REPRESENTACIONES DE LOS ESPACIOS $O_M(E)$ Y $\mathcal{D}_{L^p}(E)$

por

JOSÉ BONET*

Summary: Let E be a separated locally convex topological vector space. In this paper we give representations of spaces of differentiable functions defined in R^m with values in E, using spaces of vector valued sequences.

Si M es un subconjunto de un espacio topológico denotaremos por $\overset{\circ}{M}$ y $\bar{M}$ su interior y su clausura respectivamente. Los espacios vectoriales que usaremos están definidos sobre el cuerpo C de los números complejos. Usaremos la palabra espacio en lugar de espacio localmente convexo separado. Si los espacios E y F son topológicamente isomorfos escribiremos $E \sim F$. Si E es un espacio denotamos por E' su dual topológico y por $\hat{E}$ su completación. Denotamos por N el conjunto de los enteros positivos y por N_* el conjunto de los enteros no negativos.

Si E es un espacio y I es un conjunto de cardinal α, E^I y $E^{(I)}$ denotan respectivamente el producto y la suma directa de α copias del espacio E. Dado un subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado B de E, E_B es la envoltura lineal de B dotada con la topología normada cuya bola unidad cerrada es B. Un espacio E se llama localmente completo si E_B es un espacio de Banach para cada subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado B de E.

En lo que sigue usaremos las notaciones de L. Schwartz (Ver (7) y (8)) y los espacios $\mathcal{E}^k(\Omega, E)$, $\mathcal{E}(\Omega, E)$, $\mathcal{D}^k(Q, E)$ y $\mathcal{D}(Q, E)$, donde Ω es un subconjunto abierto del espacio euclídeo de dimensión m R^m, Q es un compacto de R^m, E es un espacio y k es un entero no negativo.

Seguiremos las notaciones de (3) para los espacios de Banach clásicos de sucesiones. Si E es un espacio usaremos los espacios de sucesiones vectoriales $c_0(E)$, $l^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, m (E), s (E) y s' (E), donde s es el espacio de Frechet de las sucesiones de números complejos de decrecimiento rápido, y s' su dual topológico dotado con las seminormas

* Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

$$p((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |\alpha_n|,$$

para cada elemento (β_n) de s tal que $\beta_n \geqslant 0$ para cada $n \in N$. Es fácil comprobar que $s(s'(E)) \simeq s'(s(E))$ para todo espacio E.

Denotaremos por e_i a los vectores de la base canónica de R^m.

I. RESULTADOS PRELIMINARES.

Definición 1. Decimos que un espacio E tiene la propiedad (*) si dado un espacio F, que es isomorfo a un subespacio complementado de E y que contenga un subespacio complementado isomorfo a E, entonces F es isomorfo a E.

La prueba del Teorema 1 está esencialmente incluida en (3), (9), (10), (13).

Teorema 1. Los siguientes espacios tienen la propiedad (*): (1) s (E), (2) $c_0(E)$, (3) $l^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, (4) m (E), (5) s' (s (E)), (6) E^I, $E^{(I)}$, para todo espacio E y todo conjunto infinito I.

Un estudio general de la integración de funciones con valores vectoriales puede ser encontrado en (6), y a él referimos. Si $k \in N \cup \{\infty\}$ y A es un subconjunto cerrado regular de R^m (es decir $A = \overline{\mathring{A}}$) denotamos por $\mathcal{E}^k(A, E)$ el espacio vectorial de todas las funciones definidas en A con valores en E tales que f pertenece a $\mathcal{E}^k(\mathring{A}, E)$ y $D^\alpha f$ puede ser extendida continuamente a todo A para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leqslant k$. En el caso $k = \infty$ escribiremos $\mathcal{E}(A, E)$ en lugar de $\mathcal{E}^\infty(A, E)$. Cuando A es un cubo compacto de R^m dotamos a dicho espacio de la topología definida por las siguientes seminormas: Si α es un multi-índice tal que $|\alpha| \leqslant k$ y q es una seminorma continua de E, $R(q, \alpha)(f) = \sup\{q(D^\alpha f(x)) / x \in Q\}$ para cada $f \in \mathcal{E}^k(A, E)$.

Grothendieck probó que si E es un espacio casi completo, Ω es un abierto de R^m y k es un entero positivo entonces toda función f de Ω en E tal que $u \circ f$ pertenece a $\mathcal{E}^k(\Omega)$ para cada $u \in E'$ es un elemento de $\mathcal{E}^{k-1}(\Omega, E)$. (Véase (8) por ejemplo). Nuestro próximo Teorema es una reformulación de este hecho y sólo daremos unas indicaciones de la prueba.

Teorema 2.

a) Sea Ω un abierto de R^m. Sea E un espacio localmente completo. Si f es una función de Ω en E tal que u o f $\in \mathcal{E}^k$ (Ω) para cada u $\in$ E', entonces f $\in \mathcal{E}^{k-1}$ (Ω, E).

b) Sea Q un cubo compacto de R^m. Sea E un espacio localmente completo. Sea f una función de Q en E tal que u o f pertenece a $\mathcal{E}^k$ (Q) para cada u $\in$ E'. Entonces f $\in \mathcal{E}^{k-1}$ (Q, E).

