r- y r^2 VARIEDADES DIFERENCIABLES

por

F. SÓLER*

Dépt. de mathématique. Université de Moncton. Moncton, N.B., Canada

Abstract: The r-manifolds are considered in connexion with the symmetric and harmonic manifolds. For r^2-manifolds the Wong's conjecture is solved. The natural generalisation of r-manifolds to r-tensor fields is realised in such way that the results enables us to study in more general way the r- and r^2-manifolds for the riemannian case.

1. INTRODUCCIÓN.

La terminología utilizada es la de [1]. Vamos a dar a continuación una descripción breve de los principales conceptos utilizados.

Sea V_n una variedad diferenciable n-dimensional. Un abierto de V_n es homeomorfo a R^n. Sea $F(p)$ el álgebra de las funciones diferenciables de clase C^1 en un vecinaje de $p \in V_n$, y $F(V_n)$ el álgebra de las funciones diferenciables sobre V_n.

Un campo vectorial es la asignación de un vector a cada punto de V_n. Es una derivación del álgebra $F(V_n)$. El conjunto de todos los campos vectoriales sobre V_n, $\mathcal{K}$ es un $F(V_n)$ – módulo. El conjunto de los campos tensoriales de tipo (r, s), $\mathcal{J}^r_s$ es isomorfo al producto tensorial de r-veces $\mathcal{K}$ y s-veces su dual. Un campo tensorial de tipo (r, s) puede ser considerado como una aplicación s-lineal de $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \ldots$ (s-veces) $\ldots \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{J}^r_0$.

La conexión afín es una aplicación bilineal $\nabla : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, representada $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ en donde $X, Y \in \mathcal{K}$. El operador ∇_X

* Dirección actual: Institut Henri Poincaré, Université de Paris VI, 11 rue Pierre et Marie Curie, Paris, Francia.

es la diferenciación covariante respecto a X. Es una derivada sobre el álgebra de los campos tensoriales que conservan el tipo y que commutan con cada contracción.

La derivada covariante de un campo tensorial $K \in \mathcal{J}_s^r$ es una aplicación ∇: $\mathcal{J}_s^r \longrightarrow \mathcal{J}_{s+1}^r$, y ponemos:

$$(1\text{-}1) \qquad (\nabla K)(X_1, \ldots, X_s : V) \equiv (\nabla_V K)(X_1, \ldots, X_s)$$

$$\forall X_1, \ldots, X_s, V \in \mathcal{K}.$$

para la primera derivada covariante y

$$(1\text{-}2) \qquad (\nabla^2 K)(X_1, \ldots, X_s : V : W) \equiv (\nabla_W (\nabla_V K))(X_1, \ldots, X_s)$$

$$\forall X_1, \ldots, X_s, V, W \in \mathcal{K}.$$

para la segunda.

Los campos tensoriales torsión y curvatura son definidos respectivamente:

$$(1\text{-}3) \qquad T(V, W) = \nabla_V W - \nabla_W V - [V, W], \forall V, W \in \mathcal{K}$$

$$(1\text{-}4) \qquad R(V, W) = [\nabla_V, \nabla_W] \quad \nabla_{[V, W]}, \forall V, W \in \mathcal{K}$$

Esta última (1-4) podemos escribirla también:

$$(1\text{-}5) \qquad R(V, W, Z) = A\,(\nabla^2 Z)(: W : V) - \nabla_{T(W, V)} Z$$

$$\forall V, W, Z \in \mathcal{K}.$$

aquí A representa el operador de antisimetrización.

Sea g el tensor métrico de la variedad. Representaremos con τ el isomorfismo definido por g; entre el fibrado tengante y cotangente

$$(1\text{-}5 \text{ bis}) \quad \tau : \mathcal{K}(V_n) \longrightarrow \mathcal{K}^*(V_n)$$

Este isomorfisme se extiende de una forma natural a los campos tensoriales.

El tensor de Riemann se define:

$$(1\text{-}6) \qquad R(X, Z, V, W) = g(R(V, W, Z), X), \forall X, Z, V, W \in \mathcal{K}$$

siendo g el tensor métrico.

El tensor de Ricci se define:

$$(1\text{-}7)\qquad S(X,Y) = \overset{i}{\Sigma}\, \theta^i (R(X, V_i, Y)),\ \forall X, Y \in \mathcal{K}$$

en donde $\beta = \{ V_i \}$ es una base del espacio vectorial tangente y θ^i la base dual asociada.

