“DUE NUOVI TEOREMI SUI SISTEMI LINEARI DI QUADRICHE A JACOBIANA IDENTICAMENTE NULLA”

per

LANDO DEGOLI

RIASSUNTO.

Si dimostrano alcune condizioni necessarie e sufficienti affinché un sistema di quadriche dell' S_r proiettivo sia a Jacobiana identicamente nulla, mediante due teoremi A e B.

Il primo teorema si applica nel caso in cui il sistema lineare sia privo di sistemi subordinati essenziali, il secondo teorema si applica quando il sistema lineare possiede dei sistemi subordinati essenziali.

1. Il problema di determinare i sistemi lineari di quadriche si S_r di dimensione $d \geqslant r$ a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica $\leqslant r$ è stato affrontato per la prima volta da *Bonferroni* [1] il quale ha determinato tutti i sistemi suddetti dell' S_3.

Successivamente *Muracchini* [3] ha determinato quasi tutti i sistemi analoghi dell' S_4.

Degoli [4] si è in seguito occupato dei sistemi dell' S_5.

In questo articolo dimostreremo alcuni teoremi relativi ai sistemi lineari di quadriche dell' S_r di dimensione qualsiasi a Jacobiana identicamente nulla.

Per evitare lungaggini chiameremo sistemi di dimensione d e caratteristica m i sistemi lineari di quadriche di dimensione d a Jacobiana di caratteristica m e li indicheremo col simbolo abbreviato : $L_{d/m}$.

Nello spazio lineare S_r, riferito a coordinate proiettive omogenee x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, r$) si assumano $d + 1$ quadriche linearmente indipendenti:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots, f_d = 0 \tag{1}$$

con:

$$f_q = \sum_{i\,k} a_q^{ik}\, x_i\, x_k.$$

Un sistema L_d di dimensione d risulta espresso dalla equazione:

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i f_i = 0 \tag{2}$$

Supponiamo che la matrice Jacobiana a $r + 1$ righe e d colonne:

$$J = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right\| \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots, d \\ s = 0, 1, 2, \dots, r \end{pmatrix} \tag{3}$$

abbia caratteristica $r - h \leqslant d - (h \geqslant 0)$.

E' noto che in generale la matrice Jacobiana uguagliata a zero rappresenta il luogo geometrico dei punti di S_r coniugati tra loro rispetto a tutte le quadriche del sistema.

Quando la Jacobiana é identicamente nulla, cioé nulla in tutti i punti di S_r, allora l'intero S_r è luogo di punti coniugati.

Se la caratteristica della Jacobiana è $r \leqslant d$ un punto genérico di S_r è coniugato con un solo punto, se la caratteristica è $r - h$ ($h > 0$, $r - h \leqslant d$) un punto generico di S_r è coniugato con un S_h.

Ovviamente la caratteristica m di un sistema $L_{d/m}$ non è mai superiore ad $r + 1$ e mai inferiore a 2 perciò eviteremo spesso di porre la condizione: $2 \leqslant m \leqslant r + 1$.

Se avviene che $m < r + 1$ ed $m \leqslant d$ allora $m + 1$ quadriche linearmente indipendenti del sistema sono anche funzionalmente dipendenti cioè ciascuna di esse è funzione non lineare delle altre.

Un sistema $L_{d/m}$ possiede sempre dei sistemi subordinati $L_{g/c}$ che non impongono alle quadriche in essi contenute di essere funzionalmente dipendenti. Diremo banali detti sistemi in cui si ha:

$$m - 1 \leqslant g \leqslant d - 1 \quad , \quad c = m$$

Invece non è detto che $L_{d/m}$ possieda sempre sistemi subordinati $L_{g/c}$ con:

$$2 \leqslant g \leqslant d - 1 \quad , \quad 2 \leqslant c \leqslant m - 1 \quad , \quad c \leqslant g.$$

Questi, quando esistono, impongono a $c + 1$ quadriche linearmente indipendenti comunque scelte entro $L_{g/c}$ di essere funzionalmente dipendenti. Tali sistemi saranno detti *essenziali.*

Esiste il *TEOREMA A:*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare di quadriche L_d *di* S_r, *privo di sistemi subordinati essenziali, sia a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica* $r - k \leqslant d$ $(k > 0)$, *è che le quadriche del sistema che passano per un punto generico di* S_r *abbiano in comune un* S_{k+1}.

