de (4.3). En efecto, de ellas se sigue mediante sustitución de equivalentes

$$\Phi_F \vdash \exists x_0\; \exists y_1 \ldots \exists y_m\, (y_1 \equiv b_1 \wedge \ldots \wedge \alpha(x_0, y_1, \ldots, y_m)) \tag{4.12}$$

de donde se obtiene (4.11).

***Lema 4.3:*** Si $\psi(a) = \mu y\,(g(a, y) = 0)$ y $\alpha$ representa a g en $\Psi_F$, entonces la fórmula $(\alpha(\underline{0}, x, x_0) \wedge \forall y\,(y < x_0 \rightarrow \neg\alpha(\underline{0}, x, y)))$ representa a $\psi$ en $\Psi_F$.

En efecto demostraremos:

Si $\psi(a) = c$

a1 $\Phi_F, x_0 \equiv \underline{c} \vdash (\alpha(\underline{0}, \underline{a}, x_0) \wedge \forall y\,(y < x_0 \rightarrow \neg\alpha(\underline{0}, \underline{a}, y)))$

a2 $\Phi_F, (\alpha(\underline{0}, \underline{a}, x_0) \wedge \forall y\,(y < x_0 \rightarrow \neg\alpha(\underline{0}, \underline{a}, y))) \vdash x_0 \equiv \underline{c}$

Si $\psi(a) \uparrow$

a3 $\Phi_F \nvdash \exists x_0\, (\alpha(\underline{0}, \underline{a}, x_0) \wedge \forall y\,(y < x_0 \rightarrow \neg\alpha(\underline{0}, \underline{a}, y)))$.

ad a1: Si $\psi(a) = c$ existirán números naturales $m_0, m_1, \ldots m_{c-1}$ tales que

$$\begin{aligned} &g(a, 0) = m_0 \\ &g(a, 1) = m_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g(a, c-1) = m_{c-1} \\ &g(a, c) = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} &\Phi_F \vdash \alpha(x_0, \underline{a}, \underline{0}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{m}_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\Phi_F \vdash \alpha(x_0, \underline{a}, \underline{c-1}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{m_{c-1}}$$

$$\Phi_F \vdash \alpha(x_0, \underline{a}, \underline{c}) \leftrightarrow x_0 \equiv x_0 = \underline{0}$$

de las que a su vez se obtiene

$$\Phi_F \vdash \neg\alpha(\underline{0}, \underline{a}, \underline{0})$$
$$\cdots\cdots \tag{4.15}$$
$$\Phi_F \vdash \neg\alpha(\underline{0}, \underline{a}, \underline{c} - 1)$$
$$\Phi_F \vdash \alpha(\underline{0}, \underline{a}, c)$$

siguiéndose finalmente

$$\Phi_F \vdash (\alpha(\underline{0}, \underline{a}, \underline{c}) \wedge \forall y\, (y < \underline{c} \rightarrow \neg\alpha\ (\underline{0}, \underline{a}, y))). \tag{4.16}$$

De (4.16) se sigue inmediatamente a1.

ad a2 : Denotando por $\beta$ la fórmula de a2 situada inmediatamente a la izquierda del símbolo $\vdash$, se tiene

$$\beta \vdash \alpha(\underline{0}, \underline{a}, \underline{c}) \rightarrow \neg(\underline{c} < x_0) \tag{4.17}$$

con lo que, de acuerdo con la última relación de (4.15)

$$\Phi_F, \beta \vdash \neg(\underline{c} < x_0). \tag{4.18}$$

Por otra parte, de (4.16) se sigue

$$\Phi_F \vdash \alpha(\underline{0}, \underline{a}, x_0) \rightarrow \neg(x_0 < \underline{c}) \quad , \tag{4.19}$$

que junto con

$$\beta \vdash \alpha(\underline{0}, \underline{a}, x_0) \tag{4.20}$$

implica

$$\Phi_F, \beta \vdash \neg(x_0 < \underline{c}). \tag{4.21}$$

Finalmente, de (4.18) y (4.21) se sigue a2.

ad a3 : Supongamos que $\psi(a) \uparrow$ y que sin embargo

$$\Phi_F \vdash \exists x_0 \, (\alpha\,(\underline{0}, \underline{a}, x_0) \wedge \forall y\,(y < x_0 \rightarrow \neg\alpha\,(\underline{0}, \underline{a}, y))), \tag{4.22}$$

que implica

$$\Phi_F \vdash \exists x_0 \alpha\,(\underline{0}, \underline{a}, x_0); \tag{4.23}$$

puesto que de $\psi$ (a) $\uparrow$ se sigue g (a, 0) $\neq 0$, g (a, 1) $\neq 0, \ldots$ que implican a su vez (cfr. (4.15)).

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_F \vdash \neg\alpha\,(\underline{0}, \underline{a}, \underline{0}) \\ \Phi_F \vdash \neg\alpha\,(\underline{0}, \underline{a}, \underline{1}) \\ \Phi_F \vdash \neg\alpha\,(\underline{0}, \underline{a}, \underline{2}) \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4.24}$$

se sigue de (4.23) y (4.24) que $\Phi_F$ no es $\omega$-consistente, en contra de la hipótesis.