Demostración:

a) Procedemos por inducción. Si k = 1 la conclusión se sigue fácilmente. El caso general puede ser reducido a k = 2. Por el resultado de Grothendieck f $\in \mathcal{E}^1$ (Ω, $\hat{E}$). Vamos a comprobar que las derivadas parciales de primer orden de f pertenecen a E. Para ello sea $t_o \in \Omega$ y Q una bola compacta de centro t_o incluida en Ω. Si $1 \leqslant i \leqslant m$ los conjuntos

$$B_1 = \left\{ \frac{f(t) - f(s)}{\sum_{i=1}^{m} |t_i - s_i|} \Big/ t \neq s \quad t, s \in Q \right\} \cup \{ o \}$$

$$B_2 = \left\{ \frac{1}{|h| + |k|} \left(\frac{f(t + h\, e_i) - f(t)}{h} - \frac{f(t + k\, e_i) \quad f(t)}{k} \right) \Big/ \right.$$

$$\left. \Big/ h, k \in k, t \in Q, t + h\, e_i \in Q, \ t + k\, e_i \in Q \right\}$$

son débilmente acotados en E. Si C es la envoltura absolutamente convexa y cerrada de f (Q) $\cup$ B_1 $\cup$ B_2, entonces E_C es un espacio de Banach, y podemos encontrar una sucesión de Cauchy en E_C que converja a la i-ésima derivada parcial de f en t_o, que por tanto será un elemento de E.

La prueba de b) no difiere esencialmente de la anterior.

Lema 1. Sea Q un cubo compacto de R^m. Sea E un espacio localmente completo. Sea f una función de Q en E tal que u o f pertenezca a $\mathcal{E}^1$ (Q) para cada u $\in$ E'. Entonces existe la integral de f en Q.

Demostración:

Por el Teorema 2 f es una función continua, luego existe $\hat{x} \in \hat{E}$ tal que u ($\hat{x}$) = $\int_Q$ u o f (t) d t para cada u $\in$ E'. El conjunto

$$B = \left\{ \frac{f(t) - f(s)}{\sum_{i=1}^{m} |t_i - s_i|} \Big/ t, s \in Q,\ t \neq s \right\} \cup \{ o \}$$

es débilmente acotado en E. Si C es la envoltura absolutamente convexa y cerrada de $B \cup f(Q)$, entonces E_C es un espacio de Banach y $f(s) - f(t) \in m\, |s - t|\, C$ para cada s, $t \in Q$. Determinando una sucesión de particiones de Q podemos encontrar una sucesión de Cauchy $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en E_C tal que existe $x \in E$ cumpliendo $\lim_{i \to \infty} u(x_i) = u(x)$ para cada $u \in E'$. Además $u(x_i)$ se pueden escoger como sumas de Riemann de la función continua $u \circ f$, por tanto $\hat{x} = x \in E$.

Establecemos algunas notaciones útiles en lo que sigue. Sea m un entero positivo. Denotamos por $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ los elementos de N_*^m y por FP (m) al conjunto de todos los subconjuntos finitos de N_*^m ordenados por inclusión. Dado un entero no negativo p denotamos por (p) el número 1 si p es igual a 0 y el número p si p es estrictamente positivo. Dado $J \in FP(m)$ y $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ escribimos $l_i(J)$ ($L_i(J)$) para el mínimo (máximo) de $\underline{(p_i)}$ donde p_i es la i-ésima coordenada de algún $\overline{p} \in J$. Dados $\overline{n}, \overline{k} \in N_*^m$ escribimos $(\overline{n})^{\overline{k}} = (n_1)^{k_1} \ldots (n_m)^{k_m}$. Definimos $s^m(E)$ como el espacio vectorial de todas las familias $(x(\overline{n}) / \overline{n} \in N_*^m)$ tales que $\sup \left\{ (\overline{n})^{\overline{k}}\, q(x(\overline{n})) / \overline{n} \in N_*^m \right\}$ (1) es finito para cada $\overline{k} \in N_*^m$ y para cada seminorma continua q de E. Dotamos a dicho espacio con la topología definida por las seminormas (1). Es fácil comprobar que $s^m(E) \simeq s(E)$.

Lema 2. Sea E un espacio localmente completo. Sea m un entero positivo. Sea $(x(\overline{p}) / \overline{p} \in N_*^m)$ una familia en E tal que para cada $\epsilon > 0$ y cada seminorma continua q de E existe $J_o \in FP(m)$ tal que si $J \in FP(m)$ y $J \cap J_o = \varphi$ entonces

$$l_1(J) \ldots l_m(J) \sum_{\overline{p} \in J} q(x(\overline{p})) < \epsilon.$$

Entonces la red

$$\left\{ \sum_{\overline{p} \in J} x(\overline{p}) / J \in FP(m) \right\}$$

converge a un elemento de E que será denotado por $\Sigma\, x(p)$, satisfaciendo $q(\Sigma\, x(p)) = \Sigma\, q(x(p))$ para cada seminorma continua q de E.

