UN EJEMPLO DE TEORIA DE HOMOTOPIA EN LOS GRUPOS ABELIANOS

por

LUIS JAVIER HERNANDEZ PARICIO

ABSTRAT.

We define a homotopy theory induced by a ring R with unity in the category of abelian groups Ab. This theory is different of the projective or injective homotopy theories defined by Eckmann and Hilton in Ab. But if the aditive structure of the ring R is divisible, then there is an epimorphic natural transformation from the theory induced by R to the injective homotopy theory. We also see that this transformation is not a natural equivalence.

In order to give the homotopy theory induced by R, we define a cofibration as a homomorphism $i : A \longrightarrow X$ such that for every homomorphism $f : A \longrightarrow M$, where M is an R-module, there exists $\bar{f} : X \longrightarrow M$ such that $\bar{f}i = f$. In a dual way it is defined a fibration. We prove that Ab with the above cofibrations and fibrations and fibrations, and taking as weak equivalences the homotopy equivalences, is a closed model category (in sense of Quillen).

INTRODUCCION

Observando las ventajas que aporta la teoría de homotopía en los espacios topológicos, se puede preguntar por la posibilidad de definir teorías de homotopía en otras categorías. Eckmann y Hilton en [1], [2], [3] confirman esta posibilidad definiendo las teorías de homotopía proyectiva e inyectiva en una categoría de módulos.

Para definir de un modo común los grupos de homotopía, ya sea en los espacios punteados, ya en los módulos, Hubert [5], [6] abstrae las propiedades del cono topológico, y las introduce en una categoría abstracta. Define los grupos de homotopía construyendo un complejo semi-simplicial de Kan, con la ayuda del funtor cono, o bien, con su dual el funtor "arcos".

También Quillen en [7], [8] estudia teoría de homotopía en categorías generales. Para ello, toma una categoría C con tres familias distinguidas de morfismos, cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles, satisfaciendo adecuados axiomas (ver 4.1).

Este artículo está en el orden de las ideas anteriores, más concretamente, para un anillo R con unidad, definimos una teoría de homotopía en la categoría de los grupos abelianos Ab. Esta es distinta de la homotopía proyectiva e inyectiva que Eckmann y Hilton definen en Ab, aunque en el caso de que la estructura aditiva del anillo R sea divisible, existe una transformación natural epimorfa de la homotopía asociada del anillo R sobre la homotopía inyectiva (ver 1.5). También se ve que esta transformación no es monomorfa.

El interés de esta teoría radica en que nos analiza obstrucciones que presenta un grupo abeliano para ser R-módulo. Si convenimos en llamar R-casimódulo a un grupo abeliano con una ley externa que verifica las propiedades de R-módulo exceptuando la asociatividad, se ve que para la teoría de homotopía inducida por R, los contráctiles son exactamente los R-casimódulos (teorema 1.3).

En el párrafo 3, se analizan las cofibraciones (definidas en el 2) inducidas por cuadrados cocartesianos; se prueba que si los homomorfismos inductores son homótopos, las cofibraciones obtenidas son del mismo tipo de homotopía en la categoría relativa.

En el párrafo 2, estudiamos las cofibraciones y fibraciones. Destacamos el teorema 2.2, ya que con la ayuda de éste, en el párrafo 4 se prueba que Ab con las cofibraciones y fibraciones definidas en este párrafo, y tomando como equivalencias débiles las equivalencias de homotopía, tiene estructura de categoría de modelos cerrada. Aprovechando esta estructura se extraen las principales consecuencias que Quillen obtiene en [7]. Ahora bien, éstas optimizadas, ya que aquí se puede tomar un cilindro con caracter funtorial (ver 4.3-(a). En particular, se definen los grupos de homotopía inducidos por R y se da la sucesión exacta de un par.

Utilizamos las siguientes notaciones: R es un anillo con unidad, Z el anillo de los enteros, R el anillo de los racionales, Ab es la categoría de los agrupos abelianos, Ab^A los grupos abelianos bajo A, Ab_A los grupos abelianos sobre A y Ab(2) la categoría de los pares. Si C es una categoría con una relación de homotopía, Ch denota la correspondiente categoría homotópica.

