SUCESION EXACTA DE CINCO TERMINOS

por

A. R. GRANDJEAN y L. FRANCO FERNANDEZ

En el año 1976 Furtado-Coelho en "Homology and generalized Baer invariants" [2], considerando una variedad de Ω-grupos y una subvariedad de ésta, obtiene una sucesión exacta de cinco términos, asociada a una sucesión exacta corta de Ω-grupos.

El objeto de este trabajo es obtener una sucesión exacta de cinco términos, introduciendo dos subvariedades U y V de una variedad Λ de Ω-grupos, para cada sucesión exacta corta en la categoría Λ [*Teorema 6*]. Este teorema se utiliza para deducir algunos resultados sobre series centrales en Ω-grupos.

Si se toma como variedad V toda la categoría Λ obtenemos el resultado de Furtado-Coelho [2. p. 602].

El teorema básico, dado por Stammbach [10. Teorema 1.1. p. 64], y algunas de sus aplicaciones, aparecen al tomar como categoría Λ la de grupos y como variedad U la de grupos abelianos de exponente q.

Se utilizará el "Lema de los cinco", válido en una categoría de Burgin, para cuya demostración puede seguirse la línea de [6. p. 62]. Se utiliza la notación de [6].

1. PRELIMINARES.

Sea Λ una variedad de Ω-grupos y U una subvariedad de Λ. Denotaremos también por U al conjunto de sus leyes, así como el funtor variedad. Si $(B \mid A)$ es un par ideal de Λ (B ideal de A) definimos $U_1 (B \mid A)$ como el ideal de A generado por el conjunto $U^+ (B \mid A) = \{u(b+a) - u(a) \mid b \in B, a \in A, u(x) \in U\}$.

Se define la U-serie central inferior de un Ω-grupo A de Λ de la siguiente forma: $U^0(A) = A$, $U^1(A) = U(A)$, $U^{n+1}(A) = U_1(U^n(A) \mid A)$ $n \geqslant 1$. Un Ω-grupo $A \in \Lambda$ se dice U-nilpotente si existe un n tal que $U^n(A) = 0$ [3. p. 16 y 17].

Denotaremos por $U^\infty(A)$ el término $\bigcap_{n=1}^{\infty} U^n(A)$.

Lema 1. Para un Ω-grupo A son equivalentes:

i) $x \neq 0 \Rightarrow$ existe I, ideal de A, tal que $x \notin I$ y A/I es U-nilpotente.
ii) $U^{\infty}(A) = 0$.

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii). Sea $0 \neq x \in A$. Entonces existe I, ideal de A, con $x \notin I$ y A/I U-nilpotente, por lo que existe un n tal que $U^n(A) \subset I$. En consecuencia $x \notin U^n(A)$.

ii) $\Rightarrow$ i). Sea $U^{\infty}(A) = 0$. Dado $0 \neq x \in A$ existe un entero n tal que $x \notin U^n(A)$. Además $A/U^n(A)$ es U-nilpotente.

Diremos que un Ω-grupo A es residualmente U-nilpotente si verifica las condiciones del *lema 1.*

Proposición 2. Para un objeto A de Λ el término:

$$\Delta U(A) = \frac{R \cap U(F)}{U_1(R \mid F)}$$

es independiente de la presentación proyectiva $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$. Además ΔU es un funtor [2. p. 599].

Proposición 3. Una sucesión exacta corta de Ω-grupos $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$, en Λ, induce una sucesión exacta y natural:

$$\Delta U(B) \longrightarrow \Delta U(C) \longrightarrow \frac{A}{U_1(A \mid B)} \longrightarrow \frac{B}{U(B)} \longrightarrow \frac{C}{U(C)} \longrightarrow 0$$

[2. p. 599].

2. (V, U) – Sucesión exacta de cinco términos.

Sea Λ una variedad de Ω-grupos y U y V subvariedades de Λ. Utilizando el funtor ΔU de la *proposición 2,* definimos, para un Ω-grupo $A \in V$:

$$\Delta(V, U)(A) = \mathrm{Coker}\,[\Delta U(F) \xrightarrow{f_*} \Delta U(A)],$$

siendo $F \overset{f}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación V-libre [7. p. 18] de A.

Proposición 4. La definición de $\Delta(V, U)(A)$ no depende de la presentación V-libre de A. Además $\Delta(V, U) : V \longrightarrow A$ es un funtor.