Supponiamo innanzitutto $d \geqslant r$ e dimostriamo il caso particolare:

Se il sistema $L_{d/r}$ $(d \geqslant r)$ *è a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica r, le quadriche del sistema che passano per un punto hanno in comune una retta.*

Se la Jacobiana è identicamente nulla di caratteristica r ciò significa che tutti i determinanti della matrice (3) d'ordine $r + 1$ sono identicamenti nulli. Ricordando che è $d \geqslant r$, consideriamo il determinante individuato da $r + 1$ quadriche qualsiasi. Potremo scegliere, senza nuocere alla generalità, le prime $r + 1$ quadriche del sistema:

$$f_0, \; f_1, \; f_2 \; , \ldots , f_{r-1}, f_r$$

e si avrà:

$$D = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_0}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_0} \\ \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} \\ \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{Vmatrix} \equiv 0 \qquad (4)$$

I minori di ordine r estratti da qualsiasi matrice formata con r colonne del determinante D non sono mai tutti nulli, altrimenti esisterebbe entro $L_{d/r}$ il sistema subordinato essenziale $L_{r-1/r-1}$ contro l'ipotesi. E' dunque necessario che uno almeno di questi minori sia diverso da zero.

Possiamo supporre che sia il minore ottenuto eliminando da D l'ultima riga e l'ultima colonna; lo indicheremo con A_r.

Prendiamo in considerazione la matrice estratta da D formata con le prime r righe ed indichiamo con:

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \dots, A_{r-1}$$

i minori d'ordine r che si ottengono sostituendo alla prima, seconda, ect. colonna di A_r l'ultima colonna della matrice.

Uno solo di questi determinanti può essere nullo, perchè se due lo fossero, per un teorema di *Kronecker* [6] sarebbero tutti nulli compreso A_r il che è impossibile.

Poichè il determinante D è identicamente nullo le r + 1 quadriche sono funzionalmente dipendenti. Si avrà, scegliendo come quadrica generica, ad esempio, f_r:

$$f_r = F\,(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{r-1}) \tag{5}$$

Questa relazione vale naturalmente comunque si scelgano le r + 1 quadriche lin. ind. in seno ad L_d. Ma non è mai possibile che gruppi di quadriche lin. ind. di L_d in numero $< r + 1$ siano funzionalmente dipendenti altrimenti esisterebbero entro L_d dei sistemi subordinati essenziali contro l'ipotesi. Quindi una eguaglianza analoga alla (5) è impossibile con un numero di quadriche lin. ind. $< r + 1$.

Derivando la (5) si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \dots, r-1) \tag{6}$$

sistema di primo grado da cui si ricavano agevolmente le derivate parziali di F. Si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} = -\frac{A_i}{A_r} \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \dots, r-1) \tag{7}$$

Consideriamo un punto x di S_r di coordinate: $x_0, x_1, \dots, x_r$ e sia x' di coordinate $x'_0, x'_1, \dots, x'_r$ il suo coniugato rispetto a tutte le quadriche del sistema.

La retta che unisce i due punti è data da:

$$y_i = t_1\, x_i + t_2\, x'_i \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \dots, r) \tag{8}$$

Sostituendo la (8) in tutte le quadriche, si ottiene per la quadrica generica f_m:

$$f_m(y) = f_m(x)\, t_1^2 + f_m(x')\, t_2^2 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, r) \tag{9}$$

perchè i termini $2\, a_m^{ik} \cdot x_i\, x'_k$ sono nulli essendo coniugati i punti x ed x'.

Sostituendo le (9) nelle (5) e quindi derivando rispetto a t_1 e t_2 si ha:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial t_1} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_r}{\partial t_2} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t_2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Derivando le (9) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial t_1} &= 2\, t_1\, f_m(x) \\ & & (m = 0, 1, 2, \ldots, r) \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_2} &= 2\, t_2\, f_m(x') \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (10):

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} f_s(x) \\ f_r(x') &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} f_s(x') \end{aligned}$$

e infine per la (7):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r} A_i\, f_i(x) &= 0 \\ \sum_{i=0}^{i} A_i\, f_i(x') &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Le (11) sono delle identità rispetto alle t_1 e t_2.