Demostración:

Sea B la envoltura absolutamente convexa y cerrada de

$$\left\{ l_1 (J) \ldots l_m (J) \sum_{p \in J} x (\overline{p}) \,/\, J \in FP (m) \right\}$$

B es un subconjunto acotado de E. En efecto: Dada una seminorma continua q de E existe $J_0 \in FP$ (m) tal que si $J \in FP$ (m) y $J \cap J_0 = \varphi$ entonces

$$l_1 (J) \ldots l_m (J) \sum_{\overline{p} \in J} q (x (\overline{p})) < 1.$$

Consideremos $J \in FP$ (M). J es igual a $J^1 \cup J^2$, donde $J^1 = J \cap J_0$ y $J^2 = J \sim J_0$. Se tiene que

$$q (l_1 (J) \ldots l_m (J) \sum_{p \in J} x (\overline{p})) \leqslant l_1 (J^2) \ldots l_m (J^2) \sum_{p \in J^2} q (x (p)) +$$

$$+ l_1 (J) \ldots l_m (J) \sum_{\overline{p} \in J^1} q (x (\overline{p})) \leqslant 1 + L_1 (J_0) \ldots L_m (J_0) \sum_{\overline{p} \in J_0} q (x (p)).$$

Entonces E_B es un espacio de Banach y la conclusión se sigue observando que la red

$$\left\{ \sum_{\overline{p} \in J} x (p) \,/\, J \in FP (m) \right\}$$

satisface la condición de Cauchy de sumabilidad en E_B.

Sea E un espacio localmente completo. Sea Q el cubo compacto de R^m cuyas proyecciones en los ejes son $[-1, 1]$ y Q_1 aquel cuyas proyecciones son $[O, \pi]$: Llamamos polinomio de Chebicheff de grado p a la función definida en $[-1, 1]$ con valores en R por $T_p (t) = \cos (p \arccos t)$. Usaremos la desigualdad de Markov (Véase (5)): Sea P (t) un polinomio de grado n definido en el intervalo [a, b]. Entonces para cada $m \in N$

$$\sup_{s \in [a, b]} \left| \frac{d^m p}{dt^m} (s) \right| \leqslant \frac{2^m \, n^{2m}}{(b - a)^m} \sup_{s \in [a, b]} |p (s)|$$

Lema 3. Sea f un elemento de $\mathcal{E}$ (Q, E). Si g es la función definida en Q_1 con valores en E tal que $g (\theta_1 \ldots \theta_m) = f (\cos \theta_1 , \ldots , \cos \theta_m)$, entonces g pertenece a $\mathcal{E}$ (Q_1, E) y para cada multi-índice α existe una constante positiva C_α tal que $\sup_{\theta \in Q_1} q (D^\alpha g (\theta)) \leqslant C_\alpha \sup_{\beta \leqslant \alpha} \sup_{t \in Q} q (D^\beta f (t))$ para cada seminorma continua q de E.

Teorema 3. Si E es un espacio localmente completo entonces $\mathcal{E}(Q, E) \simeq s^m(E)$.

Demostración:

Sea f un elemento de $\mathcal{E}(Q, E)$. Definimos T (f) como la familia $(a(\overline{p}) / \overline{p} \in N_*^m)$, donde

$$a(\overline{p}) = \frac{1}{\pi^m} \int_{Q_1} f(\cos\theta_1 \dots \cos\theta_m) \cos p_1\theta_1 \dots \cos p_m\theta_m \, d\theta_1 \dots d\theta_m,$$

que es un elemento de E por el Lema 1. Si α es un multi-índice aplicamos el Lema 1 e integración por partes para obtener:

$$\pi^m (\overline{p})^\alpha a(\overline{p}) = \pm \int_{Q_1} D^\alpha f(\cos\theta_1 \dots \cos\theta_m) \omega_1(p_1\theta_1) \dots \omega_m(p_m\theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m,$$

donde $w_i(z)$ puede ser sen z o cos z, y la duplicidad de signo significa que puede aparecer exactamente uno de los dos dependiendo de α. Entonces por el Lema 3 se tiene que $(\overline{p})^\alpha\, q(a(\overline{p})) \leqslant M \sup_{\beta \leqslant \alpha'} \sup_{t \in Q} q(D^\beta f(t))$ para cada $\overline{p} \in N_*^m$ y cada seminorma continua q de E, donde $\alpha' = ((\alpha_1), \dots, (\alpha_m))$. Por tanto T (f) pertenece a $s^m(E)$ y T es una aplicación lineal, inyectiva y continua de $\mathcal{E}(Q, E)$ en $s^m(E)$. Probemos que T es suprayectiva. Dado $(a(\overline{p}) / \overline{p} \in N_*^m)$ un elemento de $s^m(E)$ definimos la aplicación $g_{\overline{p}}$ de Q en E del siguiente modo:

$$g_{\overline{p}}(t_1, \dots, t_m) = a(\overline{p}) T_{p_1}(t_1) \dots T_{p_m}(t_m),$$

donde $\overline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ y T_{p_i} es el polinomio de Chebicheff de grado p_i. Obviamente $g_{\overline{p}} \in \mathcal{E}(Q, E)$. Sea $t_o \in Q$. Para cada multi-índice α la red

$$\left\{ \sum_{\overline{p} \in J} D^\alpha g_{\overline{p}}(t_o) / J \in FP(m) \right\}$$

converge a un elemento de E que denotaremos por $\Sigma D^\alpha g_{\overline{p}}(t_o)$. En efecto: Basta probar que la red satisface la condición del Lema 2. Sea pues $J \in FP(m)$, aplicando la desigualdad de Markov se tiene:

$$l_1(J) \dots l_m(J) \sum_{\overline{p} \in J} q(D^\alpha g_{\overline{p}}(t_o)) \leqslant \sum_{\overline{p} \in J} ((\overline{p})^{\overline{\gamma}})^{-1} \sup (\overline{p})^{\overline{\beta}} q(a(\overline{p}))$$

donde $\overline{\beta} = (2\alpha_1 + m + 3, \dots, 2\alpha_m + m + 3)$ y $\overline{\gamma} = (m + 2, \dots, m + 2)$. La condición se cumple porque la red

$$\left\{ \sum_{\overline{p} \in J} \left[(\overline{p})^{\overline{\gamma}} \right]^{-1} / J \in FP(m) \right\}$$

converge en C. Sea f la función definida en Q con valores en E por $f(t) = \Sigma g_{\overline{p}}(t)$. Por el Teorema 2 b) $f \in \mathcal{E}$ (Q, E) y no es difícil comprobar que T (f) = (a ($\overline{p}$) / $\overline{p} \in N_*^m$) y que T^{-1} es una función continua.