1 Homotopia inducida por un anillo con unidad

Un anillo con unidad R induce una relación de equivalencia en los morfismos de las categorías siguientes: Grupos abelianos, grupos abelianos bajo A, grupos abelianos sobre B y en la categoría de los pares de grupos abelianos. Se ve que en los grupos abelianos los contráctiles son exáctamente los R-casimódulos.

1 Definición. Sea f $K \to H$ un homorfismo de grupos abelianos, diremos que f es nulhomotopo, $f \simeq 0$, si existe $F: K \times R \to H$ bilineal tal que $F(x, 1) = f(x)$ para $x \in K$. Dados f, $g: K \to H$ diremos que $f \simeq g$ si $f\text{-}g \sim 0$. Esta relación es de equivalencia y al conjunto cociente lo denotaremos por $[K, H]$.

Notemos que si $K \otimes R$ es el producto tensorial como Z-módulos y $H^R = \text{Hom}$ (R, H), y denotaremos por

$$i_1 : K \to K \otimes R : \quad i_1(x) = x \otimes 1 \text{ para } x \in K$$

$$q_1 : H^R \to H : \quad q_1(\alpha) = \alpha(1) \quad \text{para } \alpha \in H^P$$

el hecho de que f sea nulhomotopo equivale a que f admita una extensión $\bar{f}$ con $\bar{f}\, i_1 = f$, o bien, que admita una elevación $\bar{\bar{f}}$ con $q_1 \bar{\bar{f}} = f$. Diremos que $K \otimes R$ es el cono de K y que H^R son los arcos de H.

La relación de equivalencia de la definición anterior es compatible con la composición de morfismos; por tanto se puede considerar la categoría cociente que llamaremos homotópica y denotaremos por Abh. Un homomorfismo se dice que es una equivalencia de homotopía si en la categoría homotópica induce un isomorfismo. Un objeto se dice contráctil si en la categoría homotópica es isomorfo a 0.

2 Definición. Un grupo abeliano K se dice que es un R-casimódulo si existe una aplicación bilineal $F: K \times R \to K$ tal que $F(x, 1) = x$ para $x \in K$ (Notemos que no exige la propiedad asociativa).

3 Teorema. Un grupo abeliano M es contráctil si y sólo si M es un R-casimódulo.

Demostración: Basta observar que M es contráctil si y sólo si $1_M \sim 0$.

En la categoría de los grupos abelianos bajo A se define la siguiente relación de homotopía.

4 Definición. Sea $i: A \to X$ un objeto de Ab^A y $f: X \to X'$ tal que $fi = 0$, se dice que $f \sim 0$ (rel A) si existe un homomorfismo $F: X \otimes R \to X'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & X' \\
X \otimes R \arrow[ur, "F"] & A \otimes R \arrow[l, "i\ \ id"'] \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}$$

Si f, $g \in Ab^A(i, i')$, se dice que $f \simeq g$ (rel A) si $f\text{-}g \simeq 0$ (rel A). La relación anterior es de equivalencia y es compatible con la composición de morfismos. Denotaremos que $Ab^A h$ a la categoría cociente. Los morfismos de Ab^A que inducen isomorfismos en $Ab^A h$ se dicen equivalencias de homotopía bajo A.

De un modo similar se define la relación de homotopía en la categoría de los grupos abelianos sobre B, Ab_B y en la categoría de los pares de grupos abelianos Ab(2).

5 Observación: Con la homotopía inyectiva de Eckmann-Hilton (ver [1], [2], [3]) en los grupos abelianos los morfismos nulhomotopos son aquellos que se factorizan a través de un grupo abeliano divisible. Si el anillo R es divisible (pensado como grupo abeliano), entonces los R-módulos también son divisibles (como grupos abelianos). Por tanto, en este caso, existe una transformación natural epimorfa de las clases de homotopía inducidas por el anillo R sobre las clases de homotopía inyectiva. Esta transformación en general no es monomorfa como lo prueba el hecho de que para el anillo Q, el grupo de las clases de homotopía inducidas por el anillo Q [Q/Z, Q/Z] es no nulo, en cambio, por ser Q/Z divisible, el grupo de las clases de homotopía inyectiva $[Q/Z, Q/Z]_I$ es nulo.

2 COFIBRACIONES Y FIBRACIONES

Puesto que estos conceptos son duales, únicamente expondremos lo referente a cofibraciones.

