

SUCESION EXACTA DE CINCO TERMINOS

por

A. R. GRANDJEAN y L. FRANCO FERNANDEZ

En el año 1976 Furtado-Coelho en "Homology and generalized Baer invariants" [2], considerando una variedad de Ω -grupos y una subvariedad de ésta, obtiene una sucesión exacta de cinco términos, asociada a una sucesión exacta corta de Ω -grupos.

El objeto de este trabajo es obtener una sucesión exacta de cinco términos, introduciendo dos subvariedades U y V de una variedad Λ de Ω -grupos, para cada sucesión exacta corta en la categoría Λ [Teorema 6]. Este teorema se utiliza para deducir algunos resultados sobre series centrales en Ω -grupos.

Si se toma como variedad V toda la categoría Λ obtenemos el resultado de Furtado-Coelho [2. p. 602].

El teorema básico, dado por Stambach [10. Teorema 1.1. p. 64], y algunas de sus aplicaciones, aparecen al tomar como categoría Λ la de grupos y como variedad U la de grupos abelianos de exponente q .

Se utilizará el "Lema de los cinco", válido en una categoría de Burgin, para cuya demostración puede seguirse la línea de [6. p. 62]. Se utiliza la notación de [6].

1. PRELIMINARES.

Sea Λ una variedad de Ω -grupos y U una subvariedad de Λ . Denotaremos también por U al conjunto de sus leyes, así como al funtor variedad. Si $(B | A)$ es un par ideal de Λ (B ideal de A) definimos $U_1(B | A)$ como el ideal de A generado por el conjunto $U^+(B | A) = \{u(b + a) - u(a) \mid b \in B, a \in A, u(x) \in U\}$.

Se define la U -serie central inferior de un Ω -grupo A de Λ de la siguiente forma: $U^0(A) = A$, $U^1(A) = U(A)$, $U^{n+1}(A) = U_1(U^n(A) | A)$ $n \geq 1$. Un Ω -grupo $A \in \Lambda$ se dice U -nilpotente si existe un n tal que $U^n(A) = 0$ [3. p. 16 y 17].

Denotaremos por $U^\infty(A)$ el término $\bigcap_{n=1}^{\infty} U^n(A)$.

Lema 1. Para un Ω -grupo A son equivalentes:

- i) $x \neq 0 \Rightarrow$ existe I , ideal de A , tal que $x \notin I$ y A/I es U-nilpotente.
- ii) $U^\infty(A) = 0$.

Demostración:

i) \Rightarrow ii). Sea $0 \neq x \in A$. Entonces existe I , ideal de A , con $x \notin I$ y A/I U-nilpotente, por lo que existe un n tal que $U^n(A) \subset I$. En consecuencia $x \notin U^n(A)$.

ii) \Rightarrow i). Sea $U^\infty(A) = 0$. Dado $0 \neq x \in A$ existe un entero n tal que $x \notin U^n(A)$. Además $A/U^n(A)$ es U-nilpotente.

Diremos que un Ω -grupo A es residualmente U-nilpotente si verifica las condiciones del *lema 1*.

Proposición 2. Para un objeto A de Λ el término:

$$\Delta U(A) = \frac{R \cap U(F)}{U_1(R | F)}$$

es independiente de la presentación proyectiva $R \twoheadrightarrow F \twoheadrightarrow A$. Además ΔU es un funtor [2. p. 599].

Proposición 3. Una sucesión exacta corta de Ω -grupos $A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow C$, en Λ , induce una sucesión exacta y natural:

$$\Delta U(B) \longrightarrow \Delta U(C) \longrightarrow \frac{A}{U_1(A | B)} \longrightarrow \frac{B}{U(B)} \longrightarrow \frac{C}{U(C)} \longrightarrow 0$$

[2. p. 599].

2. (V, U) – SUCESIÓN EXACTA DE CINCO TÉRMINOS.

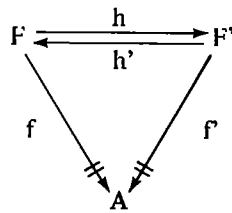
Sea Λ una variedad de Ω -grupos y U y V subvariedades de Λ . Utilizando el funtor ΔU de la *proposición 2*, definimos, para un Ω -grupo $A \in V$:

$$\Delta(V, U)(A) = \text{Coker} [\Delta U(F) \xrightarrow{f_*} \Delta U(A)],$$

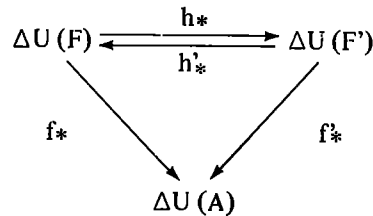
siendo $F \xrightarrow{f} A$ una presentación V -libre [7. p. 18] de A .