Corolario 3.1. Sea L un cubo compacto de R^m y sea E un espacio localmente completo. Entonces $\mathcal{E}(L, E) \simeq s(E)$.

Ligeras modificaciones en los métodos debidos a Valdivia (9) y Ogrodzka (4) para construir operadores lineales y continuos de extensión de funciones diferenciables nos permiten dar el siguiente Teorema:

Teorema 4. Sea E un espacio. Sea k un entero positivo. Sea P el cubo compacto de R^m $\{ (x_1, \ldots, x_m) / a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \ldots, m \}$. Sea Ω un abierto de R^m tal que $P \subset \Omega$. Sean $H_1, \ldots, H_s$ algunas caras de P. Sea G un subespacio vectorial de $\mathcal{E}^k$ (P, E) cuyos elementos y todas sus derivadas parciales hasta el orden k se anula en $H_1, \ldots, H_s$. Entonces existe un operador lineal y continuo W de G en $\mathcal{E}^k(\Omega, E)$ tal que

a) $Wg(x) = g(x)$ para cada $g \in G$ y cada $x \in P$.

b) Ω Contiene el soporte de Wg para cada $g \in G$.

c) Si I es un intervalo de R^m tal que $I \cap P = H_r$, entonces Wg se anula en I para cada $g \in G$.

d) Si existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que el conjunto

$$C_\lambda = \{ (x_1, \ldots, x_m) / x_j \geqslant a_j + \lambda (b_j - a_j) \}$$

contiene el soporte de

$$g \in G \text{ y } \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \text{ entonces Wg se anula si } x_j \leqslant a_j + \lambda (b_j \quad a_j).$$

Usando el Teorema anterior se obtienen los siguientes resultados:

Proposición 1. Sea E un espacio. Sea k un entero positivo. Sea Q un cubo compacto de R^m. Sea G el subespacio vectorial de $\mathcal{E}^k(Q, E)$ tal que f pertenece a G si y solo si f y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual que k se anulan en ciertas caras fijas de Q. Entonces G es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{E}^k(Q, E)$ y $\mathcal{E}^k(Q, E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de G.

Corolario 1.1. Si Q es un cubo compacto de R^m y E es un espacio localmente completo entonces $\mathcal{D}(Q, E) \simeq s(E)$.

Demostración:

Se sigue de la Proposición 1 del Teorema 1.(1). y del Corolario 3.1.

II. REPRESENTACIONES DE LOS ESPACIOS $\mathcal{O}_M(E)$ y $\mathcal{D}_{L^p}(E)$.

Sea $M_n = \{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m \,/\, n \leqslant x_j \leqslant n, j = 1, \ldots, m\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Sea $\mathcal{A}_n$ la familia de todos los cubos contenidos en M_n de la forma: $\{(x_1, \ldots, x_m) / a_j \leqslant x_j \leqslant a_j + 1, a_j \in Z, j = 1, \ldots, m\}$. Por recurrencia construimos una sucesión (A_n) de elementos de $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ del siguiente modo: Ordenamos primero los elementos de $\mathcal{A}_1$. Supuestos ordenados los cubos de $\mathcal{A}_n$ se ordenan los de $\mathcal{A}_{n+1} \sim \mathcal{A}_n$ y se suponen posteriores a los cubos de $\mathcal{A}_n$. Para cada entero positivo n sea

$$A_n = \{(x_1, \ldots, x_m) / a_j(n) \leqslant x_j \leqslant a_j(n) + 1 \ , \ j = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$B_n = \{(x_1, \ldots, x_m) / a_j(n) - \frac{1}{4} \leqslant x_j \leqslant a_j(n) + \frac{5}{4} \ , \ j = 1, \ldots, m\} \text{ y}$$

$$C_n = \{(x_1, \ldots, x_m) / a_j(n) - \frac{1}{3} \leqslant x_j \leqslant a_j(n) + \frac{4}{3} \ , \ j = 1, \ldots, m\}$$

Sea $\varphi_n: R^m \dashrightarrow R^m$ la aplicación definida por

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_m) = \left(\frac{3}{2} x_1 + a_1(n) - \frac{1}{4}, \ldots, \frac{3}{2} x_m + a_m(n) - \frac{1}{4}\right)$$

Si denotamos por

$$J = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]^m, \quad I = [0, 1]^m, M = \left[-\frac{1}{18}, \frac{9}{18}\right]^m$$

se cumple que $\varphi_n(J) = A_n$, $\varphi_n(I) = B_n$, $\varphi_n(M) = C_n$.