Demostración: Sean $F \overset{f}{\twoheadrightarrow} A$ y $F' \overset{f'}{\twoheadrightarrow} A$ dos presentaciones V-libres de A. Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, shift left, "h"] \arrow[dr, "f"', "\shortparallel" marking] & & F' \arrow[ll, shift left, "h'"] \arrow[dl, "f'", "\shortparallel" marking] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

y, utilizando la funtorialidad de ΔU *(proposición 2),* también es conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Delta U(F) \arrow[rr, shift left, "h_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & \Delta U(F') \arrow[ll, shift left, "h'_*"] \arrow[dl, "f'_*"] \\
& \Delta U(A) &
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_*^c = (f'_* h_*)^c \geqslant f'^c_*$. Análogamente $f'^c_* \geqslant f^c_*$. En consecuencia $\Delta(V, U)(A)$ es independiente de la presentación V-libre de A.

Sea $g: A \longrightarrow A'$ un morfismo en V y $F \overset{f}{\twoheadrightarrow} A$, $F' \overset{f'}{\twoheadrightarrow} A'$ presentaciones V-libres de A y A'. Entonces se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f", "\shortparallel" marking] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "g"] \\
F' \arrow[r, "f'"', "\shortparallel" marking] & A'
\end{tikzcd}$$

del cual se deduce:

$$\begin{tikzcd}
\Delta U(F) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h_*"'] & \Delta U(A) \arrow[r, "f_*^c", "\shortparallel" marking] \arrow[d, "g_*"] & \Delta(V, U)(A) \arrow[d, "\Delta(V, U)(g)"] \\
\Delta U(F') \arrow[r, "f'_*"'] & \Delta U(A') \arrow[r, "f'^c_*"', "\shortparallel" marking] & \Delta(V, U)(A')
\end{tikzcd}$$

y, por tanto, la funtorialidad de $\Delta(V,U)$.

Proposición 5.

i) Si $V = \Lambda$ entonces $\Delta(V, U) = \Delta U$.

ii) Si F es V-libre, entonces $\Delta(V, U)(F) = 0$.

Demostración:

i) Sea $F \xrightarrow{f} A$ una presentación V-libre de A. Por la hipótesis F es Λ-libre, y así, teniendo en cuenta la *proposición 2*, $\Delta U(F) = 0$. Por tanto $\Delta(V, U)(A) = \Delta U(A)$.

ii) Se considera la presentación V-libre de F: $F \xrightarrow{1} F$. Se sigue que $\Delta(V, U)(F) = 0$.

Teorema 6. Si $A \overset{u}{\rightarrowtail} B \overset{v}{\twoheadrightarrow} C$ es una sucesión exacta corta en V, entonces se tiene una sucesión exacta y natural:

$$\Delta(V, U)(B) \longrightarrow \Delta(V, U)(C) \longrightarrow \frac{A}{U_1(A \mid B)} \longrightarrow \frac{B}{U(B)} \longrightarrow \frac{C}{U(C)} \longrightarrow 0$$

Demostración: Sea $f\colon F \twoheadrightarrow B$ una presentación V-libre de B. Entonces vf es una presentación V-libre de C. Utilizando la *proposición 3* se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Delta U(F) \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_*"'] & \Delta U(F) \arrow[d, "(vf)_*"] & & & & \\
\Delta U(B) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "f_*^c"'] & \Delta U(C) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(vf)_*^c"'] & \frac{A}{U_1(A|B)} \arrow[r] & \frac{B}{U(B)} \arrow[r] & \frac{C}{U(C)} \arrow[r] & 0 \\
\Delta(V,U)(B) \arrow[r, "\Delta(V,U)(v)"'] & \Delta(V,U)(C) \arrow[ur, "{[\Delta(V,U)(v)]^c}"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado inferior es cocatesiano y, por tanto, los conúcleos de v_* y $\Delta(V, U)(v)$ tienen el mismo rango [6. p. 28 y 32]. Se deduce así la exactitud de la sucesión.

La *proposición 3* aparece como caso particular de este *teorema*, haciendo $V = \Lambda$ y utilizando la *proposición 5 i.*

Teorema 7. Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo en V. Si f induce un isomorfismo $A/U(A) \longrightarrow B/U(B)$ y un homomorfismo sobre $\Delta(V,U)(A) \twoheadrightarrow \Delta(V,U)(B)$, entonces f induce isomorfismos:

$$\frac{A}{U^i(A)} \xrightarrow{f_U^i} \frac{B}{U^i(B)} \quad (i \geqslant 0),$$

y un monomorfismo: $\dfrac{A}{U^\infty(A)} \xrightarrow{f_U^\infty} \dfrac{B}{U^\infty(B)}$.