1 Definición. Un homomorfismo $i:A \to X$ se dice que es una cofibración, si para todo $f:A \to M$ donde M es un R-módulo, existe $\bar{f}:X \to M$ tal que $\bar{f}i = f$.

Notemos que si el anillo R es divisible, entonces todo monomorfismo es cofibración. También sucede que si A es contráctil, cualquier cofibración del tipo $i:A \to X$ es monomorfismo, lo mismo ocurre si A es libre de torsión y R tiene característica cero.

El teorema central de este párrafo es el siguiente:

2 Teorema. Sea el siguiente triangulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & X' \end{tikzcd}$$

Si i' es una cofibración y f es una equivalencia de homotopía, entonces f es una equivalencia de homotopía bajo A.

Para probar el teorema anterior veamos previamente el

3 Lema. Sea el triangulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i"] & \\ X \arrow[rr, "g"] & & X \end{tikzcd}$$

Si $g \simeq 1_X$, entonces existe $g':i \to i$ tal que $g'g \simeq 1_X$ (rel A).

Demostración: Denotaremos por 1, 1_X y por 2, 1_X+1_X. Como $1\text{-}g \simeq 0$, existe $F:X \to X^R$ tal que $q_1 F = 1\text{-}g$. Veamos que $g' = 2\text{-}g$.

(a) $g'g\text{-}1 = (2\text{-}g)g\text{-}1 = g+g+g^2\text{-}1 = (1\text{-}g)g\text{-}(1\text{-}g)$

Bastará ver que según la definición dual a la dada en (1.4), la homotopía $Fg\text{-}F:X \to X^R$ lleva bajo A, $g'g\text{-}1$ a 0. Es decir que el siguiente diagrama conmuta

(b)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "0"] \arrow[d, "i"'] & X^R \arrow[d, "q_1"] \\ X \arrow[r, "g'g\text{-}1"'] \arrow[ur, "Fg\text{-}F"] & X \end{tikzcd}$$

(c) $(g'g\text{-}1)i = g'gi\text{-}i = g'i\text{-}i = (2\text{-}g)i\text{-}i = 2i\text{-}i\text{-}i = q_1 0$

(d) $(Fg\text{-}F)i = Fgi\text{-}Fi = Fi\text{-}Fi = 0$

(e) $q_1(Fg\text{-}F) = q_1 Fg\text{-}q_1 F = (1\text{-}g)g\text{-}(1\text{-}g)$

Por (a), (c) (d) y (e) prueban que el diagrama (b) conmuta.

Demostración del teorema 2: Como [f] tiene inversa por la izquierda, existe $f':X' \to X$ tal que $f'f \simeq 1_X$. Se verifica que $f'i' \simeq i$; por ser i' cofibración, existe $f'':X' \to X$ tal que $f''f \simeq 1_X$, $f''i' = i$. Por el lema anterior existe $g':i \to i$ tal que $g'f''f \simeq 1_X$ (rel A). Entonces $\bar{f} = g'f''$ es inversa homotópica por la izquierda de f bajo A. Ahora si aplicamos el argumento anterior a $\bar{f}$, se sigue que existe $\bar{\bar{f}}$ inversa homotópica por la izquierda de $\bar{f}$ bajo A. Entonces

$$[\bar{\bar{f}}]^A = [\bar{\bar{f}}]^A \, [\bar{f}]^A \, [f]^A = [f]^A$$

Es decir, $\bar{f}$ es inversa homotópica de f bajo A.

3 COFIBRACIONES Y FIBRACIONES INDUCIDAS

Sea el siguiente cuadrado cocartesiano de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "i_\alpha"] \\ X \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

El homomorfismo α induce un funtor, $\alpha_*\colon Ab^A \to Ab^B$ de manera que al objeto i le hace corresponder el i_α y sobre los morfismos actúa de modo natural. Notemos que si i es una cofibración también lo es i_α. Entonces si Cof^A denota la subcategoría de Ab^A formada por las cofibraciones con dominio A, la restricción de α_* a Cof^A se puede considerar como un funtor del tipo $Cof^A \to Cof^B$. Veamos la compatibilidad de α_* con la relación de homotopía.