Sea ψ un elemento de $\mathcal{C}^\infty(R^m)$ real no negativo tal que se anule en $R^m \sim M$ y que tome el valor 1 en I. Sea φ un elemento de $\mathcal{C}^\infty(R^m)$ que sea estrictamente positivo en el interior de I y nulo en $R^m \sim I$. Entonces las funciones

$$\mu_n = \frac{\varphi_0 \varphi_n^{-1}}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}}$$

constituyen una partición de la unidad de clase $\mathcal{C}^\infty$ de R^m.

Vamos a utilizar un método debido a Valdivia ((11) y (12)) para dar representaciones de algunos espacios de funciones infinitamente diferenciables con valores en un espacio localmente convexo. Necesitaremos el siguiente resultado: (a) ((2) pág. 123). Sean E y F dos espacios. Sea f un aplicación de E en F lineal continua e inyectiva y g una aplicación de F en E lineal y continua tal que $g \circ f$ es la aplicación identidad de E en sí mismo. Entonces f (E) es un subespacio complementado de F isomorfo a E.

Si E es un espacio y $p \in R$, $1 \leqslant p < \infty$, definimos $\mathcal{D}_{L^p}(E)$ como el espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables definidas en R^m con valores en E tales que para cada multi-índice α y para cada seminorma continua q de E se cumpla que $q \circ D^\alpha f \in L^p(R^m)$. Dotamos a $\mathcal{D}_{L^p}(E)$ con la topología definida por el siguiente sistema de seminormas: Si α es un multi-índice y q es una seminorma continua de E, $Q(\alpha, q)(f) = [\int_{R^m} (q \circ D^\alpha f(x))^p \, dx]^{\frac{1}{p}}$ para cada $f \in \mathcal{D}_{L^p}(E)$. Obviamente se tiene que $\mathcal{D}(R^m, E) \subset \mathcal{D}_{L^p}(E) \subset \mathcal{E}(R^m, E)$ con inyecciones continuas. Los siguientes Lemas son sencillos y su prueba será omitida.

Lema 5. Una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{D}(I, E)$ pertenece a $l^p(\mathcal{D}(I, E))$ si y sólo si la sucesión $(\int_I q(D^\alpha f_n(x))^p \, dx) \in l^1$. Además las seminormas

$$S(\alpha, q)((f_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_I q(D^\alpha f_n(x))^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para cada multi-índice α y seminorma continua q de E definen la topología de $l^p(\mathcal{D}(I, E))$.

Lema 6. Para cada $g \in \mathcal{E}(R^m, E)$ sea $g_n = (g\,\mu_n) \circ \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $g_n \in \mathcal{D}(I, E)$ y dado un multi-índice γ existe una constante positiva $R(\gamma)$ tal que

$$q(D^\gamma g_n(x)) \leq R(\gamma) \sum_{\beta \leq \gamma} q(D^\beta (g \circ \varphi_n)(x))$$

para cada seminorma continua q de E y cada $x \in R^m$.

Proposición 2.

$\mathcal{D}_{L^p}(E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $l^p(\mathcal{D}(I, E))$.

Demostración:

Si $(f_n)_{n=1}^\infty$ pertenece a $l^p(\mathcal{D}(I,E))$, sea $V((f_n))$ la función $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1}$. Consideremos $n \in N$, α un multi-índice y q una seminorma continua de E. Sean $B_{n(h)}$, $h = 1, \ldots, 3^m$, los elementos de $\mathcal{A}$ que cortan a B_n. Se tiene:

$$\left(\int_{A_n} q\left(D^\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1}\right)(x)\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{A_n} q\left(\sum_{h=1}^{3^m} D^\alpha f_{n(h)} \circ \varphi_{n(h)}^{-1}(x)\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{3^m} \left(\int_{B_{n(h)}} q\left(D^\alpha f_{n(h)} \circ \varphi_{n(h)}^{-1}(x)\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{p}} \sum_{h=1}^{3^m} \sup_{x \in I} q\left(D^\alpha f_{n(h)}(x)\right)$$

Por tanto

$$\int_{A_n} q\left(D^\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1}\right)(x)\right)^p dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{9}{2}\right)^m \sum_{h=1}^{3^m} \left[\sup_{x \in I} q\left(D^\alpha f_{n(h)}(x)\right)\right]^p$$

De aquí, por el Teorema de la convergencia monótona, la función

$$q \circ D^{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1}\right) \in L^p(R^m) \quad y$$

$$\left(\int_{R^m} q\left(D^{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1}\right)(x)\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{m}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sup_{x \in J} q\left(D^{\alpha} f_n(x)\right)\right]^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Entonces V $((f_n))$ petenece a $\mathcal{D}_{L^p}$ (E) y V es una aplicación lineal y continua de l^p ($\mathcal{D}$(I, E)) en $\mathcal{D}_{L^p}$ (E).

Sea ahora f un elemento de $\mathcal{D}_{L^p}$ (E). Sea $f_n = (f\mu_n) \circ \varphi_n$ para cada $n \in N$. Definimos W (f) $= (f_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces W (f) es un elemento de l^p ($\mathcal{D}$(I, E)) y W es una aplicación lineal, inyectiva y continua de $\mathcal{D}_{L^p}$ (E) en l^p ($\mathcal{D}$(I, E)). Además V $\circ$ W es la aplicación identidad de $\mathcal{D}_{L^p}$ (E) en sí mismo. En efecto: Si n es un entero positivo, α es un multi-índice y q es una seminorma continua de E, en virtud del Lema 6 existe una constante $Q > 0$, que no depende de n, tal que

$$\left(\int_I q(D^{\alpha} f_n(x))^p dx\right) \leqslant Q \sum_{\beta \leqslant \alpha} \int_{B_n} q\left(D^{\beta} f(x)\right)^p dx$$

por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I q\left(D^{\alpha} f_n(x)\right)^p dx \leqslant 3^m Q \sum_{\beta \leqslant \alpha} \int_{R^m} q\left(D^{\beta} f(x)\right)^p dx$$

De donde se sigue que $(f_n) \in l^p$ ($\mathcal{D}$(I, E)) y que la aplicación lineal W es continua.