Demostración: Para $i = 0$ trivial. Procedamos por inducción. Si $i = 1$, el resultado se verifica por hipótesis. Supongamos $i > 1$ y el teorema válido para $i - 1$. Aplicando el *teorema 6* a las sucesiones exactas cortas:

$$U^{i-1}(A) \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/U^{i-1}(A) \quad \text{y}$$

$$U^{i-1}(B) \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/U^{i-1}(B)$$

se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\Delta(V,U)(A) & \to & \Delta(V,U)\left(\dfrac{A}{U^{i-1}(A)}\right) & \to & \dfrac{U^{i-1}(A)}{U^i(A)} & \to & \dfrac{A}{U(A)} & \to & \dfrac{A/U^{i-1}(A)}{U(A/U^{i-1}(A))} & \to & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_3} & & \downarrow{\scriptstyle g_4} & & \downarrow{\scriptstyle g_5} & & \\
\Delta(V,U)(B) & \to & \Delta(V,U)\left(\dfrac{B}{U^{i-1}(B)}\right) & \to & \dfrac{U^{i-1}(B)}{U^i(B)} & \to & \dfrac{B}{U(B)} & \to & \dfrac{B/U^{i-1}(B)}{U(B/U^{i-1}(B))} & \to & 0
\end{array}$$

Por hipótesis g_1 es homomorfismo sobre y g_4 es isomorfismo. Además g_2 y g_5 son isomorfismos por la hipótesis de inducción, y, utilizando el "Lema de los cinco" se deduce que g_3 es un isomorfismo.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{U^{i-1}(A)}{U^i(A)} \arrow[r, tail] \arrow[d, "g_3"'] & \dfrac{A}{U^i(A)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_U^i"'] & \dfrac{A}{U^{i-1}(A)} \arrow[d, "f_U^{i-1}"'] \\
\dfrac{U^{i-1}(B)}{U^i(B)} \arrow[r, tail] & \dfrac{B}{U^i(B)} \arrow[r, two heads] & \dfrac{B}{U^{i-1}(B)}
\end{tikzcd}$$

Puesto que g_3 y f_U^{i-1} son isomorfismos, se tiene que f_U^i es un isomorfismo.

Para probar que f_U^∞ es un monomorfismo consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{A}{U^\infty(A)} \arrow[r, "f_U^\infty"] \arrow[d, two heads] & \dfrac{B}{U^\infty(B)} \arrow[d, two heads] \\
\dfrac{A}{U^i(A)} \arrow[r, "f_U^i"'] & \dfrac{B}{U^i(B)}
\end{tikzcd}$$

Sea $x + U^\infty(A) \in \operatorname{Ker} f_U^\infty$. Entonces $f_U^i\,(x + U^i(A)) = 0$ $(i \geq 0)$, y por tanto $x \in U^i(A)$ $(i \geq 0)$. Así $x \in U^\infty(A)$.

Si A es la categoría de grupos y U la variedad de grupos abelianos de exponente q, entonces el funtor $\Delta(V, U)$ coincide con el V^q, introducido por Stammbach [10. p. 42]. En efecto, sea A un grupo en la variedad V, $F \overset{f}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación V-libre de A y $F' \overset{f'}{\twoheadrightarrow} F$ una presentación libre de F. Sea R el núcleo de $F' \overset{ff'}{\twoheadrightarrow} A$. Teniendo en cuenta que si $U(F') = F' \ast_q F'$, entonces $U_1(R \mid F') = R \ast_q F'$ [2. p. 607] y que $H_2(A, Z_q) = (R \cap F' \ast_q F')/(F' \ast_q R)$ [10. p. 17] se obtiene que $\Delta U(A) = H_2(A, Z_q)$. Por tanto $V^q(A) = \Delta(V,U)(A)$.

En consecuencia la sucesión exacta de cinco términos de Stammbach [10. p. 42] y el teorema básico [10. p. 64] aparecen como corolarios de los *teoremas* 6 y 7 respectivamente.

Cololario 8. Sean A y B Ω-grupos U-nilpotentes de la variedad V. Si $f\colon A \longrightarrow B$ induce un isomorfismo $A/U(A) \longrightarrow B/U(B)$ y un homomorfismo sobre $\Delta(V, U)(A) \twoheadrightarrow \Delta(V, U)(B)$, entonces f es isomorfismo.

Demostración: Al ser A y B U-nilpotentes existe un entero n tal que $U^n(A) = U^n(B) = 0$. Basta aplicar el *teorema* 7 para obtener el resultado.