## 5. Recursividad en F de las funciones parciales representables en $\Phi_F$. Teorema de la forma normal

Dada una determinada biyección efectiva entre los números naturales y las fórmulas de $L^S$ cuyas variables libres son $x_0, x_1, \ldots, x_n$, la fórmula asociada al número k será denotada por $\alpha_k^n$.

Siguiendo la técnica usual introducida por Gödel, a partir de una biyección entre las fórmulas de $L^S$ y los números naturales, puede definirse una correspondencia, también biunívoca, entre números y sucesiones finitas de fórmulas (secuencias). La secuencia asociada al número j será denotada por $\Gamma_j$.

Sea $\sigma_2$ una biyección efectiva de $N^2$ en N y sean $\sigma_{21}$ y $\sigma_{22}$ funciones de N en N tales que si $\sigma_2$ (x, y) = z, entonces $\sigma_{21}$ (z) = x y $\sigma_{22}$ (z) = y.

Con esta notación, si $\psi$ es una función parcial de n argumentos representable en $\Phi_F$, existirá un k tal que $\alpha_k^n$ representa a $\psi$. Con ello se tiene la equivalencia de las proposiciones:

a) $\psi$ (a) $\downarrow$;

b) existe un único b tal que $\Phi_F \vdash \alpha_k^n (x_0, \underline{a}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{b}$ ;

c) existe un único b y un c tal que $\Gamma_c$ es una derivación de

$$\alpha_k^n (x_0, \underline{a}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{b}$$

a partir de $\Psi_F$ (cfr. 3).

d) existe un t tal que $T_n^F\, ka_1\, a_2 \ldots a_n\, t$, donde el predicado $T_n^F$ se verifica por definición si y solo si $\Gamma_{\sigma 21}(t)$ es una derivación de $q_k^n(x_0, \underline{a}) \longleftrightarrow x_0 \equiv \underline{\sigma_{22}(t)}$ a partir de $\Psi_F$.

Además, puesto que $T_n^F\, ka_1\, a_2 \ldots a_n\, t$ y $T_n^F\, ka_1\, a_2 \ldots a_n\, t'$ implican obviamente $\sigma_{22}(t) = \sigma_{22}(t')$, se tiene que si $\psi(a)$ está definida, entonces

$$\psi(a) = \sigma_{22}(\mu t\, [T_n^F\, kat]). \tag{5.1}$$

Claramente el predicado $T_n^F$ es recursivo en F. Una prueba formal de este resultado puede obtenerse sin dificultad, aunque de forma tediosa, utilizando métodos completamente similares a los empleados por Gödel en su artículo de 1931. Así pues:

TH 5.1.

Existe una función recursiva $\sigma_{22}$ con un argumento y para cada número natural n y cada función total F de N en N existe un predicado con n + 2 argumentos $T_n^F$, recursivo en F, tal que para toda función parcial $\psi$ recursiva en F existe un número natural k verificando (5.1).

De (5.1) y de la recursividad de $T_n^F$ en F se sigue inmediatamente:

TH 5.2.

Toda función representable en $\Phi_F$ es recursiva parcial en F.

## 6. Teorema de enumeracion.

Definiendo $\phi_k^{n,F}$ mediante la igualdad

$$\phi_k^{n,F}(a_1, \ldots, a_n) = \sigma_{22}(\mu t\, [T_n^F\, ka_1 \ldots a_n\, t]) \tag{6.1}$$

se obtiene a partir de (5.1) y (6.1) el siguiente teorema de enumeración:

TH 6.1.

Para toda función parcial con n argumentos $\psi$, recursiva en F, existe un número natural k tal que

$$\psi = \phi_k^{n,F} \tag{6.2}$$

## 7. TEOREMA s-m-n

TH 7.1.

Para todo s, m, n $\in$ N existe una función recursiva total con n + 1 argumentos f, tal que para todo $a_1, \ldots, a_n$ $b_1, \ldots, b_m$ se verifica:

$$\phi^{n,F}_{f(s,b_1,\ldots,b_m)}(a_1, \ldots, a_n) = \phi_s^{m+n,F}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m). \tag{7.1}$$

*Demostración:*

Sean a y $\underline{a}$ las abreviaturas acostumbradas y sean respectivamente b y $\underline{b}$ abreviaturas de $b_1, b_2, \ldots, b_m$ y $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_m$. Sea f la función recursiva tal que

$$\alpha^n_{f(s,b)}(x_0, \ldots, x_n) - \alpha_s^{m+n}(x_0, x_1, \ldots, x_{m+n})^{\underline{b}_1}_{x_{n+1}} \cdots {}^{\underline{b}_m}_{x_{m+n}} \tag{7.2}$$

(donde de nuevo la recursividad de f se puede probar fácilmente con las técnicas de (Göd 1931)).