Finalmente la conclusión se sigue utilizando el resultado (a).

Escogemos una sucesión de enteros positivos $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que los cubos B_{n_j}, j = 1, 2, . . . son disjuntos a dos. Sea T : $\mathcal{E}$ (J, E) $\dashrightarrow$ $\mathcal{D}$ (I, E) un operador lineal y continuo tal que si $f \in \mathcal{E}$ (J, E) la restricción de Tf a J coincida con f, cuya existencia viene asegurada por el Teorema 4.

Proposición 3.

$\mathcal{D}_{L^p}$ (E) tiene un subespacio complementado isomorfo a l^p ($\mathcal{E}$ (J, E)).

Demostración:

Si g pertenece a $\mathcal{D}_{L^p}(E)$ definimos g_j del siguiente modo: $g_j(x) = g(\varphi_{n_j}(x))$ para cada $x \in J$. Sea α un multi-índice y q una seminorma continua de E. Si φ es un elemento de $\mathcal{D}(R^m)$ tal que $\varphi(x) = 1$ para cada $x \in J$ y $\varphi(x) = 0$ para cada $x \in R^m \sim I$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, y $\widetilde{g}_j$ es la función de I en E tal que $\widetilde{g}_j(x) = g(\varphi_{n_j}(x))$ para cada $x \in I$ entonces tenemos que

$$D^\alpha g_j(x) = \int_{0}^{x_1} \int_0^{x_m} \frac{\partial^m}{\partial y_1 - \partial y_m} (\varphi\, D^\alpha \widetilde{g}_j)(z)\, dz,$$

si $x \in J$. Por tanto existe una constante $Q > 0$ tal que

$$\left[\sup_{x \in J} q(D^\alpha g_j(x))\right]^p \leqslant Q \sup_{|\beta| \leqslant m + |\alpha|} \int_{B_{n_j}} q(D^\beta g(y))^{\prime}\, dy.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sup_{x \in j} q(D^\alpha g_j(x))\right|^p \leqslant Q \sup_{|\beta| \leqslant |\alpha| + m} \int_{R^m} q(D^\beta g(y))^p\, dy.$$

y $(g_j)_{j=1}^{\infty} \in l^p(\mathcal{E}(J, E))$. Entonces si definimos $Y(g) = (g_j)_{j=1}^{\infty}$

para cada $g \in \mathcal{D}_{L^p}(E)$, se cumple que Y es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{D}_{L^p}(E)$ en $l^p(\mathcal{E}(J, E))$.

Si $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ pertenece a $l^p(\mathcal{E}(J, E))$ definimos

$$Z((f_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} Tf_j \circ \varphi_{n_j}^{-1},$$

que es un elemento de $\mathcal{E}(R^m, E)$ evidentemente. Sea α un multi-índice y q una seminorma continua en E. En virtud de la continuidad del operador T existe un entero positivo m y una constante $Q > 0$ tales que

$$\left(\int_{R^m} q\left(D^\alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty} T f_j \circ \varphi_{n_j}^{-1}\right)(x)\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant Q \sum_{|\beta| \leqslant m + |\alpha|} \left(\sum_{j=1} \left|\sup_{x \in J} q\left(D^\beta f_j(x)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} Tf_j \circ \varphi_{n_j}^{-1}$$

pertenece a $\mathcal{D}_{L^p}$ (E) y Z es una aplicación lineal inyectiva y continua de l^p ($\mathcal{E}$ (J, E)) en $\mathcal{D}_{L^p}$ (E) tal que Y o Z coincide con la aplicación identidad de l^p ($\mathcal{E}$ (J, E)) en sí mismo.

Aplicando el resultado (a) se obtiene la conclusión.

Teorema 5.

Si E es un espacio localmente completo entonces $\mathcal{D}_{L^p}$ (E) es isomorfo a l^p (s (E)).

Demostración:

Se sigue de las proposiciones anteriores y de los Teoremas 1 y 3.

Siguiendo a Schwartz (8) si E es un espacio definimos O_M (E) como el espacio vectorial de todos los elementos f de $\mathcal{E}$ (R^m, E) tales que para cada φ que pertenece a S (R^m), espacio de las funciones infinitamente diferenciables de decrecimiento rápido, y para cada multi-índice α el conjunto

$$\left\{ \varphi(x)\, D^{\alpha} f(x) \,/\, x \in R^m \right\}$$

es acotado en E. Dotamos a O_M (E) con la topología definida por el siguiente sistema de seminormas: Si α es un multi-índice, q una seminorma continua en E y φ un elemento de S (R^m), entonces Q (q, α, φ) (f) = $\sup_{x \in R^m} q\,(\varphi(x)\, D^{\alpha} f(x))$, para cada $f \in O_M$ (E).