Las identidades de Bianchi se escriben:

$$(1\text{-}8)\qquad P_{XYZ}//\{R(X,Y,Z) \quad (T(T(X,Y),Z) + \nabla_X T(Y,Z))\} = 0$$

$$(1\text{-}9)\qquad P_{XYZ}//\{(\nabla_X R)(Y,Z) + R(T(X,Y),Z)\} = 0$$

en donde '$P_{XYZ}//$' indica permutación circular sobre X, Y, Z, y suma.

2. Variedades armónicas, simétricas y recurrentes.

Las variedades simétricas fueron introducidas por Cartan [2]. Están definidas como aquellas variedades para las cuales el tensor de curvatura es invariante por las transformations paralelas

$$(2\text{-}1)\qquad \nabla_X R = 0 \quad , \quad \forall X \in \mathcal{K}(V_n)$$

para las variedades sin torsión, $T(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{K}(V_n)$. Basándose en el grupo de holonomia, Cartan da la clasification completa de las variedades con métrica definida positiva.

Copson y Ruse [3] introducen las variedades armónicas como aquellas para las cuales la ecuation de Laplace generalizada tiene soluciones que solo dependen de la distancia geodésica s:

$$(2\text{-}2)\qquad \text{lapl } s = f(s)]_p \qquad \forall p \in \Omega \subset V_n$$

Si la condition de armonicidad se verifica en todos los puntos $p \in V_n$ de la variedad, se llama completamente armónica.

Toda variedad armónica es una variedad de Einstein, es decir verifica la condición:

$$(2\text{-}3)\qquad S(X,Y) = \lambda \cdot g(X,Y) \quad , \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}(V_n)$$

Copson y Ruse [3] demuestran que toda variedad riemanniana armónica de dimensions 2 y 3 es necesariamente una variedad con curvatura constante. Motivados por estos resultados proponen.

Conjetura 1. Toda variedad riemanniana V_n, $n \geqslant 2$, armónica, es una variedad con curvatura constante, es decir:

$$(2\text{-}4) \qquad R(X, Y, Z, T) = k\,(g(X, Z)\, g(Y, T) - g(X, T)\, g(Y, Z))$$

$$\forall X, Y, Z, T \in \mathcal{K}(V_n).$$

Esta conjetura dio lugar a toda una serie de trabajos sobre las variedades armónicas [4], [5], [6]. Lichnerowicz [7] las estudia de una forma muy completa, en una carta local normal.

El resultado que más nos interesa es el siguiente:

Teorema. *Toda variedad armónica de dimensión cuatro es simétrica indescomponible.*

Parte, para la demostración de su teorema, del hecho de que la variedad sea analítica. Esta restricción es la causa indirecta del origen de las variedades recurrentes, porque la convergencia de la serie que determina el tensor métrico (véase [7]) no está siempre asegurada, salvo en el caso de la analiticidad.

En el artículo de Copson and Ruse [3] prueban que en toda variedad armónica se verifica la relación:

$$(2\text{-}5) \qquad (\nabla S)(X, Y\colon W) + (\nabla S)(W, X\colon Y) + (\nabla S)(Y, W\colon X) = 0\,,$$

$$\forall X, Y, W \in \mathcal{K}$$

siendo S el tensor de Ricci, ahora, si exigimos la condición:

$$(2\text{-}6) \qquad (\nabla R)(X, Y, Z, T\colon W) = \alpha(W) \cdot R(X, Y, Z, T)$$

$$\forall X, Y, Z, T \in \mathcal{K}$$

es decir la condición de recurrencia (2-10).

Se demuestran entonces las dos relaciones siguientes:

$$(2\text{-}7) \qquad (\nabla S)(X, Y\colon W) = \alpha(W) \cdot S(X, Y)$$

$$(2\text{-}8) \qquad (\nabla R)(\colon W) = \alpha(W) \cdot R$$

$$\forall X, Y, W \in \mathcal{K}$$

Para estas variedades, se obtiene fácilmente de las condiciones (2-7) y (2-8):

$$\alpha(W) \cdot S(X, Y) + \alpha(Y) \cdot S(W, X) + \alpha(X) \cdot S(Y, W) = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

$$\forall X, Y, W \in \mathcal{K}$$

De la relation (2-9) se demuestra [8] que cuando $\alpha \neq 0$ necesariamente el tensor de Ricci se anula.