Proposición 4. La definición de $\Delta(V, U)(A)$ no depende de la presentación V -libre de A . Además $\Delta(V, U) : V \rightarrow \Lambda$ es un funtor.

Demostración: Sean $F \xrightarrow{f} A$ y $F' \xrightarrow{f'} A$ dos presentaciones V -libres de A . Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

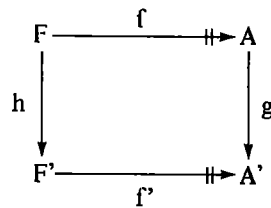


y, utilizando la funtorialidad de ΔU (proposición 2), también es conmutativo el siguiente diagrama:

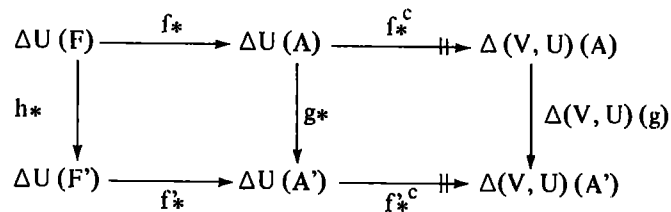


Entonces $f_*^c = (f'_* h'_*)^c \geq f_*^c$. Análogamente $f'_*^c \geq f_*^c$. En consecuencia $\Delta(V, U)(A)$ es independiente de la presentación V -libre de A .

Sea $g: A \rightarrow A'$ un morfismo en V y $F \xrightarrow{f} A$, $F' \xrightarrow{f'} A'$ presentaciones V -libres de A y A' . Entonces se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:



del cual se deduce:



y, por tanto, la funtorialidad de $\Delta(V, U)$.

Proposición 5.

- i) Si $V = \Lambda$ entonces $\Delta(V, U) = \Delta U$.
- ii) Si F es V -libre, entonces $\Delta(V, U)(F) = 0$.

Demostración:

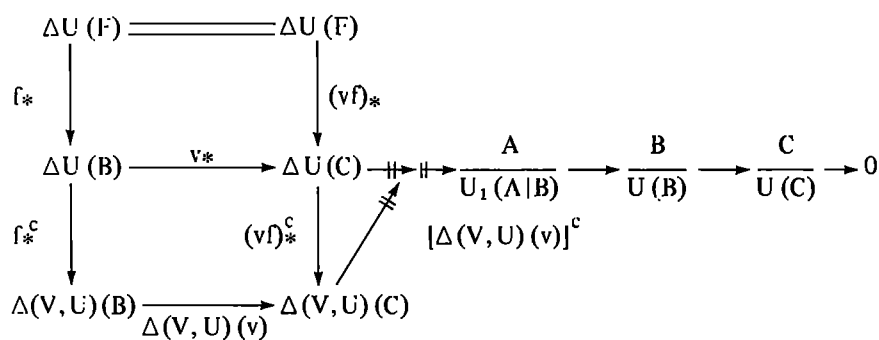
i) Sea $F \xrightarrow{f} A$ una presentación V -libre de A . Por la hipótesis F es Λ -libre, y así, teniendo en cuenta la *proposición 2*, $\Delta U(F) = 0$. Por tanto $\Delta(V, U)(A) = \Delta U(A)$.

ii) Se considera la presentación V -libre de F : $F \xrightarrow{1} F$. Se sigue que $\Delta(V, U)(F) = 0$.

Teorema 6. Si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ es una sucesión exacta corta en V , entonces se tiene una sucesión exacta y natural:

$$\Delta(V, U)(B) \rightarrow \Delta(V, U)(C) \rightarrow \frac{A}{U_1(A|B)} \rightarrow \frac{B}{U(B)} \rightarrow \frac{C}{U(C)} \rightarrow 0$$

Demostración: Sea $f: F \twoheadrightarrow B$ una presentación V -libre de B . Entonces vf es una presentación V -libre de C . Utilizando la *proposición 3* se tiene el siguiente diagrama conmutativo:



donde el cuadrado inferior es cocatesiano y, por tanto, los conúcleos de v_* y $\Delta(V, U)(v)$ tienen el mismo rango [6. p. 28 y 32]. Se deduce así la exactitud de la sucesión.

La *proposición 3* aparece como caso particular de este *teorema*, haciendo $V = \Lambda$ y utilizando la *proposición 5 i*.

Teorema 7. Sea $f: A \rightarrow B$ un homomorfismo en V . Si f induce un isomorfismo $\Lambda/U(A) \rightarrow B/U(B)$ y un homomorfismo sobre $\Delta(V, U)(A) \rightarrow \Delta(V, U)(B)$, entonces f induce isomorfismos:

$$\frac{A}{U^i(\Lambda)} \xrightarrow{f_U^i} \frac{B}{U^i(B)} \quad (i \geq 0),$$

y un monomorfismo: $\frac{A}{U^\infty(A)} \xrightarrow{f_U^\infty} \frac{B}{U^\infty(B)}$.