En lo que sigue necesitaremos los siguientes resultados, que se encuentran probados en (12) o pueden ser obtenidos con ligeras modificaciones: (b) Si $f \in S$ (R^m) entonces la sucesión

$$\left(\sup_{x \in B_n} |f(x)| \right)_{n=1}^{\infty}$$

pertenece al espacio s. (c) Si $(a_n) \in s$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, (\psi \circ \varphi_n^{-1}) \in S\,(R^m).$$

(d) Sea $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ un elemento de s tal que $\alpha_n \geqslant 0$ para cada n ϵ N. Si α es un multi-índice, q una seminorma continua en E y g un elemento de O_M (E) entonces

$$\sup_n \alpha_n \sup_{x \epsilon I} q\,(D^{\alpha}\,(g \circ \varphi_n)\,(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{|\alpha|} \sup_{x \epsilon R^m} q \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\,(\psi \circ \varphi_n^{-1})\,(x)\, D^{\alpha}\, g\,(x)\right).$$

(e) Si g ϵ O_M (E), α es un multi-índice y q es una seminorma continua en E entonces

$$\sup_{x \epsilon J} q\,(D^{\alpha}\,(g \circ \varphi_n)\,(x))\,)_{n=1}^{\infty} \epsilon\ s.$$

(f) Para cada multi-índice α existe una constante $K_1 > 0$ y un entero positivo h tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup_{x \epsilon I} q\,(D^{\alpha}\,(g \circ \varphi_n)\,(x)) \leqslant$$

$$\leqslant k_1 \sup_{x \epsilon R^m} q\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^h\, \alpha_n (\psi_\circ\, \varphi_n^{-1})\,(x)\right) D^{\alpha}{}_g\,(x)\right)$$

para cada $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ϵ s tal que $\alpha_n \geqslant 0$, g ϵ O_M (E) y q seminorma continua en E.

Sea $B = \left\{(x_1, \ldots, x_m) \,\epsilon\, R^m \;/\; \frac{1}{4} \leqslant x_j \leqslant \frac{3}{4}\,,\ j = 1, \ldots, m\right\}$. Denotamos por λ un elemento de $\mathcal{E}$ (R^m) real y no negativo que tome el valor 1 en B y cuyo soporte este contenido en I. Representamos por S: $\mathcal{E}$ (B, E) $\dashrightarrow$ $\mathcal{D}$(I, E) un operador lineal y continuo tal que si f ϵ (B, E) la restricción de Sf a B coincida con f, cuya existencia está asegurada por el Teorema 4. Si λ_n: $R^m \dashrightarrow R^m$ es la aplicación definida por $\lambda_n\,(x_1, \ldots, x_m) = (x_1 + n, x_2, \ldots, x_m)$ denotamos $D_n = \lambda_n$ (B) y $E_n = \lambda_n$ (I).

Los siguientes resultados pueden encontrarse en (12): (g) Si $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es un elemento de s tal que $\alpha_n \geqslant 0$ para cada n ϵ N, entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\,(\lambda_\circ\,\lambda_n^{-1})$ ϵ S (R^m). (h) Si f ϵ S (R^m) entonces$(\sup_{x \epsilon E_n} |f\,(x)|)_{n=1}^{\infty}$ ϵ s.

Proposición 4.

O_M (E) es isomorfo a un subespacio complementado de s' ($\mathcal{D}$ (I, E)).

Demostración:

Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ pertenece a s' ($\mathcal{D}$ (I, E)) sea X $((f_n))$ la función

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1},$$

que pertenece a $\mathcal{E}$ (R^m, E). Sea f un elemento de S (R^m), γ un multi-índice y q una seminorma continua de E. Si $x \in R^m$ se tiene:

$$q\left(g(x)\, D^{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1}\right)(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{|\gamma|} \sup_{z \in B_n} |f(z)| \sup_{y \in J} q\left((D^{\gamma} f_n(y)\right)$$

Como

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{|\gamma|} \sup_{z \in B_n} |f(z)|\right) \in s,$$

por el resultado (b), se sigue que X $((f_n))$ pertenece a O_M (E) y

$$\sup_{x \in R^m} q\left(f(x)\ D^{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \circ \varphi_n^{-1}\right)(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{|\gamma|} \sup_{z \in B_n} |f(z)| \sup_{y \in I} q\left(D^{\gamma} f_n(y)\right)$$

Entonces X es una aplicación lineal y continua de s' ($\mathcal{D}$ (I, E)) en O_M (E).

Sea ahora g un elemento de O_M (E). Definimos $g_n = (g\,\mu_n) \circ \varphi_n$ para cada $n \in N$. Sea Y (g) = (g_n) , que es un elemento de s' ($\mathcal{D}$ (I, E)). Además Y es una aplicación lineal, inyectiva y continua de O_M (E) en s' ($\mathcal{D}$ (I, E)) tal que X $\circ$ Y coincide con la aplicación identidad de O_M (E) en sí mismo. En efecto: Si γ es un multi-índice, q es una seminorma continua en E y $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es un elemento de s tal que $\alpha_n \geqslant 0$ para cada $n \in N$, entonces por el Lema 6 se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup_{x \in I} q \left(D^{\gamma} g_n (x) \right) \leqslant$$

$$\leqslant R(\gamma) \sum_{\beta \leqslant \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup_{x \in I} q \left(D^{\beta}(g \circ \varphi_n)(x) \right).$$

Por tanto, si aplicamos el resultado (f), existe una constante $M > 0$ y un entero positivo h tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup_{x \in I} q \left(D^{\gamma} g_n (x) \right) \leqslant$$

$$\leqslant R(\gamma) M \sum_{\beta \leqslant \gamma} \sup_{x \in R^m} q \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^h \alpha_n (\psi \circ \varphi_n^{-1})(x) D^{\beta} g(x) \right) \right).$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^h \alpha_n (\psi \circ \varphi_n^{-1})$$

pertenece a $S(R^m)$, por el resultado (c), entonces se sigue lo deseado.