Perchè queste due identità coesistano occorre e basta che sia:

$$f_m(x) = c\, f_m(x') \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

con c costante non nulla.

Infatti nelle (11) le variabili t_1 e t_2 compaiono soltanto nei determinanti: $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}, A_r$ che risultano anche funzioni omogenee dello stesso grado in t_1 e t_2 ed inoltre sappiamo che uno solo è al massimo nullo.

Al rapporto t_1/t_2 si possono dare infiniti valori a piacere ed in particolare, si possono fissare r valori in corrispondenza dei quali ciascuna delle (11) dà origine ad un sistema algebrico di primo grado ad r equazioni ed r incognite.

Queste ultime in entrambi i sistemi risultano gli r rapporti delle $f_k(x)$ od $f_k(x')$ rispetto ad una qualunque di esse, ad esempio rispetto ad $f_r(x)$ od $f_r(x')$.

Si tratta cioè rispettivament dei rapporti:

$$f_k(x)/f_r(x) \quad , \quad f_k(x')/f_r(x') \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-1) \tag{12}$$

Poichè i coefficienti ed i termini noti di queste equazioni sono sempre gli stessi $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}, A_r$ in entrambi i sistemi, le due soluzioni che si ottengono saranno le stesse. Si avrà:

$$\frac{f_k(x)}{f_r(x)} = \frac{f_k(x')}{f_r(x')} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-1) \tag{13}$$

Ma tale uguaglianza è verificata solo se:

$$f_p(x) = c\, f_p(x') \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, r) \tag{14}$$

con c costante non nulla.

A rigore nel caso che uno degli A_i $(i = 0, 1, \ldots, r)$ delle (11), ad esempio A_j $(0 \leqslant j \leqslant r)$ fosse nullo non sarebbe possibile per la sola quadrica f_j dedurre che:

$$f_j(x) = c\, f_j(x')$$

Ma in tal caso consideriamo tutte le r quadriche, le cui derivate parziali compaiono in A_j e la matrice formata con le colonne del determinante D in cui compaiono dette quadriche.

Sappiamo che almeno un determinante di detta matrice è non nullo. Denominiamo quest'ultimo con A'_r e ripetiamo il ragionamento già fatto usando al posto di A_r il determinante A'_r otterremo così i determinanti: $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{r-1}$, A'_r e giungeremo a conclusioni analoghe, cioè alle formule:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{r} A'_i f_i(x) = 0 \\ & & (i = 0, 1, \ldots, r) \qquad (15) \\ &\sum_{i=0}^{r} A'_i f'_i(x') = 0 \end{aligned}$$

Da cui otterremo:

$$f_p(x) = c\, f_p(x') \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, r) \qquad (16)$$

Ma questa volta anche la quadrica f_j soddisfa alla (16) perchè A'_j non è nullo. Pertanto ogni eccezione è rimossa.

Se ne deduce che tutte le quadriche del sistema L_d che passano per un punto x passano anche per il suo coniugato x' e reciprocamente. Se x è situato sulla quadrica f_m si avrà:

$$f_p(x) = 0$$

e per la (14):

$$f_p(x') = 0$$

e quindi:

$$t_1^2\, f_p(x) + t_2^2\, f_p(x') = 0$$

e per la (9):

$$f_p(y) = 0\,,$$

dove y è il punto generico della retta x x'.

Dunque la retta in questione appartiene per intero alla quadrica f_p. Se ne deduce che tutte le quadriche che passano per x contengono la retta x x'.

Supponiamo ora che la Jacobiana del sistema L_d sia identicamente nulla di caratteristica r - k. Ciò significa che un punto x di S_r ha per coniugato un S_k rispetto a tutte le quadriche di L_d.

Il sistema L_d sarà intersecato da un generico S_{r-k} che passa per x secondo un sistema lineare L'_d di quadriche di S_{r-k}, che a sua volta intersecherà l' S_k in un punto x', che risulta il coniugato di x rispetto a tutte le quadriche del sistema L'_d.