Teorema 1. Si la variedad armónica es también propiamente una r-variedad (es decir $\alpha \neq 0$), entonces $S(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{K}$.

En 1946 Ruse [9] encuentra un ejemplo de variedad armónica que no es simétrica. Se trata naturalmente de una variedad de Einstein, con curvatura escalar nula. El tensor de curvatura verifica la relación:

$$\nabla R = R \otimes a \qquad (2\text{-}10)$$

en donde a es una 1-forma y R es el tensor de Riemann-Christoffel de la variedad.

Las variedades satisfaciendo la condición (2-10) en cada punto de la variedad, fueron llamadas k-variedades o kapa-variedades al principio, y luego variedades recurrentes o más simplemente r-variedades.

Posteriormente las r-variedades serán clasificadas en dos tipos: simples, cuando el tensor de curvatura puede descomponerse en el producto tensorial de dos 2-formas, y no-simples, en el caso contrario.

La variedad de Ruse [9] corresponde al caso de variedades armónicas simples. Para tales variedades el tensor de curvatura se descompone en la forma siguiente.

$$R(X, Y, Z, T) = \mu(X, Y) \cdot \mu(Z, T) \qquad \forall X, Y, Z, T \in \mathcal{K}$$

en donce

$$\nabla \mu(Z, T: W) = \frac{1}{2} a(W) \cdot \mu(Z, T)$$

El ejemplo dado por Ruse es el de una variedad riemanniana, en la que las componentes del tensor métrico en una carta local, son:

$$(2\text{-}11) \qquad \begin{array}{ll} g(X_1, X_3) = 1 & g(X_1, X_4) = y \\ g(X_2, X_2) = x^4 \cdot f(y) & g(X_2, X_4) = x \end{array}$$

en donde $X_i \in \mathcal{K}$ $i = 1,4$ es una base.

Se trata de una r-variedad simple, como todas las armónicas recurrentes [10].

3. VARIEDADES AFINES RECURRENTES DE SEGUNDO ORDEN.

Consideremos el caso donde V_n es una variedad afín. La condición de recurrencia es la misma que para el caso riemanniano. En particular la condición de recurrencia de segundo orden se fórmula:

$$\nabla^2 R = R \otimes B$$

en donde $B \in \mathcal{K}^* \otimes \mathcal{K}^*$.

Una variedad recurrente de primer orden,

$$\nabla R = R \otimes \alpha$$

lo es también de cualquier orden, en particular

$$\nabla(\nabla R) = \nabla^2 R = R \otimes (\alpha \otimes \alpha + \nabla \alpha)$$

es decir

$$\text{(3-1)} \qquad \nabla^2 R = R \otimes B$$

en donde $B = \alpha \otimes \alpha + \nabla \alpha$

En 1962, Wong [11] lanza la conjetura siguiente para las variedades afines satisfaciendo:

i) conexión lineal simétrica $A\Gamma = 0$
ii) propiamente recurrentes de primer orden;

$$\nabla R = R \otimes \alpha; \quad \alpha \neq 0$$

Conjetura 2. *Si* $A\,S(X,Y) = 0$ *entonces* $A\,\nabla\alpha = 0$.

En donde $S(X,Y) = \sum^{i} \theta^i R(X, V_i, Y)$

$\beta = \{ V_i \}$ *es una base de* T_p *et*

$\beta^* = \{ \theta^i \}$ *es la base dual*

Esta conjetura tiene solución inmediata para el caso riemanniano, porque en este caso $\alpha = d\theta$, y necesariamente $A \; \nabla \alpha = 0$. (Cifra: Walker [12]).

Análogamente en el caso afín la conjetura sería resuelta si se probase que $\alpha = d\theta \; ; \; \theta \in F(V_n)$.

Una forma de probar la conjetura sería de obtener que $AB = 0$ para todas las variedades recurrentes de segundo orden.

En el caso riemanniano el problema fue resuelto por Roter [13].

Teorema 2. Para toda variedad diferenciable riemanniana recurrente de seguno orden, el tensor de recurrencia es simétrico.

La demostración dada por Roter en coordenadas locales no es tan elegante ni general como la siguiente. (Cifra: Sóler [8]).

Demostración: Si definimos un tensor.