La conclusión es consecuencia del resultado (a).

Proposición 5.

s' ($\mathcal{E}$ (B, E)) es isomorfo a un subespacio complementado de O_M (E).

Demostración:

Si g pertenece a O_M (E) y x es un punto de B definimos $g_n(x) = g(\lambda_n(x))$, y g_n resulta ser un elemento de $\mathcal{E}$ (B, E). Consideremos γ un multi-índice, q una seminorma continua en E y $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ un elemento de s tal que $\alpha_n \geqslant 0$ para cada $n \in N$. Se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup_{x \in B} q \left(D^{\gamma} g_n (x) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in R^m} q \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda \circ \lambda_n^{-1}) \right) (x) D^{\gamma} g(x) \right).$$

En vitud del resultado (g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda \circ \lambda_n^{-1}) \in S(R^m),$$

entonces (g_n) pertenece a s' ($\mathcal{E}$ (B, E)) y si definimos X (g) = (g_n) entonces $\ddot{X}$ es una aplicación lineal y continua de O_M (E) en s' ($\mathcal{E}$ (B, E)).

Por otra parte si (f_n) pertenece a s' ($\mathcal{E}$ (B, E)) definimos

$$Y((f_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} S f_n \circ \lambda_n^{-1},$$

que es un elemento de $\mathcal{E}$ (R^m, E). Consideremos un multi-índice γ, un elemento f de S (R^m) y una seminorma continua q de E. Como el operador de extensión S es continuo existe un entero positivo k y una constante $L > 0$ tales que

$$\sup_{x \in I} q\,(D^\gamma (Sg)(x)) \leqslant L \sum_{|\beta| \leqslant k} \sup_{x \in B} q\,(D^\beta g(x)).$$

para cada g $\in$ $\mathcal{E}$ (B, E). De donde:

$$\sup_{x \in R^m} q\left(f(x)\, D^\gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty} S f_n \circ \lambda_n^{-1}\right)(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{|\beta| \leqslant k} \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E_n} |f(x)| \sup_{x \in B} \left(D^\beta f_n(x)\right).$$

plicando el resultado (h) $\left(\sup_{x \in E_n} |f(x)|\right)_{n=1}^{\infty}$ pertenece a s, por tanto

$$\bar{Y}((f_n)) \in O_M(E)$$

e Y es una aplicación lineal, inyectiva y continua de s' ($\mathcal{E}$ (B, E)) en O_M (E) tal que X $\circ$ $\dot{Y}$ es la aplicación identidad de s' ($\mathcal{E}$ (B, E)) en sí mismo.

La conclusión se obtiene aplicando el resultado (a).

Teorema 6.

Si E es un espacio localmente completo entonces O_M (E) es isomorfo a s' (s (E)).

Demostración:

Se sigue de las Proposiciones anteriores y de los Teoremas 1y 3.

Otras representaciones de espacios de funciones diferenciables con valores en un espacio E localmente completo han sido obtenidas en (1). Se prueba por ejemplo que $\mathcal{B}_0(R^m, E) \simeq c_0(s(E))$, $\mathcal{B}(R^m, E) \simeq m(s(E))$, $S(R^m, E) \simeq s(E)$, $\mathcal{E}(\Omega, E) \simeq s(E)^N$, $\mathcal{D}(\Omega, E) \simeq s(E)^{(N)}$, para todo Ω subconjunto abierto de R^m.

BIBLIOGRAFIA

1. BONET, J.: Representaciones de espacios de funciones con valores vectoriales. Memoria para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas. Valencia, Junio, 1980.

2. HORVATH, J.: Topological vector spaces and distributions I. Addison-Wesley Publ. Comp. Reading Massachusetts 1966.

3. JAMESON, G. J. O.: Topology and normed spaces. Chapman and Hall. London. 1974.

4. OGRODZKA, Z.: On simultaneous extensions of infinitely differentiable functions. Studia Math. 28 (1967) 193-207.

5. ROLEWICZ, S.: Metric linear spaces. Warszawa, 1972.

6. RUDIN, W.: Functional Analysis. Mc. Grawn-Hill comp. New York, 1973.

7. SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. Hermann, Paris. 1978.

8. SCHWARTZ, L.: Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. J. Analyse Math., 4 (1954/55) 88-148.

9. VALDIVIA, M.: Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$. Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 72 (1978). 385-414.

10. VALDIVIA, M.: Representaciones de los espacios $\mathcal{C}^m$ (V) y $\mathcal{D}^m$ (V). Pendiente de publicación en la Rev. Real Acad. ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

11. VALDIVIA, M.: On the space $\mathcal{D}_{L^p}$. Pendiente de publicación.

12. VALDIVIA, M.: A representation of space O_M. (Pendiente de publicación en Math. Z.).

13. VOGT, D.: Sequence space representations of spaces of test functions and distributions. (Preprint).

José Bonet
Angel Guimerá, 47 - 12ª
Valencia-8