1 Proposición. Sean $f, g\colon i \to i'$ tal que $f \simeq g$ (rel A), entonces $f_\alpha \simeq g_\alpha$ (rel B).

Demostración: Como el funtor $- \otimes R$ conserva coproductos y conúcleos, el siguiente cuadrado es cartesiano

$$\begin{tikzcd} A \otimes R \arrow[r, "\alpha \otimes 1"] \arrow[d, "i \otimes 1"'] & B \otimes R \arrow[d, "i_\alpha \otimes 1"] \\ X \otimes R \arrow[r, "\bar{\alpha} \otimes 1"] & X_\alpha \otimes R \end{tikzcd}$$

Si $F\colon X \otimes R \to X'$ es la homotopía que arrastra bajo A f-g a 0, entonces la única $H\colon X_\alpha \otimes R \to X'$ tal que

$$H(\alpha \times 1) = F \qquad H\cdot(i_\alpha \times 1) = 0$$

lleva bajo B f_α-g_α a 0. #

2 Observación. Por las propiedades de los cuadrados cocartesianos se verifica de modo natural que

$$(1_A)_* = \mathrm{id}_{AbA} \qquad\qquad (\beta\alpha)_* = \beta_*\alpha_*$$

3 Corolario. Si A es un retracto de deformación fuerte de X, entonces B es retracto de deformación fuerte de X_α.

A continuación probaremos que si $\alpha^0, \alpha^1 : A \to B$ son homótopos, entonces los funtores α^0_*, α^1_*:$\mathrm{Cof}^A h \to \mathrm{Cof}^B h$ son equivalentes; para ello damos algunas notaciones y resultados previos.

Sea $i: B \times B^R \to Z$ un homomorfismo, con las notaciones

$$\begin{array}{ll} l_0 : B\times B^R \to Z : & l_0(b,\alpha) = b \\ l_1 : B\times B^R \to Z : & l_1(b,\alpha) = b+\alpha(1) \\ j : B \to B\times B^R : & j(b) = (b,0) \end{array}$$

se verifica que $l_k j = 1_B$ para $k = 0, 1$

Consideremos el diagrama cocartesiano

(D1)
$$\begin{tikzcd} B\times B^R \arrow[r, "l_k"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "i_{l_k}"] \\ Z \arrow[r, "\bar{l}_k"] & Z_{l_k} \end{tikzcd}$$

Observamos que también conmuta el triangulo

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "ij"'] \arrow[dr, "i_{l_k}"] & \\ Z \arrow[rr, "\bar{l}_k"] & & Z_{l_k} \end{tikzcd}$$

Así podemos considerar $\bar{l}_k$ un morfismo del tipo $ij \to i_{l_k}$.

4 Lema. Si i es una cofibración, $\bar{l}_0$, $\bar{l}_1$ son equivalencias de homotopía bajo B, según el anterior diagrama (D2).

Demostración: Veamos que $1_{B\times B^R} \simeq j l_k$ bajo j, sobre l_k, $k = 0, 1$.

Definamos las aplicaciones

G_0 , $G_1 : B \times B^R \to (B \times B^R)^R$
$G_0(b, \alpha)(r) = (0, \alpha_r)$, $\alpha_r(s) = \alpha(sr)$
$G_1(b, \alpha)(r) = (-\alpha(r), \alpha_r)$

Están bien definidas y verifican que

(a) $\quad q_1 G_k = 1_{B \times B^R} - jl_k$, $G_k j = 0$, $i_k^R G_k = 0$

Consideremos el siguiente diagrama

(D3)
$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "j"'] & & (B\times B^R)^R \arrow[rr, "i_k^R"] \arrow[dd, "i^R"] \arrow[dr] & & B^R \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& B\times B^R \arrow[ur, "G_k"] \arrow[rr, "1-jl_k"] \arrow[dd, "i"] & & B\times B^R \arrow[rr, "l_k"] \arrow[dd, "i"] & & B \arrow[dd, "i_{l_k}"] \arrow[dddr, "ij"] & \\
& & Z^R \arrow[rr, "\bar{i}_k^R"] \arrow[dr] & & (Z_{l_k})^R \arrow[dr] & & \\
& Z \arrow[ur, dashed, "H_k"] \arrow[rr, dashed, "h_k"] & & Z \arrow[rr, "\bar{i}_k"] \arrow[drrr, dashed, "1-h_k"'] & & Z_{l_k} & \\
& & & & & & Z
\end{tikzcd}$$

En el cubo de la derecha, la cara vertical anterior es un cuadrado cocartesiano, por construcción. El cubo aparece al aplicarle a esta cara el functor arcos y la transformación natural q_1. En la izquierda, la parte de arriba conmuta por (a).