Potremo scegliere per coordinate di S_{r-k} le: $x_0, x_1, \dots, x_{r-k}$,annullando tutte la altre coordinate, cioè scrivendo:

$$x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \dots = x_r = 0.$$

Le equazioni delle quadriche $f_0, f_1, \dots, f_d$ di S_{r-k} saranno del tipo:

$$f_i\,(x_0, x_1, \dots, x_{r-k}, 0, 0, 0, \dots, 0) = 0$$

Le derivate parziali:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_s} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, d)$$

per $x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \cdots x_r = 0$, saranno tutte nulle. La Jacobiana del sistema L'_d:

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right\| \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots, d \\ s = 0, 1, 2, \dots, r - k \end{pmatrix}$$

sarà identicamente nulla.

Essa non potrà avere caratteristica superiore ad $r - k$ perchè il numero delle sue righe è $r\ \ k + 1$, essa non potrà avere caratteristica inferiore ad $r\ \ k$, altrimenti il punto x avrebbe per coniugato un S_g con $g > 0$ e non il solo punto x'.

Ne segue che il sistema L'_d di S_{r-k} ha caratteristica $r\ \ k$ questo porta alla conclusione, per la prima parte del teorema, che le quadriche di L'_d che passano per x avranno in comune la retta x x'.

Poichè possiamo dire la stessa cosa per tutti gli S_{r-k} che passano per x, se ne deduce che le quadriche di L_d che passano per x avranno in comune l' S_{k+1} congiungente il punto x con l' S_k.

La condizione del teorema è dunque necessaria. Essa è anche sufficiente.

Infatti se tutte le quadriche di L_d che hanno in comune un punto x, hanno in comune un S_{k+1} è evidente che il punto x ha per coniugato lo stesso S_{k+1} rispetto al sistema L_{d-1} di quadriche che passano per x. Un'altra quadrica di L_d, non passante per x, non contiene ovviamente l'S_{k+1}, e nemmeno l'iperpiano polare di x rispetto a questa quadrica può contenere l'S_{k+1}, altrimenti x giacerebbe sulla quadrica. Perciò l'iperpiano taglierà l'S_{k+1} in un S_k e quindi il punto x ha per coniugato un S_k rispetto a tutte le quadriche di L_d.

Ciò significa che la Jacobiana è identicamente nulla di caratteristica $r - k$ come volevamo dimostrare.

Dimostriamo il teorema nel caso $d < r$ tenendo presente la condizione: $r - k \leqslant d$, che finora era superflua.

Consideramo dapprima il caso $d = r - 1$. Sia dunque il sistema $L_{r-1/r-k}$ con $k \geqslant 1$, per un punto generico P di S_r mandiamo un iperpiano. Questo per un noto teorema di Terracini taglia l' $L_{r-1/r-k}$ in un sistema L' di quadriche di S_{r-1} avente la stessa dimensione $r - 1$ e la stessa caratteristica $r - k = r - 1 - (k - 1)$.

Poichè ora la dimensione del sistema uguaglia quella dello spazio ambiente per la prima parte del teorema avremo che le quadriche di L'_{r-2} passanti per P hanno in comune un S_k (non multiplo).

Variando l'iperpiano per P si ottengono infiniti S_k che constituiscono una varietà.

Questa varietà non può essere di dimensione superiore a $k + 1$ nè di ordine superiore ad uno, altrimenti la sua sezione con un iperpiano per P non sarebbe un solo S_k (non multiplo).

Pertanto tale varietà e un S_{k+1}.

Supponiamo ora di avere un sistema $L_{r-2/r-k}$ con $k \geqslant 2$. Per un punto generico P di S_r passa un L_{r-3} appartenente al sistema dato. Mandiamo per P un S_{r-1} che taglia per il teorema di Terracini il sistema dato secondo un $L'_{r-2/r-k}$ di S_{r-1}.

Entro l' S_{r-1} per P mandiamo un S_{r-2} che taglia il precedente sistema secondo un $L''_{r-2/r-k}$.

Possiamo ora dedurre per la prima parte del teorema che le quadriche di L'' passanti per P hanno in comune un S_{k-1}. Variando l'S_{r-2} entro l'S_{r-1} otteniamo un S_k comune a tutte le quadriche per P di L', variando l'S_{r-1} otterremo un S_{k+1} comune a tutte le quadriche di L_{r-3}.

