ÜBER TONNELIERTE RÄUME

von

NORBERT ADASCH UND DIETER KEIM

Die von W. Robertson [7] in die Kategorie der topologischen Vektorräume eingeführten tonnelierten Räume übernehmen dort eine ähnliche wichtige Rolle wie die lokalkonvexen tonnelierten Räume (vgl. Köthe [5], Adasch, Ernst, Keim [2]).

Angeregt durch den Kötheschen Beweis des Satzes von Mahowald und durch zwei Beweise in [1] und [8] geben wir eine neue Beweis methode an, die es gestattet, den Satz von Mahowald und zwei Umkehrungen (Pfister [6], Waelbroeck [8]) des Satzes von Banach-Steinhaus gleichzeitig zu beweisen. Entsprechendes wird für topologische Vektorverbände ausgeführt.

In der Terminologie folgen wir [2].

I.

Eine Folge $\mathfrak{U} = \{U_n\}$ von kreisförmigen, absorbierenden Teilmengen eines topologischen Vektorraumes E (T) nennen wir *Faden,* falls

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \cdot$$

$\mathfrak{U} = \{U_n\}$ heiße *topologischer Faden,* wenn alle U_n Nullumgebungen von E (T) sind. Unter einem *abgeschlossenen Faden* $\mathfrak{U} = \{U_n\}$ wollen wir einen Faden mit abgeschlossenen U_n verstehen. E (T) heißt *tonneliert,* wenn jeder abgeschlossene Faden ein topologischer Faden von E (T) ist.

Im fogenden durchlaufe $\mathfrak{U} = \{U_n^{\mathfrak{U}}\}$ die Menge aller topologischen Fäden von E (T). Weiterhin sei $T = \{T_n\}$ ein fester abgeschlossener Faden von E (T).

Wir betrachten

$$\prod_{\mathfrak{U}} E_{\mathfrak{U}} \qquad \text{mit} \qquad E_{\mathfrak{U}} := E$$

Jeder Faden $\{T_n + U_n^{\mathfrak{U}}\}$ erzeugt auf $E_{\mathfrak{U}}$ eine halbmetrisierbare lineare Topologie. Auf $\prod\limits_{\mathfrak{U}} E_{\mathfrak{U}}$ betrachten wir die zugehörige Produkttopologie $\mathbf{T}_{\Pi}$.

Sei nun

$$F = \{ (x_{\mathfrak{U}}) \in \prod_{\mathfrak{U}} E_{\mathfrak{U}} \;:\; x_{\mathfrak{U}} = \text{const bis auf endlich viele } \mathfrak{U} \}$$

Wir definieren eine weitere halbmetrisierbare lineare Topologie $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}$ auf F, die durch den Faden

$$\Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) \Big) \cap F$$

erzeugt wird. Man überzeugt sich sofort, daß $\mathbf{T}_{\Pi}$ auf F gröber als $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}$ ist. Wegen

$$\overline{\Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_{n+1} + U_{n+1}^{\mathfrak{U}}) \Big) \cap F}^{\mathbf{T}_{\Pi}} \subset \Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) \Big) \cap F$$

folgt sofort

(1) $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}$ hat eine Nullumgebungsbasis aus $\mathbf{T}_{\Pi}$-abgeschlossenen Mengen.

Sei nun

$$N = \bigcap_n \prod_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) \cap F$$

Wir betrachten F/N mit der Quotientenabbildung Q: F $\to$ F/N und den Quotiententopologien $\hat{\mathbf{T}}_{\mathcal{T}}$ und $\hat{\mathbf{T}}_{\Pi}$. Da N auch $\mathbf{T}_{\Pi}$-abgeschlossen ist, sind beide Topologien Hausdorffsch.

Man kann zeigen

$$\overline{Q\Big(\Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_{n+2} + U_{n+2}^{\mathfrak{U}}) \Big) \cap F \Big)}^{\hat{\mathbf{T}}_{\Pi}} \subset Q\Big(\overline{\Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_{n+1} + U_{n+1}^{\mathfrak{U}}) \Big) \cap F}^{\mathbf{T}_{\Pi}} \Big)$$

und mit der oben für (1) benutzten Formel folgt

$$\overline{Q\Big(\Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_{n+2} + U_{n+2}^{\mathfrak{U}}) \Big) \cap F \Big)}^{\hat{\mathbf{T}}_{\Pi}} \subset Q\Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) \cap F \Big)$$

Also gilt

(2) $\hat{\mathbf{T}}_{\mathcal{T}}$ hat eine Nullumgebungsbasis aus $\hat{\mathbf{T}}_{\Pi}$-abgeschlossenen Mengen.