Notemos que $i^R G_k \sim 0$ y como i es cofibración existe

$H_k : Z \to Z^R$ tal que

(b) $\quad H_k i = i^R G_k \qquad$ definimos $h_k = q_1 G_k$

Observemos que

$(1-h_k)i = i-h_k i = i-i(1-jl_k) = i-i+ijl_k = ijl_k$

Como (D1) es cocartesiano existe un único $\phi_k = (ij \vee 1-h_k) : Z_{l_k} \to Z^R$ tal que

(c) $\quad \phi_k \bar{i}_k = 1-h_k = 1-q_1 H_k = 1-q_1 H_k$, $\phi_k i_{l_k} = ij$, $H_k ij = i^R G_k j = i^R 0 = 0$

De donde se deduce que ϕ_k es un morfismo del tipo $i_{l_k} \to ij$ y que $\phi_k \bar{l}_k \simeq 1_Z$ bajo ij.

Notemos que $(\bar{l}_k)^R H_k i = (\bar{l}_k)^R i^R G_k = (i_{l_k})^R l_k^R G_k = (i_{l_k})^R 0 = 0 = 0 l_k$

Como (D1) es cocartesiano existe un único $\bar{H}_k = 0V(\bar{l}_k)^R H_k : Z_{l_k} \to (Z_{l_k})^R$ tal que

(d) $\quad H_k \bar{l}_k = (\bar{l}_k)^R H_k$ y $H_k i_{l_k} = 0$

Recordemos que como l_k es epimorfismo y (D1) es cocartesiano, entonces $\bar{l}_k$ también es epimorfismo. Además

$$q_1 H_k \bar{l}_k = q_1 (\bar{l}_k)^R H_k = \bar{l}_k q_1 H_k = \bar{l}_k h_k = \bar{l}_k (1 - \phi_k \bar{l}_k) = (1 - \bar{l}_k \phi_k) \bar{l}_k$$

Por ser $\bar{l}_k$ epimorfismo, $q_1 \bar{H}_k = 1 - \bar{l}_k \phi_k$, que junto con (d) nos dice que $\bar{l}_k \phi_k \simeq 1_{Z_{l_k}}$ bajo i_{l_k}.

5 Lema. Sean $l: A \to B$ y $j: B \to A$ homomorfismos tal que $lj = 1_B$. Podemos definir el siguiente funtor $\hat{j}: Ab^A \to Ab^B$, de modo que a $f: i \to i'$ le hace corresponder $f: ij \to i'j$. Entonces existe una transformación natural $\bar{l}: \hat{j} \to l_*$ como funtores del tipo $Ab^A \to Ab^B$, $Ab^A h \to Ab^B h$ o bien $Cof^A h \to Cof^B h$.

Demostración: Basta en el cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "i_l"] \\
X \arrow[r, "\bar{l}_i"] & X_l
\end{tikzcd}$$

considerar $\bar{l}_i$ como un morfismo de ij en i_l.

6 Teorema. Sean $\alpha^0, \alpha^1: A \to B$ homomorfismos que inducen funtores α_*^0, α_*^1: $: Cof^A h \to Cof^B h$. Si $\alpha^0 \simeq \alpha^1$, entonces existe una equivalencia natural

$$\Lambda: \alpha_*^0 \to \alpha_*^1 : Cof^A h \to Cof^B h$$

que verifica las siguientes propiedades

i) Sea $i: A \to X$ una cofibración, entonces el siguiente diagrama conmuta en Abh

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\alpha^0} \arrow[dd, "\Lambda_i"] \\
X \arrow[ur, "{[\bar{\alpha}^0]}"] \arrow[dr, "{[\alpha^1]}"'] & \\
 & X_{\alpha^1}
\end{tikzcd}$$

Donde Λ_i, que es un morfismo de $\mathrm{Cof}^B h$, se puede considerar de modo natural como un morfismo de Abh.