3. Aplicaciones.

Proposición 9. Sea $A \in V$ y $\Delta(V, U)(A) = 0$. Si $A/U(A)$ es $(V \cap U)$-libre, entonces existe un homomorfismo $f\colon F \longrightarrow A$ con F V-libre, que indice isomorfismos:

$$\frac{F}{U^i(F)} \xrightarrow{f_U^i} \frac{A}{U^i(A)} \quad (i \geqslant 0)$$

y un monomorfismo: $$\frac{F}{U^\infty(F)} \overset{f_U^\infty}{\rightarrowtail} \frac{A}{U^\infty(A)}.$$

Demostración: Sea S un conjunto sobre el cual $A/U(A)$ es $(V \cap U)$-libre, y sea F el Ω-grupo V-libre sobre S. Puesto que $F/(V \cap U)(F)$ es $(V \cap U)$-libre sobre S [7. p.18], por la unicidad de los objetos libres, se verifica $F/(V \cap U)(F) \simeq A/U(A)$, y al pertenecer F a la variedad V se tiene $F/U(F) \cong A/U(A)$.

Ya que F es V-proyectivo y $A \in V$, existe $f\colon F \longrightarrow A$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, two heads] \\
A \arrow[r, two heads] & A/U(A) \cong F/U(F)
\end{tikzcd}$$

Puesto que $\Delta(V, U)(A) = 0$, se verifican ya todas las hipótesis del *teorema 7*, del que se sigue la *proposición*.

Diremos que la variedad V verifica al propiedad (P_U) si todo objeto V-libre es residualmente U-nilpotente.

Teorema 10. Sea V una variedad verificando la propiedad (P_U) y $A \in V$ con $\Delta(V, U)(A) = 0$. Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia de A, cuya imagen $(\bar{x}_i)_{i \in I}$ en $A/U(A)$ se puede completar a un conjunto sobre el que $A/U(A)$ es $(V \cap U)$-libre, entonces $(x_i)_{i \in I}$ genera en A un Ω-subgrupo V-libre.

Demostración: Sea $(\bar{x}_j)_{j \in J}$ (extensión de la familia $(\bar{x}_i)_{i \in I}$) el conjunto sobre el que $A/U(A)$ es $(V \cap U)$-libre, y F el Ω-grupo V-libre sobre $(\bar{x}_j)_{j \in J}$. Razonando como en la *proposición 9*, existe f: $F \longrightarrow A$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, two heads] \\ A \arrow[r, two heads] & A/U(A) \cong F/U(F) \end{tikzcd}$$

Así, aplicando el *teorema 7*, tenemos un monomorfismo $F/U^{\infty}(F) \rightarrowtail A/U^{\infty}(A)$. Por otra parte F es residualmente U-nilpotente y el *lema 1* nos da $U^{\infty}(F) = 0$, y así el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, two heads] \\ F/U^{\infty}(F) \arrow[r, tail] & A/U^{\infty}(A) \end{tikzcd}$$

del que se deduce que f: $F \longrightarrow A$ es un monomorfismo.

Sea F' el Ω-grupo V-libre sobre $(x_i)_{i \in I}$. Ya que $(\overline{x}_i)_{i \in I}$ es un subconjunto de $(\overline{x}_j)_{j \in J}$, se tiene que F' es un Ω-subgrupo de F y, por tanto de A.

Si este *teorema* se aplica tomando como categoría Λ la de grupos y como variedad U la de grupos abelianos, se obtiene el Teorema 2.2. de Stammbach [10. p. 68].

BIBLIOGRAFIA

1. FRANCO FERNANDEZ, L. Formaciones de Fitting en una categoría de Burgin. Alxebra 18. Universidad de Santiago. (1976).

2. FURTADO-COELHO, J. Homology and Generalized Baer Invariants. J. of Algebra 40, 596-609. (1976).

3. FURTADO-COELHO, J. V-center and some related concepts. Facultade de Ciências de Lisboa. Pendiente de publicación.

4. HILTON-STAMMBACH. A course in homological algebra. Springer-Verlag. (1971).

5. KUROSH, A.G. Lectures on General Algebra. Chelsea Publishing Company. (1963).

6. R-GRANDJEAN, A. Homología en categorías exactas. Alxebra 4. Universidad de Santiago. (1970).

7. RODRIGUEZ FERNANDEZ, C. Teoría general de variedades. Alxebra 21. Universidad de Santiago (1978).

8. STALLINGS, J. Homology and central series of groups. J. of Algebra 2, 170-181. (1965).

9. STAMMBACH, U. Homological methods in group varieties. Comment. Math. Helv. 45, 287-298. (1970).

10. STAMMBACH, U. Homology in Group Theory. Lecture Notes in Mathematics 359. (1973).