$H \in \overset{3}{\otimes} (T_n^* \Lambda T_n^*)$ como la parte antisimétrica de la derivada segunda del tensor de curvatura,

$$(A\nabla^2)\, R \equiv H$$

es decir para el caso de recurrencia de segundo orden,

$$H = AB \otimes R$$

y teniendo cuenta del isomorfismo

$$\Lambda_n^{*(2)} \approx T_n^* \Lambda T_n^*$$

las coordenadas de H son H_{ABC} en el espacio vectorial $\Lambda_4^{*(2)}$.

Por otro lado sabemos que para toda variedad diferenciable métrica

$$P_{ABC} /\!/ \, H_{ABC} = 0$$

en donde $P_{ABC}/\!/$ significa, permutación circular sobre los índices A, B y C, y suma.

Entonces con el lema 2 de Walker [12]. Si $R \neq 0$ esto implica $AB = 0$. Lo que prueba el teorema.

Esta teorema tiene por corolario immediato, si se tiene cuenta de (3-1).

Corolario 1. Para las variedades diferenciables riemannianas recurrentes de primer orden, la 1-forma de recdurrencia deriva de un gradiente.

Esta es otra forma diferente de obtener el resultado de Walker [12].

La conjetura de Wong [11] es un caso particular de la conjetura siguiente.

Conjetura 3. Para las variedades diferenciables afines recurrentes de segundo orden el tensor de recurrencia es simétrico.

El análisis de las propiedades del tensor de recurrencia para las variedades riemannianas recurrentes de segundo orden está basado en las propiedades de simetría del tensor de Riemann. El tensor de curvatura, en el caso afín, no tiene todas las propiedades de simetría del tensor de Riemann. Esto hace el estudio en el caso afín más difícil.

En lo que sigue nos vamos a limitar al caso sin torsión, es decir con conexión simétrica. En este caso las identidades de Bianchi (1-8) y (1-9) pueden formularse:

$$(3\text{-}2) \qquad P_{XYZ}//\, R(X,Y,Z) = 0\,, \qquad \forall\, X,Y,Z \in \mathcal{K}$$

$$(3\text{-}3) \qquad P_{XYZ}//\, R(Y,Z,W{:}\ X) = 0\,, \qquad \forall\, X,Y,Z,W \in \mathcal{K}$$

La condición de recurrencia de segundo orden, siendo $R \neq 0$, es:

$$(3\text{-}4) \qquad (\nabla_W(\nabla_V R))(X,Y,Z) = R(X,Y,Z)\cdot B(V,W)$$

$$\forall\, X,Y,Z,V,W \in \mathcal{K}$$

Vamos a obtener ahora algunas fórmulas con la parte antisimétrica del tensor de curvatura.

Teniendo cuenta de (3-3), la ecuación (3-4) nos da,

$$(3\text{-}5) \qquad \beta \equiv P_{VXY}//\, R(X,Y,Z)\cdot B(V,W) = 0$$

Si se hacen las permutaciones circulares y diferencias siguientes:

$$\beta \cdot\cdot [P_{VW} // \beta] - [P_{XW} // \beta] \cdot\cdot [P_{YW} // \beta] = 0$$

nos da cero, por definición de β (cifra; (3-5)). Realizando las simplificaciones necesarias, se obtiene:

$$P_{XYV} // A\,B(V, W)\,R(X, Y, Z) = A\,B(X, Y) \cdot R(W, V, Z) \tag{3-6}$$

$$\forall\, X, Y, Z, V, W \in \mathcal{K}$$

La fórmula de Ricci para el commutador de las derivadas segundas [14] es:

$$\begin{aligned} A(\nabla^2 R)(X, Y, Z{:}\ V{:}\ W) &= R(X, Y, R(V, W, Z)) \\ &+ R(X, R(V, W, Y), Z) \\ &+ R(R(V, W, X), Y, Z) \\ &\cdot R(V, W, R(X, Y, Z)) \\ &\equiv H(Z, X, Y, V, W) \end{aligned} \tag{3-7}$$

Una relación interesante puede obtenerse, teniendo cuenta del hecho que el commutador de dos derivaciones es una derivación [15].