ii) Sea $P:X \to C$ el conúcleo de i, $P_{\alpha^0}:X_{\alpha^0} \to C$, $P_{\alpha^1}:X_{\alpha^1} \to C$ los conúcleos de i_{α^0} e i_{α^1} respectivamente, entonces el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathrm{Ab}^B h$.

$$\begin{tikzcd}
X_{\alpha^0} \arrow[rr, "\Lambda_i"] \arrow[dr, "{[P_{\alpha^0}]^B}"'] & & X_{\alpha^1} \arrow[dl, "{[P_{\alpha^1}]^B}"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Recordemos que $l_k:B\times B^R \to B$ y $j:B \to B\times B^R$ verifican que $l_k j = 1_B$. Por tanto están en las condiciones del lema anterior. Entonces existe una transformación natural $\bar{l}_k:\hat{j} \to (l_k)_*$ como funtores del tipo $\mathrm{Cof}^{B\times B^R}h \to \mathrm{Cof}^B h$. Ahora bien, si $i:B\times B^R \to B$ es una cofibración, por el lema 4 $\bar{l}_k:ij \to i_{l_k}$ es una equivalencia de homotopía bajo B. Por tanto en este caso $\bar{l}_k:\hat{j} \to (l_k)_*$ es una equivalencia natural.

Sean $j:B \to B\times B^R$, $j':B^R \to B\times B^R$ las inclusiones canónicas. Como $\alpha^0 \sim \alpha^1$, existe $F:A \to B^R$ tal que $q_1F = \alpha^1 \ \alpha^0$. Definimos $\theta = j\alpha^0 + j'F$, fácilmente se comprueba que $l_k\theta = \alpha^k$ $k = 0, 1$.

Definimos Λ como la composición de las equivalencias

$$(\alpha^0)_* = (l_0)_*\theta_* \xrightarrow{(\bar{l}_0)^{-1}\theta_*} \hat{j}\theta_* \xrightarrow{\bar{l}_1\theta_*} (l_1)_*\theta_* = (\alpha^1)_*$$

Sabemos que $\alpha_k = \bar{l}_k\theta$, $l_k\theta = \alpha^k$. Entonces

$$[\bar{\alpha}^1] = [\bar{l}_1][\theta] = [\bar{l}_1][\bar{l}_0]^{-1}[\alpha^0] = \Lambda[\alpha^0]$$

como aseguramos en i).

Finalmente notemos que

$$(P_\theta)_{l_k} = P_{\theta l_k} \ , \ P_\theta = (P_\theta)_{l_k}\bar{l}_k$$

Entonces en $Ab^B h$ podemos escribir

$$[P_{\alpha^0}]^B = [P_0]^B\,([\bar{i}_0]^B)^{-1} = [P_{\alpha^1}]^B\,[\bar{i}_1]^B\,([\bar{i}_0]^B)^{-1} = [P_{\alpha^1}]^B \Lambda_i$$

con lo que hemos probado ii).

7 ***Corolario.*** Sea el cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "i_\alpha"] \\ X \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & X \end{tikzcd}$$

Si i es cofibración y α una equivalencia de homotopía, entonces $\bar{\alpha}$ también es una equivalencia de homotopía.

4 ESTRUCTURA DE CATEGORIA DE MODELOS CERRADA

Quillen en [7] estudia categorías adecuadas para hacer teorías de homotopía. En [8] demostró que los siguientes axiomas son equivalentes a sus axiomas originales.

Definición. Una categoría de modelos cerrada es una categoría C con tres familias distinguidas de morfismos: Cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles. Estas satisfacen los siguientes axiomas:

CM1: C es cerrada por límites finitos directos e inversos.
CM2: Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismos en C ; si dos de los morfismos f, g o gf son equivalencias débiles, también lo es el tercero.
CM3: Si f es un retracto de g (en la categoría de los pares), y g es una cofibración, fibración o equivalencia débil, entonces también lo es f.
CM4: Dado el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

el morfismo de puntos que hace conmutar los dos triangulos , existe en las siguientes situaciones

a) Si i es cofibración y p es fibración y equivalencia débil.

b) Si i es cofibración y equivalencia débil y p es fibración.

CM5: Un morfismo f se puede factorizar de las siguientes formas:

a) $f = pi$, donde i es una cofibración y p fibración y equivalencia débil.

b) $f = p'i'$, donde i' es cofibración y equivalencia débil y p' es fibración.