Demostración: Para $i = 0$ trivial. Procedamos por inducción. Si $i = 1$, el resultado se verifica por hipótesis. Supongamos $i > 1$ y el teorema válido para $i - 1$. Aplicando el *teorema 6* a las sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccc} U^{i-1}(A) \twoheadrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A/U^{i-1}(A) & \text{y} \\ U^{i-1}(B) \twoheadrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B/U^{i-1}(B) & \end{array}$$

se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} \Delta(V, U)(A) \rightarrow \Delta(V, U)\left(\frac{A}{U^{i-1}(A)}\right) \rightarrow \frac{U^{i-1}(A)}{U^i(A)} \rightarrow \frac{A}{U(A)} \rightarrow \frac{A/U^{i-1}(A)}{U(A/U^{i-1}(A))} \rightarrow 0 \\ \downarrow g_1 \qquad \qquad \downarrow g_2 \qquad \qquad \downarrow g_3 \qquad \qquad \downarrow g_4 \qquad \qquad \downarrow g_5 \\ \Delta(V, U)(B) \rightarrow \Delta(V, U)\left(\frac{B}{U^{i-1}(B)}\right) \rightarrow \frac{U^{i-1}(B)}{U^i(B)} \rightarrow \frac{B}{U(B)} \rightarrow \frac{B/U^{i-1}(B)}{U(B/U^{i-1}(B))} \rightarrow 0 \end{array}$$

Por hipótesis g_1 es homomorfismo sobre y g_4 es isomorfismo. Además g_2 y g_5 son isomorfismos por la hipótesis de inducción, y, utilizando el "Lema de los cinco" se deduce que g_3 es un isomorfismo.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{U^{i-1}(A)}{U^i(A)} & \xrightarrow{\cong} & \frac{A}{U^i(A)} & \xrightarrow{\cong} & \frac{A}{U^{i-1}(A)} \\
 \downarrow g_3 & & \downarrow f_U^i & & \downarrow f_U^{i-1} \\
 \frac{U^{i-1}(B)}{U^i(B)} & \xrightarrow{\cong} & \frac{B}{U^i(B)} & \xrightarrow{\cong} & \frac{B}{U^{i-1}(B)}
 \end{array}$$

Puesto que g_3 y f_U^{i-1} son isomorfismos, se tiene que f_U^i es un isomorfismo.

Para probar que f_U^∞ es un monomorfismo consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{A}{U^\infty(A)} & \xrightarrow{f_U^\infty} & \frac{B}{U^\infty(B)} \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \frac{A}{U^i(A)} & \xrightarrow{f_U^i} & \frac{B}{U^i(B)}
 \end{array}$$

Sea $x + U^\infty(A) \in \text{Ker} f_U^\infty$. Entonces $f_U^i(x + U^i(A)) = 0$ ($i \geq 0$), y por tanto $x \in U^i(A)$ ($i \geq 0$). Así $x \in U^\infty(A)$.

Si Λ es la categoría de grupos y U la variedad de grupos abelianos de exponente q , entonces el funtor $\Delta(V, U)$ coincide con el V^q , introducido por Stambach [10. p. 42]. En efecto, sea A un grupo en la variedad V , $F \xrightarrow{f} A$ una presentación V -libre de A y $F' \xrightarrow{f'} A$ una presentación libre de A . Sea R el núcleo de $F' \xrightarrow{f'} A$. Teniendo en cuenta que si $U(F') = F' \otimes_q F'$, entonces $U_1(R \mid F') = R \otimes_q F'$ [2. p. 607] y que $H_2(A, Z_q) = (R \cap F' \otimes_q F') / (F' \otimes_q R)$ [10. p. 17] se obtiene que $\Delta U(A) = H_2(A, Z_q)$. Por tanto $V^q(A) = \Delta(V, U)(A)$.

En consecuencia la sucesión exacta de cinco términos de Stambach [10. p. 42] y el teorema básico [10. p. 64] aparecen como corolarios de los *teoremas 6 y 7* respectivamente.

Cololario 8. Sean A y B Ω -grupos U -nilpotentes de la variedad V . Si $f: A \rightarrow B$ induce un isomorfismo $A/U(A) \rightarrow B/U(B)$ y un homomorfismo sobre $\Delta(V, U)(A) \rightarrow \Delta(V, U)(B)$, entonces f es isomorfismo.

Demostración: Al ser A y B U -nilpotentes existe un entero n tal que $U^n(A) = U^n(B) = 0$. Basta aplicar el *teorema 7* para obtener el resultado.