La ecuación (3-4) puede escribirse

$$A(\nabla^2 R)(:V:W) = A\,B(V, W) \cdot R$$

y aplicando el operador de derivación $[A\nabla^2]$ nos da,

$$\begin{aligned} &A\nabla^2 (A(\nabla^2 R)(:V:W))(:P:Q) = \\ &= [A\nabla^2 B(:P:Q) + A\,B(\dot{V}, W) \cdot A\,B(P, Q)] \cdot R \end{aligned} \tag{3-8}$$

y por el hecho de ser recurrente de segundo orden, con la relación (3-7) obtenemos,

$$\begin{aligned} &A\nabla^2 [A(\nabla^2 R)(:V:W)](:P:Q) = \\ &= 2A(\nabla^2 H)(:P:Q) \\ &= 2A\,B(P, Q) \cdot A\,B(V, W) \cdot R \end{aligned} \tag{3-9}$$

Con las ecuaciones (3-8) y (3-9) se obtiene immediatamente

$$\mathcal{A}(\nabla^2 B)(:P:Q) = \mathcal{A}B(V,W) \cdot \mathcal{A}B(P,Q)$$

Teniendo cuenta del isomorfismo

$$\Lambda_n^{*(2)} \longleftrightarrow T_n^* \wedge T_n^*$$

entonces $\mathcal{A}B \in \Lambda_n^{*(2)}$ y $\delta \equiv \mathcal{A}(\nabla^2)(:P:Q)$ es una derivación del álgebra.

Proposición 1. *La parte antisimétrica del tensor de recurrencia de segundo orden para las variedades propiamente afines y sin torsión es autorecurrente en el espacio de las 2-formas $\Lambda_n^{*(2)}$ para la derivación δ.*

Este resultado es análogo a uno obtenido por Walker [12] para las variedades recurrentes riemannianas simples. La l-forma de recurrencia es recurrente.

La fórmula de Ricci (3-7) aplicada a la parte antisimétrica del tensor B nos permite obtener,

$$\text{(3-10)} \qquad \mathcal{A}(\nabla^2)\mathcal{A}B(:P:Q) = \mathcal{A}B(V, R(Q,P,Y)) + \mathcal{A}B(R(Q,P,X),W)$$

Haciendo la serie de operaciones siguientes, vamos a obtener tres identidades importantes.

Primeramente, teniendo cuenta de la identidad de Bianchi (3-2) y haciendo la permutación $P_{VXY}//$ obtenemos,

$$\text{(3-11)} \qquad P_{VXY}//\mathcal{A}B(V,R(X,Y,Z)) = \mathcal{A}B(V,Z) \cdot \mathcal{A}B(X,Y)$$

por contracción en (3-6).

$$\text{(3-12)} \qquad P_{VXY}//\mathcal{A}B(V,R(X,Y,Z)) = \mathcal{A}B(X,Y) \cdot S(Z,V)$$

comparando (3-11) y (3-12).

$$P_{VXY}//\mathcal{A}B(X,Y) \cdot S(Z,V) = \mathcal{A}B(X,Y) \cdot \mathcal{A}B(Z,V)$$

y de (3-10)

$$P_{VXY}//\mathcal{A}B(V,R(X,Y,Z)) = \mathcal{A}B(Z,R(X,Y,V)) + \mathcal{A}B(V,Z) \cdot \\ \cdot \mathcal{A}B(X,Y)$$

es decir

$$(3\text{-}13) \qquad P_{VXY} // \mathcal{A}\,B(V, R(X, Y, Z)) = \mathcal{A}\,B(V, Z) \cdot \mathcal{A}\,B(X, Y)$$

de nuevo por contracción en (3-6).

$$P_{VXY} // \mathcal{A}\,B(V, R(X, Y, Z)) = \mathcal{A}\,B(X, Y) \cdot S(Z, V)$$

$$= \mathcal{A}\,B(X, Y) \cdot \mathcal{A}\,B(Z, V)$$

es decir

$$(3\text{-}14) \qquad P_{VXY} // \mathcal{A}\,B(V, R(X, Y, Z)) = -\mathcal{A}\,B(X, Y) \cdot \mathcal{A}\,B(V, Z)$$

La suma de las ecuaciones (3-13) y (3-14).

$$P_{VXY} // \mathcal{A}\,B(V, R(X, Y, Z)) = 0$$

Estos resultados pueden resumirse en la proposición siguiente.