Betrachten wir nun die Abbildingen

$$K_{\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m} : E(T) \to F$$

definiert durch $K_{\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m}(x) = (x_{\mathfrak{U}})$ mit $x_{\mathfrak{U}_1} = \dots = x_{\mathfrak{U}_m} = x$ und sonst $x_{\mathfrak{U}} = 0$. Da

$$K_{\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m}(U_n^{\mathfrak{U}_1} \cap \dots \cap U_n^{\mathfrak{U}_m}) \subset \prod_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) \cap F$$

und die T_n absorbierend sind, gilt

(3) Die $Q \circ K_{\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m}$ bilden eine punktweise beschränkte Menge stetiger linearer Abbildungen von $E(T)$ in $F/N(\hat{T}_T)$.

Sei K die kanonische Abbildung von $E(T)$ in F definiert durch

$$K(x) = (x_{\mathfrak{U}}) \qquad \text{mit} \qquad x_{\mathfrak{U}} = x \qquad \text{für alle } \mathfrak{U}$$

Aus

$$K(x) \quad K_{\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m}(x) \in \left(\prod_{i=1}^{m} T_{n_i} + \mathfrak{U}_{n_i}^{\mathfrak{U}_i} \times \prod_{\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m} E_{\mathfrak{U}} \right) \cap F$$

folgt die punktweise Konvergenz des gerichteten Systems der $K_{\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m}$ gegen K bezüglich der Topologie T_Π. Also gilt auch

(4) Die $Q \circ K_{\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_m}$ konvergieren punktweise gegen $Q \circ K$ in $F/N(\hat{T}_\Pi)$.

Da die Abbildung $Q \circ K: E(T) \to F/N(\hat{T}_\Pi)$ stetig ist und $\hat{T}_T$ nach (2) eine Nullumgebungsbasis aus $\hat{T}_\Pi$-abgeschlossenen Mengen hat, folgt wie in [5], §34.7. (1)

(5) $Q \circ K: E(T) \to \widetilde{F/N(\hat{T}_T)}$ hat einen abgeschlossenen Graphen.

II.

Für topologische Vektorverbände $E(T)$ erweist sich ein abgewandelter Begriff der Tonneliertheit als angemessen: $E(T)$ heiβt *ordnungstonneliert,* wenn jeder normale abgeschlossene Faden $\mathfrak{U}$ in $E(T)$ ein topologischer Faden ist (vgl. [4]). Der Faden $\mathfrak{U} = \{U_n\}$ heiβt dabei *normal,* wenn jedes U_n normal in E ist, also mit $x \in U_n$ auch alle y mit $|y| \leqslant |x|$ in U_n liegen.

Wir wollen kurz die Räume und Abbildungen aus I. in diesem Rahmen betrachten. Dazu durchlaufe $\mathfrak{U}$ jetzt alle normalen topologischen Fäden des topologischen Vektorverbandes E (T). $\mathcal{T} = \{T_n\}$ sei ein normaler abgeschlossener Faden in E (T).

Der Faden $\{T_n + U_n^{\mathfrak{U}}\}$ ist dann normal in $E_{\mathfrak{U}}$, erzeugt also eine Verbandstopologie, ebenso T_Π auf $\prod_{\mathfrak{U}} E_{\mathfrak{U}}$ (versehen mit der komponentenweise erklärten Ordnung). F is ein Unterverband in $\prod_{\mathfrak{U}} E_{\mathfrak{U}}$ und damit F (T_Π) ein topologischer Vektorverband. Dasselbe gilt für F $(T_{\mathcal{T}})$.

Da die Abschließung einer normalen Menge in einem topologischen Vektorverband wieder normal ist, können wir I. (1) verschärfen zu

(1) $T_{\mathcal{T}}$ hat eine Nullumgebungsbasis aus normalen T_Π-abgeschlossenen Mengen.

N ist ein Ideal in F, F/N also ein Vektorverband mit den Verbandstopologien $\hat{T}_\Pi$ und $\hat{T}_{\mathcal{T}}$, und wieder gilt

(2) $\hat{T}_{\mathcal{T}}$ hat eine Nullumgebungsbasis aus normalen $\hat{T}_\Pi$-abgeschlossenen Mengen.

Die in I. Betrachteten Abbildungen $K_{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m}$ und K sind Verbandshomomorphismen, also lautet I. (3) jetzt

(3) Die $Q \circ K_{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m}$ sind punktweise beschränkte stetige Verbandshomomorphismen von E (T) *in* F/N $(\hat{T}_{\mathcal{T}})$.

(4) und *(5)* lauten wie in I. Dabei ist noch anzumerken, daß die Vervollständigung $\widetilde{F/N}\,(\hat{T}_{\mathcal{T}})$ wieder ein topologischer Vektorverband ist.

III.