3. APLICACIONES.

Proposición 9. Sea $A \in V$ y $\Delta(V, U)(A) = 0$. Si $A/U(A)$ es $(V \cap U)$ -libre, entonces existe un homomorfismo $f: F \rightarrow A$ con F V -libre, que indice isomorfismos:

$$\frac{F}{U^i(F)} \xrightarrow{f_U^i} \frac{A}{U^i(A)} \quad (i \geq 0)$$

y un monomorfismo:
$$\frac{F}{U^\infty(F)} \xrightarrow{f_U^\infty} \frac{A}{U^\infty(A)}.$$

Demostración: Sea S un conjunto sobre el cual $A/U(A)$ es $(V \cap U)$ -libre, y sea F el Ω -grupo V -libre sobre S . Puesto que $F/(V \cap U)(F)$ es $(V \cap U)$ -libre sobre S [7. p. 18], por la unicidad de los objetos libres, se verifica $F/(V \cap U)(F) \cong A/U(A)$, y al pertenecer F a la variedad V se tiene $F/U(F) \cong A/U(A)$.

Ya que F es V -proyectivo y $A \in V$, existe $f: F \rightarrow A$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \searrow f & \downarrow \cong \\ A & \xrightarrow{\cong} & A/U(A) \cong F/U(F) \end{array}$$

Puesto que $\Delta(V, U)(A) = 0$, se verifican ya todas las hipótesis del *teorema 7*, del que se sigue la *proposición*.

Diremos que la variedad V verifica al propiedad (P_U) si todo objeto V -libre es residualmente U -nilpotente.

Teorema 10. Sea V una variedad verificando la propiedad (P_U) y $A \in V$ con $\Delta(V, U)(A) = 0$. Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia de A , cuya imagen $(\bar{x}_i)_{i \in I}$ en $A/U(A)$ se puede completar a un conjunto sobre el que $A/U(A)$ es $(V \cap U)$ -libre, entonces $(x_i)_{i \in I}$ genera en A un Ω -subgrupo V -libre.

Demostración: Sea $(\bar{x}_j)_{j \in J}$ (extensión de la familia $(\bar{x}_i)_{i \in I}$) el conjunto sobre el que $A/U(A)$ es $(V \cap U)$ -libre, y F el Ω -grupo V -libre sobre $(\bar{x}_j)_{j \in J}$. Razonando

como en la *proposición 9*, existe $f: F \longrightarrow A$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \swarrow f & \downarrow \cong \\ A & \xrightarrow{\cong} & A/U(A) \cong F/U(F) \end{array}$$

Así, aplicando el *teorema 7*, tenemos un monomorfismo $F/U^\infty(F) \longrightarrow A/U^\infty(A)$. Por otra parte F es residualmente U -nilpotente y el *lema 1* nos da $U^\infty(F) = 0$, y así el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & A \\ \parallel & & \downarrow \cong \\ F/U^\infty(F) & \xrightarrow{\quad} & A/U^\infty(A) \end{array}$$

del que se deduce que $f: F \longrightarrow A$ es un monomorfismo.

Sea F' el Ω -grupo V -libre sobre $(x_i)_{i \in I}$. Ya que $(\bar{x}_i)_{i \in I}$ es un subconjunto de $(\bar{x}_j)_{j \in J}$, se tiene que F' es un Ω -subgrupo de F y, por tanto de A .

Si este *teorema* se aplica tomando como categoría Λ la de grupos y como variedad U la de grupos abelianos, se obtiene el Teorema 2.2. de Stambach [10. p. 68].

BIBLIOGRAFIA

1. FRANCO FERNANDEZ, L. Formaciones de Fitting en una categoría de Burgin. *Algebra* 18. Universidad de Santiago. (1976).
2. FURTADO-COELHO, J. Homology and Generalized Baer Invariants. *J. of Algebra* 40, 596-609. (1976).
3. FURTADO-COELHO, J. V-center and some related concepts. Faculdade de Ciências de Lisboa. Pendiente de publicación.
4. HILTON-STAMMBACH. A course in homological algebra. Springer-Verlag. (1971).
5. KUROSH, A.G. Lectures on General Algebra. Chelsea Publishing Company. (1963).
6. R-GRANDJEAN, A. Homología en categorías exactas. *Algebra* 4. Universidad de Santiago. (1970).
7. RODRIGUIZ FERNANDEZ, C. Teoría general de variedades. *Algebra* 21. Universidad de Santiago (1978).
8. STALLINGS, J. Homology and central series of groups. *J. of Algebra* 2, 170-181. (1965).
9. STAMMBACH, U. Homological methods in group varieties. *Comment. Math. Helv.* 45, 287-298. (1970).
10. STAMMBACH, U. Homology in Group Theory. *Lecture Notes in Mathematics* 359. (1973).