Proposición 2. *La parte antisimétrica del tensor de recurrencia de las variedades con conexión afín simétrica y recurrentes de segundo orden verifica las relaciones siguientes.*

i) $P_{VXY} // \mathcal{A}\,B(X, Y) \cdot \mathcal{A}\,B(V, Z) = 0$

ii) $P_{VXY} // \mathcal{A}\,B(X, Y) \cdot \mathcal{A}\,S(Z, V) = 0$

iii) $P_{VXY} // \mathcal{A}\,B(R(X, Y, Z), V) = 0$

en los tres casos $\forall\, X, Y, Z, V \in \mathcal{K}$.

Las propiedades de la parte antisimétrica pueden resumirse con las proposiciones siguientes, que son fáciles a demostrar a partir de la proposición 2.

Proposición 3. *Si* $\exists\, L \in \mathcal{K}$ *tal que las condiciones* $S(Z, L) = 0, \forall\, Z \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{A}\,B(Z, L) = \omega(Z) \neq 0$ *en todo abierto de la variedad, entonces:*

i) $S(X, Y) = \chi^2\, \rho(X) \cdot \omega(Y)$

Ricci es descomponible

ii) $\omega(L) = 0$

Supongamos la existencia de un $L\ (V_n)$ que verifique:

$$(3\text{-}15) \qquad \text{a)}\ S(X,L) = \rho(X) \neq 0\,, \qquad \forall X \in \mathcal{K}$$

$$\text{b)}\ A\,B(X,L) = 0\,, \qquad \forall X \in \mathcal{K}$$

Proposición 4. *Si* $\exists\, L \in \mathcal{K}$ *satisfaciendo* (3-15) *entonces* $A\ B(X,Y) = 0$,

$$\forall X, Y \in \mathcal{K}\,.$$

Proposición 5. *Si una variedad afín sin torsión es recurrente de primer orden y satisface* (3-15) *entonces* $A\,\nabla\,\alpha = 0$ *(en donde* α *es la 1-forma de recurrencia).*

Si las condiciones siguientes son satisfechas:

$$(3\text{-}16) \quad \begin{cases} \text{i)} & S(X,L) = \rho(X) \neq 0 & \forall X \in \mathcal{K} \\ \text{ii)} & A\,B(X,L) = \omega(X) & \forall X \in \mathcal{K} \end{cases}$$

$$(3\text{-}17) \qquad A\,B(Z,X)\,\rho(W) + S(X,W)\,\rho(Z) - S(Z,W)\,\rho(X) = 0$$

Proposición 6. *Si* $\exists\, L \in \mathcal{K}$ *tal que satisface las condiciones (3-16) i) y ii) entonces la parte antisimétrica* $A\,B$ *del tensor de recurrencia es nula o descomponible, respectivamente (3-18) a) o (3-18) b) se verifican.*

$$(3\text{-}18) \quad \begin{cases} \text{a)} & S(Z,V) = 0\,, & \forall Z \in \mathcal{K} \\ \text{b)} & S(Z,V) = \rho(V) \neq 0\,, & \forall Z \in \mathcal{K} \end{cases}$$

Consideremos ahora este último caso. $\exists\, L \in \mathcal{K}$

$$(3\text{-}19) \quad \begin{cases} \text{a)} & S(Z,L) = \rho(Z) \neq 0\,, & \forall Z \in \mathcal{K} \\ \text{b)} & A\,B(Z,L) = \omega(Z) \neq 0\,, & \forall Z \in \mathcal{K} \end{cases}$$

Proposición 7. *Si* $\exists$ L $\in \mathcal{K}$ *que satisface (3-19) i) y ii) y además* $S(X, V) = 0$, $\forall X \in \mathcal{K}$*(o* $S(X, V) \neq 0, \forall X \in \mathcal{K}$*) entonces* $A\,B = 0$ *(o* $A\,B = \chi \cdot \sigma \wedge \rho$*; en donde* σ, ρ *son 1-formas).*

Supongamos que V_n es una variedad afín recurrente de segundo orden,

$$(3\text{-}20) \qquad (\nabla^2 R)(X, Y, Z{:}V{:}W) = R(X, Y, Z) \cdot B(V, W)$$

a partir de la definición del tensor de Ricci (1-7) y de la curvatura escalar, se obtiene,

$$(\nabla^2 S)(X, Y{:}V{:}W) = S(X, Y) \cdot B(V, W)$$

$$(\nabla^2 R)({:}V{:}W) = R \cdot B(V, W)$$

Supongamos que $\exists$ L $\in \mathcal{K}$ | L es un r-campo vectorial, es decir

$$\nabla_X L = L \cdot \alpha(X), \qquad \forall X \in \mathcal{K}$$

en donde α es una 1-forma no-nula.