De (8.2) se sigue inmediatamente la equivalencia de las proposiciones:

(a) $\Gamma_{\sigma_{21}(t)}$ es una derivación a partir de $\Psi_F$ de

$$\alpha_s^{m+n}(x_0, \underline{a}, \underline{b}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{\sigma_{22}(t)}$$

(b) $\Gamma_{\sigma_{21}(t)}$ es una derivación a partir de $\Psi_F$ de

$$\alpha^n_{f(s,b)}(x_0, \underline{a}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{\sigma_{22}(t)}$$

con lo que se tiene

$$T^F_{m+n}\,\text{sabt} \leftrightarrow T^F_n\, f(s,b)\,\text{at}, \tag{7.3}$$

siguiéndose el teorema de (7.3) y (6.1).

## 8. Teorema de finitud.

En la definición de $\Phi_F$ se ha supuesto que F es una función total. Todos los resultados demostrados siguen sin embargo siendo válidos si F es una función finita o un segmento inicial, i.e., una función parcial con dominio

$$\{0, 1, 2, \ldots, k\},$$

para un cierto k. Segmentos iniciales serán denotados por $\sigma$.

A partir del teorema de finitud del cálculo de predicados de primer orden se obtiene que para toda fórmula $\alpha \in L^S$

$$\Phi_F \vdash \alpha \Leftrightarrow \exists \sigma (\sigma \subset F \text{ y } \Phi_\sigma \vdash \alpha') \tag{8.1}$$

donde $\alpha'$ es la fórmula de $L^{S'}$, con $S' = \{\underline{0}, \underline{s}, \underline{+}, \underline{\cdot}, \underline{\sigma}\}$, obtenida a partir de $\alpha$ sustituyendo cada aparición de $\underline{F}$ por $\underline{\sigma}$.

Además, gödelzando paralelamente las fórmulas de $L^S$ y $L^{S'}$ resulta obvio que $\alpha$ y $\alpha'$ corresponden al mismo número y que $\Gamma_j$ es una derivación de $\alpha_k$ a partir de $\Psi_F$ si y sólo si $\Gamma'_j$ es una derivación de $\alpha'_k$ a partir de $\Psi_\sigma$.

Con ello se tiene

$$\exists t\, T_n^F kat \Leftrightarrow \exists \sigma (\sigma \subset F \text{ y } \exists t\, T_n^\sigma kat) \tag{8.2}$$

y en consecuencia, para todo F, n, k, a, b

$$\phi_k^{n,F}(a) = b \Leftrightarrow \exists \sigma (\sigma \subset F \text{ y } \phi_k^{n,\sigma}(a) = b). \tag{8.3}$$

Como es bien sabido, la equivalencia (8.3), conocida como el teorema de finitud de la teoría de la recursividad, resulta ser una de las herramientas básicas de la computabilidad relativa.

## 9. Teorema de recursion.

Modificando en la forma obvia la prueba del teorema del punto fijo de la aritmética, se obtiene:

TH 9.1.

Para toda fórmula aritmética $\beta \in L^S$ con $\mathrm{libr}(\beta) = \{ x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \}$ existe un número natural k tal que

$$\Phi_F \vdash \alpha_k^{n,F} (x_0, \ldots, x_n) \leftrightarrow \beta (x_0, x_1, \ldots, x_n, \underline{k}). \tag{9.1}$$

Como consecuencia de este teorema, para toda función recursiva f, si $\beta$ representa en $\Phi_F$ a la función parcial $\psi$ recursiva en F definida por la igualdad

$$\psi (a_1, \ldots, a_n, b) = \phi_{f(b)}^{n,F} (a_1, \ldots, a_n) \tag{9.2}$$

se tendrá:

$$\psi (a, b) = c \leftrightarrow \phi_{f(b)}^{n,F} (a) = c \leftrightarrow \Phi_F \vdash \beta (x_0, \underline{a}, \underline{b}) \leftrightarrow x_0 \equiv \underline{c}. \tag{9.3}$$

Por el teorema del punto fijo existirá un número natural k verificando (9.1), con lo que para todo a, c son equivalentes las cinco proposiciones:

(a) $\phi_{f(k)}^{n,F} (a) = c$

(b) $\psi (a, k) = c$

(c) $\Phi_F \vdash \beta (x_0, \underline{a}, \underline{k}) \leftrightarrow x_0 \doteq \underline{c}$

(d) $\Phi_F \vdash \alpha_k^{n,F} (x_0, \underline{a}) \leftrightarrow x_0 \doteq \underline{c}$

(e) $\phi_k^{n,F} (a) = c$.

De la equivalencia de (a) y (e) se sigue el teorema de recursión:

TH 9.2.

Para toda función recursiva f con un argumento, existe un número natural k tal que para todo n se verifica:

$$\phi_k^{n,F} = \phi_{f(k)}^{n,F} .$$

## BIBLIOGRAFIA

(End 1972) Enderton, H.B. A mathematical introduction to logic. Academic Press, New York, 1972.

(Göd 1931) Gödel, K. Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 38. 1931, pp. 173-178.

(Pr 1077) Prida, J.F. Generalización del teorema de forma normal de Kleene al caso de la recursividad relativa, editado por el C.C.U.C., Madrid. 1977.

(Sh 1967) Shoenfield, J.R. Mathematical Logic. Addison-Wesley Publ. Co. Massachussets, 1967.

José F. Prida
Madrid, octubre 1981