Proseguendo con un ragionamento analogo riusciremo a dimostrate il teorema anche per $L_{r-h/r-k}$ e quindi per $L_{d/r-k}$ con $d < r - 1$, $r - k \leqslant d$. Infatti basta porre $r - d = h$ perchè sia: $L_{d/r-k} = L_{r-h/r-k}$.

La necessità è dimostrata.

Dimostriamo ora la sufficienza. Supponiamo che un sistema L_d $(d < r)$ sia tale che per un punto P di S_r passi un sistema subordinato L_{d-1} di quadriche aventi in comune un S_{k+1}.

Il punto P ha per coiugato rispetto a tutte le quadriche dell' L_{d-1} :l'S_{k+1}. Rispetto ad una ulteriore quadrica di L_d non passante per P il punto P avrà per coniugato un iperpiano, che non può contenere l'S_{k+1} altrimenti la quadrica passerebbe per P. Tale iperpiano taglia l'S_{k+1} in un S_k che risulta coniugato con P rispetto a tutte le quadriche di L_d. Pertanto la caratteristica di L_d è k, come volevamo dimostrare.

2. Stabiliamo la convenzione che una quadrica sia da considerarsi un sistema di dimensione zero e caratteristica 1 useremo il simbolo $L_{0/1}$.

Un sistema $L_{p/q}$ con $q > p$ non può essere che del tipo $L_{p/p+1}$ quando in esso esistono $p + 1$ quadriche funzionalmente indipendenti.

Diremo quindi che esso è riducibile in $p + 1$ addendi irriducibili secondo la formula:

$$L_{0/1}^{(1)} + L_{0/1}^{(2)} + \ldots + L_{0/1}^{(p+1)} = L_{p/p+1}$$

Consideriamo ora i sistemi: L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2} ... L_{d_s/m_s} con $m_i \leqslant d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ e inoltre p $(p \geqslant 0)$ *quadriche funzionalmente indipendenti. Scegliamo in ciascun sistema:* $d_1 + 1$, $d_2 + 1, \ldots, d_s + 1$, *quadriche, linearmente indipendenti fra loro. Diremo che il sistema* $L_{d/m}$ $(m \leqslant d)$ *è riducibile in s addendi e in p quadriche funz. ind. e scriveremo:*

$$L_{d_1/m_1} + L_{d_2/m_2} + \cdots + L_{d_s/m_s} + L_{0/1}^{(1)} + L_{0/1}^{(2)} + \ldots + L_{0/1}^{(p)} = L_{d/m}$$

se avremo che:

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_s + s + p - 1$$

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s + p$$

Un sistema $L_{d/m}$ $(m \leqslant d)$ *sarà detto irriducibile se risulta privo di sistemi subordinati essenziali* $L_{g/c}$ *con:*

$$2 \leqslant g \leqslant d - 1 \quad ; \quad 2 \leqslant c \leqslant m - 1 \quad ; \quad c \leqslant g.$$

Esiste il *TEOREMA B:*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema L_d *di quadriche di* S_r *riducibile in* s *addendi irriducibili e in* p $(p \geqslant 0)$ *quadriche funzionalmente indipendenti abbia caratteristica* $r - k \leqslant d$ $(k \geqslant 0)$, è che *per un punto generico* P *di* S_r *passi un sistema* L_{d-s-p} *di quadriche appartenenti agli addendi irriducibili aventi in comune un* S_{k+s+p}.

Sia il sistema $L_{d/r-k}$ $(r - k \leqslant d)$ di S_r riducibile in s addendi irriducibili:

$$L_{d_1/m_1} \quad , \quad L_{d_2/m_2} \; , \ldots , \; L_{d_s/m_s}$$

e in p $(p \geqslant 0)$ quadriche funzionalmente indipendenti:

$$L_{0/1}^{(1)} \quad , \quad L_{0/1}^{(2)} , \ldots , L_{0/1}^{(p)}$$

con:

$$m_i \leqslant d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_s + s + p - 1 \tag{17}$$

$$r - k = m_1 + m_2 + \ldots + m_s + p \tag{18}$$

Poichè gli s addendi sono irriducibili, per un punto P generico di S_r, per il *teorema A* passeranno rispettivamente un:

$$L_{d_1 - 1} \quad , \quad L_{d_2 - 1} , \ldots , L_{d_s - 1}$$

di quadriche aventi in comune rispettivamente un:

$$S_{r - m_1 + 1} \quad , \quad S_{r - m_2 + 1} , \ldots , S_{r - m_s + 1} .$$

Questi spazi in virtù della (17) si tagliano secondo un:

$$S_{r - m_1 - m_2 - \ldots - m_s + s} = S_{k + s + p} .$$

D'altra parte, potendosi scegliere in ciascuno di detti sistemi rispettivamente: d_1 , $d_2, \ldots, d_s$ quadriche tutte linearmente indipendenti fra loro, si trova che complessivamente le quadriche di detti sistemi che passano per P formano per la (17) un sistema:

$$L_{d_1 + d_2 + \ldots + d_s - 1} = L_{d - s - p} ,$$

le cui quadriche hanno in comune l'S_{k+s+p} come volevasi dimostrare.

La condizione è dunque necessaria.

Dimostriamo che è anche sufficiente.

Sia il sistema L_d di S_r riducibile in s addendi irrducibili L_{d_i/m_i} (i = 1, 2, . . . , s) e tale che per un punto P generico di S_r passi un sistema L_{d-s-p} di quadriche appartenenti a detti addendi e aventi in comune un S_{k+s+p}.

Indichiamo con x la caratteristica di L_d. Dovrà essere:

$$d = d_1 + d_2 + \cdots + d_s + s + p - 1$$

$$x = m_1 + m_2 + \ldots + m_s + p \tag{19}$$

Per il *teorema A* per un punto generico P di S_r passeranno rispettivamente un:

$$L_{d_1-1} \quad , \quad L_{d_2-1} , \ldots , L_{d_s-1}$$

di quadriche aventi in comune rispettivamente un:

$$S_{r-m_1+1} \quad , \quad S_{r-m_2+1} , \ldots , S_{r-m_s+1} .$$

Questi spazi in virtù dela (19) si intersecano secondo un:

$$S_{r-m_1-m_2-\ldots-m_s+s} = S_{r-x+s+p} .$$

Ora le: $d_1, d_2, \ldots, d_s$ quadriche tutte linealmente indipendenti fra di loro di detti sistemi individuano un sistema:

$$L_{d_1+d_2+\ldots+d_s-1} = L_{d+s-p}$$

di quadriche aventi in comune l'$S_{r-x+s+p}$, tali quadriche di L_{d-s-p} sono tutte e sole le quadriche passanti per P e appartenenti agli addendi irriductibili. Ma tali quadriche per ipotesi hanno in comune un S_{k+s+p} che dovrà coincidere con l'$S_{r-x+s+p}$. Pertanto sarà: $x = r - k$, come volevasi dimostrare.

Osserviamo che in caso di $p = 0$, la condizione si riduce a far passare per P un sistema L_{d-s} di quadriche aventi in comune un S_{k+s}.

3. Diamo ora alcuni esempi:

1°) - Nell' S_4 un sistema riducibile, non contemplato nell'elenco di Muracchini è il seguente:

$$\lambda_0 x_1 x_2 + \lambda_1 x_1 (x_1 + x_2) + \lambda_2 x_2 (x_1 + x_2) + \lambda_3 x_3 x_4 +$$

$$+ \lambda_4 x_3 (x_3 + x_4) + \lambda_5 x_4 (x_3 + x_4) = 0$$

Si tratta di un $L_{5/4}$ dell' S_4 riducibile in due $L_{2/2}$, cioè: $L_{5/4} = L_{2/2} + L_{2/2}$, entrambi identificati da tre coppie di iperpiani per un S_2 (rispettivamente di equazioni: $x_1 = 0, x_2 = 0$ ed $x_3 = 0, \quad x_4 = 0$).

In questo caso è applicabile il *teorema B.* Si ha: $d = 5$, $s = 2$, $p = 0$, $k = 0$, $r \quad k = 4$; $L_{d-s} = L_{5-2} = L_3$, $S_{k+s} = S_2$.