*2 **Teorema.*** Un anillo R con unidad, induce en la categoría de los grupos abelianos una estructura de categoría de modelos cerrada, tomando como cofibraciones y fibraciones los morfismos así definidos en el párrafo 2, y como equivalencias débiles las equivalencias de homotopía definidas en el párrafo 1.

Demostración: Los axiomas CM1, CM2 y CM3 son inmediatos. Probemos CM4. Para ello supongamos que i es cofibración y equivalencia débil. Por el teorema (2.2) existe $r:X \to A$ tal que $ri = id_A$ y $ir \sim id_X$ (rel A). Notemos que ir es un morfismo de $Ab^A(i, i)$ y g es un morfismo de $Ab^A(i, pf)$. Por tanto $gir \sim g$ (rel A), o bien, $g\text{-}gir \sim 0$ (rel A). Sea $q:X \to C$ el conúcleo de i, de la definición de homotopía bajo A, se deduce que existe $l:C \to B$ tal que

$$lq = g\text{-}gir \quad , \quad l \simeq 0$$

Por ser p fibración, existe $\bar{l}:C \to E$ tal que $p\bar{l} = l$. Entonces $h = fr + \bar{l}q$ verifica la conmutatividad del diagrama. De un modo dual se prueba el caso de que p sea equivalencia débil.

Para probar CM5, consideremos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & B \\ & B \oplus (A \otimes R) \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \times B^R \arrow[dr, "p'"] & \\ A \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

Donde

$i(a) = f(a) \ \ a \otimes 1 \qquad a \in A$
$p(x+y) = x \qquad x \in B \ , \ y \in A \otimes R$
$i'(a) = (a, 0)$
$p'(a, \alpha) = f(a) \ \ \alpha(1) \qquad a \in A \ , \ \alpha \in B^R$

Probemos que i es una cofibración y que p es una fibración y una equivalencia débil. Notemos que el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i_1"] & \\ B \oplus (A \otimes R) \arrow[rr, "pr_2"] & & A \otimes R \end{tikzcd}$$

De que $i_1 : A \to A \otimes R : i_1(a) = a \otimes 1$, sea claramente cofibración (basta recordar la definición de nulhomotopa), se sigue que i también lo es. Para ver que p es una fibración y una equivalencia débil, nótese que la inclusión de B en $B \oplus (A \otimes R)$ es sección e inversa homotópica de p. De un modo dual se ve que i' es cofibración y equivalencia débil y que p' es una fibración.

3 Observaciones.

a) Notemos que en la anterior categoría de modelos cerrada todos los objetos son cofibrantes y fibrantes (ver [7]). Además la relación de homotopía definida en el párrafo 1, coincide con la homotopía a izquierda y a derecha definidas por Quillen. Finalmente notemos que en este caso el cilindro y el cocilindro se pueden tomar de modo funtorial. Tomemos como cilindro

$$i_0, i_1 : A \to A \oplus (A \otimes P)$$
$$i_0(a) = a \ , \ i_1(a) = a - a \otimes 1$$

b) Al poder considerar el cilindro de modo funtorial, también los funtores suspensión y lazos se pueden tomar de modo funtorial. Más concretamente si S es el conúcleo de $i : Z \to R$: $i(1) = 1$, entonces la suspensión de A es $A \otimes S$ y los lazos de A, Hom (S, A).

c) En principio en $[A \otimes S, B]$ tenemos dos estructuras de grupo, la una inducida por la definición de Quillen a través de la estructura de co-grupo de la suspensión de A, y la otra inducida por la estructura de grupo de B. Ahora bien, las dos estructuras son iguales y abelianas.

d) Si $X \to Y \to Z$, $X \times \Omega Z \to X$ es una sucesión fibrada, en el sentido de Quillen. Puesto que la estructura de categoría de modelos considerada en Ab es cerrada, y los cilindros y lazos tienen carácter funtorial, se puede construir en Ab la sucesión fibrada larga siguiente:

$$\ldots \to \Omega X \to \Omega Y \to \Omega Z \to X \to Y \to Z$$

Cualquier funtor $[A, -]$ transforma la sucesión anterior en una sucesión exacta larga de grupos abelianos. Similares consideraciones se pueden hacer para las sucesiones cofibradas.