Aus den Vorbereitungen I und II folgt nun zum einen sofort die schwierigere Richtung von

(1) (Iyahen [3], Waelbroeck [8]) *Ein topologischer Vektorraum* E (T) *ist genau dann tonneliert, wenn jede punktweise beschränkte Menge von stetigen linearen Abbildungen von* E (T) *in einen beliebigen topologischen Vektorraum* F *gleichgradig stetig ist.*

Dazu sei $\mathcal{T} = \{T_n\}$ ein abgeschlossener Faden von E (T). Dann bilden die $Q \circ K_{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m}$ nach I. (3) eine punktweise beschränkte Menge von stetigen linearen Abbildungen von E (T) in F/N $(\hat{T}_{\mathcal{T}})$. Aus ihrer Gleichstetigkeit folgt, daß mit den

$$\bigcap_{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m} (Q \circ K_{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m})^{-1}\, Q\Big(\prod_{\mathfrak{U}} (T_{n+1} + U_{n+1}^{\mathfrak{U}}) \cap F\Big)$$

auch die Obermengen

$$\bigcap_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) = T_n$$

Nullumgebungen von E (T) sind: E (T) ist also tonneliert.

Betrachten wir nun

(2) (Pfister [6]) *Ein topologischer Vektorraum* E (T) *ist genau dann tonneliert, wenn folgendes gilt:*

Jede lineare Abbildung von E (T) *in einen beliebigen topologischen Vektorraum* F (T') *ist stetig, falls sie punktweiser Limes eines gerichteten Systems aus punktweise beschränkten, stetigen linearen Abbildungen von* E (T) *in* F (T') *ist, und zwar punktweiser Limes bezüglich einer gröberen linearen Topologie* T_0 *auf* F, *so daß* T' *eine* T_0*-abgeschlossene Nullumgebungsbasis hat.*

Zum Beweis der Rückrichtung betrachten wir bei gegebenen abgeschlossenen $T = \{T_n\}$ die Abbildungen $Q \circ K$ und $Q \circ K_{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m}$. Aus I. (2), (3) und (4) folgt dann die Stetigkeit von $Q \circ K$: $E(\hat{T}) \to F/N (T_{\mathcal{T}'})$ und aus

$$(Q \circ K)^{-1} \; Q \left(\prod_{\mathfrak{U}} (T_{n+1} + U_{n+1}^{\mathfrak{U}}) \cap F \right) \subset \bigcap_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) = T_n$$

die Tonneliertheit von E (T).

Schließlich erhalten wir aus I. (5) mit

$$(Q \circ K)^{-1} \; \overline{Q\left(\prod_{\mathfrak{U}} (T_{n+3} + U_{n+3}^{\mathfrak{U}}) \cap F \right)}^{\hat{T}_{\mathcal{T}'}} \subset K^{-1} \left(\prod_{\mathfrak{U}} (T_n + U_n^{\mathfrak{U}}) \cap F \right)$$

$$= T_n$$

einen neuen Beweis des Mahowaldschen Satzes

(3) (Iyahen [3]) *Ein topologischer Vektorraum* E (T) *ist genau dann tonneliert, wenn jede graphenabgeschlossene lineare Abbildung von* E (T) *in einen beliebigen vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum stetig ist.*

Im Rahmen der topologischen Vektorverbände erhalten wir den Sätzen (1) bis (3) entsprechende Aussagen, indem wir hier "topologischer Vektorraum, lineare Abbildung, tonneliert" ersetzen durch "topologischer Vektorverband, Verbandshomomorphismus, ordnungstonneliert". Zum (auch hier gleichzeitigen) Beweis sind nur noch die in II. gemachten Bemerkungen zu berücksichtigen.

LITERATUR

[1] N. Adasch, B. Ernst: Lokaltopologische Vektorräume II. Collectanea Math. 26, 13-18 (1975).

[2] N. Adasch, B. Ernst, D. Keim: Topological Vector Spaces. Lecture Notes in Math. 639, Springer 1978.

[3] S.O. Iyahen: On certain classes of linear topological spaces. Proc. London Math. Soc. 18, 285-307 (1968).

[4] D. Keim: Die Ordnungstopologie und ordnungstonnelierte Topologien auf Vektorverbänden. Collectanea Math. 22, 117-140 (1971).

[5] G. Köthe: Topological Vector Spaces I, II. Springer 1961, 1979.

[6] H. Pfister: Über das Gewicht und den Überdeckungstyp von uniformen Räumen und einige Formen des Satzes von Banach-Steinhaus. Manuscripta Math. 20, 51-72 (1977).

[7] W. Robertson: Completions of topological vector spaces. Proc. London Math. Soc. 8, 242-257 (1958).

[8] L. Waelbroeck: Topological Vector Spaces and Algebras. Lecture Notes in Math. 230, Springer 1971.

Norbert Adasch

Fachbereich Mathematik der Universität
Robert Mayer Str. 10
D-6000 Frankfurt am Main

Dieter Keim

Fernuniversität, Fachbereich Mathematik
Postfach 940
D-5800 Hagen