Le quadriche che passano, ad esempio, per P (0, 1, − 1, 1, −1) formano il sistema $L_{5-1} = L_4$:

$$\lambda_0 (x_1 x_2 - x_3 x_4) + \lambda_1 x_1 (x_1 + x_2) + \lambda_2 x_2 (x_1 + x_2) +$$

$$+ \lambda_4 x_3 (x_3 + x_4) + \lambda_5 x_4 (x_3 + x_4) = 0$$

in cui si vede che le ultime quattro quadriche individuano un sistema L_3 per P avente in comune l' S_2 di equazioni: $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, mentre le quadriche di L_4 hanno in comune non una retta ma la conica degenere:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0 , \quad x_1 + x_2 = 0 , \quad x_3 + x_4 = 0 .$$

2°) - Nell' S_5 sono particolarmente interessanti i sistemi che hanno per basi:

a) la V_2^4 rigata razionale normale avente per direttrici due coniche situate su due piani sghembi, le cui equazioni canoniche sono:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5}$$

base del sistema lineare di quadriche:

$$\lambda_0 (x_0 x_2 - x_1^2) + \lambda_1 (x_0 x_4 - x_1 x_3) + \lambda_2 (x_0 x_5 - x_1 x_4) +$$

$$+ \lambda_3 (x_1 x_4 - x_2 x_3) + \lambda_4 (x_1 x_5 - x_2 x_4) + \lambda_5 (x_3 x_5 - x_4^2) = 0$$

b) La V_2^4 rigata razionale normale avente per direttrici una retta ed una cubica di un S_3 sghembo rispetto alla retta. Le sue equazioni canoniche sono:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5}$$

Il sistema lineare risulta:

$$\lambda_0 (x_0 x_2 - x_1^2) + \lambda_1 (x_0 x_3 - x_1 x_2) + \lambda_2 (x_0 x_5 - x_1 x_4)$$

$$+ \lambda_3 (x_1 x_3 - x_2^2) + \lambda_4 (x_1 x_5 - x_2 x_4) + \lambda_5 (x_2 x_5 - x_3 x_4) = 0$$

Entrambi i sistemi sono degli $L_{5/5}$ e soddisfano al *teorema A*. Per ogni punto dello spazio passa un L_4 di quadriche aventi in comune una retta, che risulta essere la corda della V_2^4 passante per il punto.

3°) Nell' S_7 si ottiene un $L_{9/7}$ avente per base la V_3^5 di equazione canonica:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_6}{x_7}$$

In questo caso per un punto P generico di S_7 passa un sistema L_8 di quadriche aventi in comune una retta, che è corda della varietà base.

4°) Nell' S_8 le 9 quadriche che si deducono dalle equazioni della seguente V_4:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_6}{x_7} \quad ; \quad \frac{x_0}{x_2} = \frac{x_3}{x_5} = \frac{x_6}{x_8} \quad ; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_7}{x_8}$$

formando un L_8. La V_4 è tale che per un punto P di S_8 passamo ∞^1 corde tutte giacenti su un piano. Pertanto il sistema dato dalle 9 quadriche è un $L_{8/7}$ ed è tale che per un punto P di S_8 passa un L_7 di quadriche aventi in comune un piano formato dalle corde della V_4 per P e verifica il *teorema A*.

Le dimostrazioni di questi risultati e di altri analoghi coinvolgenti le varietà di Segre saranno oggetto di un prossimo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BONFERRONI: *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare.*" R. Acc. Sc. Torino vol. 50, 1914-15.

[2] A. TERRACINI: "*Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.*" Atti R. Acc. Sc. Torino. Nota II, 51 (1916) III, 55, (1919-20).

[3] L. MURACCHINI: "*Sulle Varietà* V_5 *i cui spazi tangenti ricoprono una Varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria.*" (Parte II), Riv. Mat. Univ. Parma, 3, 75-89 (1952).

[4] L. DEGOLI: "*Sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica r.*" Acc. Sc. Bologna, Rend. Serie XI, Tomo X, 1963.

[5] L. DEGOLI: *Sulle Varietà* V_6 *i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensiones inferiore all'ordinaria.*" Atti Sem. Mat. e Fis. Università di Modena Vol. XVII - 1967.

[6] L. KRONECKER *Werke I*, Leipzig 1895 pag. 238.

Indirizzo: Prof. LANDO DEGOLI
Via Berengario 82/C
41012 CARPI (Modena) Italy