Utilizando la descomposición de un homomorfismo g como composición de una cofibración trivial y de una fibración (ver teorema 2) se prueba el siguiente lema.

4 Lema. Sea $g: Y \to B$ un homomorfismo; consideremos el siguiente cuadro cartesiano

$$\begin{tikzcd} F_g \arrow[r] \arrow[d, "g^1"'] & B^R \arrow[d, "q_1"] \\ Y \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Sea $n: F_g \times \Omega B \to F_g : n((x, \alpha), w) = (x, \alpha + wp)$, donde $p: R \to S$ es la proyección natural. Entonces $F_g \xrightarrow{g^1} Y \xrightarrow{g} B$, $n: F_g \times \Omega B \to F_g$ es una sucesión fibrada.

5 Proposición.

i) Sea $g: Y \to B$ homomorfismo, entonces la sucesión

$$\dots \to \Omega F_g \xrightarrow{\Omega g^1} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega B \xrightarrow{i^1} F_g \xrightarrow{g^1} Y \to B$$

donde $i^1(w) = (0, wp)$ verifica que para todo A, el funtor $[A, --]$ la transforma en una sucesión exacta de grupos abelianos.

ii) Si $g: Y \to B$ es fibración, e $i: F \to Y$ es el núcleo de g, entonces la siguiente sucesión es equivalente homotópicamente a la anterior verificando por tanto la misma propiedad

$$\dots \to \Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega B \xrightarrow{\Delta} F \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{g} B$$

Donde $\Delta = \bar{k} i^1$, siendo i^1 como en i) y $\bar{k}$ es la inversa homotópica de $k: F \to F_g : k(x) = (x, 0)$.

Demostración: Basta aplicar la proposición 4 del párrafo 3 de [7] y comprobar que el morfismo de conexión es el indicado.

Consideremos el siguiente diagrama commutativo

$$\begin{tikzcd} F_g \arrow[r] & Y\times B^R \arrow[dr] & \\ & & B \\ F \arrow[uu, "k"] \arrow[r, "i"] & Y \arrow[uu] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Como g es fibración (caso ii), por el dual del teorema 2.2 se sigue que k es una equivalencia de homotopía. #

6 Nota. Un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd}$$

induce un morfismo natural en las sucesiones de tipo i) asociadas a g y a g'. Si g y g' son fibraciones entonces se induce un morfismo entre las sucesiones de tipo ii) asociadas, aunque algunos cuadrados, en este caso, conmutan salvo homotopía.

7 Definición. Tomemos $\otimes^0 S = Z$, entonces llamaremos n-ésimo grupo de homotopía de X a $\pi_n(X) = [\otimes^n S\ X]$. Si $g{:}Y \to B$ es un monomorfismo $\pi_n(B, Y) = \pi_{n-1}(F_g)$, $n \geqslant 1$ es el n'ésimo grupo de homotopía del par (B, Y).

8 Corolario. La sucesión de los grupos de homotopía asociada al par (B, Y) es exacta.

Finalmente haremos observar que consideraciones similares se pueden hacer para las sucesiones cofibradas.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Eckmann "Homotopie et dualité" Colloque de Topologie Algébraique (1956), Centre Belge de Recherches Mathématiques, 41-53.

[2] P.J. Hilton "Homotopy Theory of Modules and Duality" International symposium on algebraic topology (1958), Universidad Autónoma de Mexico. 273-281.

[3] P.J. Hilton "Homotopy Theory and Duality" Gordon and Breach (1965).

[4] P.J. Hilton, U. Stammbach "A Course in Homological Algebra" GTM 4. Springer-Verlag (1971).

[5] J.H. Huber "Homotopy Theory in General Categories". Math. Annalen 144, 361-385 (1961).

[6] J.H. Huber "Standard Constructions in Abelian Categories" Math. Annalen 146, 321-325 (1962).

[7] D.G. Quillen "Homotopical Algebra" Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag (1967).

[8] D.G. Quillen "Racional Homotopy Theory" Annals of Maths. (2) 90, 205-295 (1969).

Luis Javier Hernández Paricio
Depto. de Geometría y Topología (U. Zaragoza)
Zaragoza, Diciembre de 1982