La derivada segunda

$$(\nabla^2 L)({:}V{:}W) = L \cdot (\alpha(W) \cdot \alpha(V) + \nabla \alpha (V{:}\,W))$$

par antisimetrización

$$A(\nabla^2 L)({:}V{:}W) = L \cdot A(\nabla\alpha)(V{:}\,W)$$

Ahora bien el commutador de las derivadas covariantes segundas

$$(3\text{-}21) \qquad A(\nabla^2 L)({:}V{:}\,W) = R(W, V, L) \quad \nabla_{T(W,\,V)} L$$

con $\nabla_{T(W,\,V)} L = 0$ para las variedades con conexión simétrica.

Proposición 8. *Si sobre una variedad afín con conexión simétrica* $\exists$ L $\in \mathcal{K}$ *que es una r-campo vectorial, y* α *la 1-forma de recurrencia entonces:*

$$R(W, V, L) = L \cdot A(\nabla\alpha)(V{:}\,W), \qquad \forall V, W \in \mathcal{K}$$

Supongamos que S sea descomponible en el producto tensorial de dos 1-formas

(3-22) $\quad S = \mu \otimes \gamma \quad$ en donde $\quad \mu, \gamma\, \mathcal{K}^*$.

Con las condiciones mencionadas precedentemente se resumen:

$$
\text{(3-33)} \quad
\begin{array}{rl}
\text{i)} & (\nabla^2 R)(:V:W) = R \cdot B(V \cdot W) \\
\text{ii)} & (\nabla L)\ (:V) = L \cdot \alpha(V) \\
\text{iii)} & S = \mu \otimes \gamma
\end{array}
$$

Para este caso podemos formular el teorema siguiente:

Teorema 4. Si V_n *es una variedad afín que satisface las condiciones*

$$
\begin{array}{rl}
\textit{i)} & A\Gamma = 0 \\
\textit{ii)} & \nabla^2 R = R \otimes B \\
\textit{iii)} & \exists\, L \in \mathcal{K} \mid \nabla_X L = \alpha(X) \cdot L \\
\textit{iv)} & S = \mu \otimes \gamma \\
\textit{v)} & \mu(L) \neq 0 \qquad (\text{o } \gamma(L) \neq 0)
\end{array}
$$

entonces $A\,B(V, W) = 0 \qquad \forall\, V, W \in \mathcal{K}$.

Demostración. Fue dada en [21], y la omitimos aquí.

Corolario 4. *Si* $L \in \mathcal{K}$ *es paralelo* $\nabla_X L = 0$ (*equivalente a* $\alpha = 0$) *entonces* $A\,B(V, W) = 0\ \forall\, V, W \in \mathcal{K}$.

Corolario 5. *Si* $\mu(L) \neq 0$ *y* $\gamma(L) \neq 0$ *entonces* $\alpha = d\theta,\ \theta \in F(V_n)$.

4. r^m-CAMPOS TENSORIALES.

Existen analogías entre los r^m-campos vectoriales, estudiados en [16] y los r^m-campos tensoriales que estudiamoa a continuación.

Definición 1. *Un* r^m*-campo tensorial* $K \in \mathfrak{I}^s_r$ *satisface*

$$(\nabla^m K)(X, Y, \ldots, Z) = \rho(V_1, \ldots, V_m) \cdot K(X, Y, \ldots, Z)$$

$$\forall X, Y, \ldots, Z, \quad V_i \in \mathcal{K}, \quad \textit{y donde} \quad \rho \in \mathfrak{J}_m^o$$

Sea K' $\in \mathfrak{J}_s^r$ un campo tensorial de tipo (r, s). En el caso de las variedades métricas, del cual es cuestión presentemente, y teniendo cuenta del isomorfismo definido en la sección 1, al campo tensorial K', le podemos asociar un campo tensorial K $\in \mathfrak{J}_{r+s}^o$ de tipo (r + s, 0).

Supongamos que K sea un r^m-campo tensorial, es decir, según la definición 1, debe satisfacer la relación.

$$(4\text{-}1) \qquad \nabla^m K = K \otimes \rho \quad \text{en donde} \quad \rho \in \mathfrak{J}_m^o$$

Consideremos primero el caso m = 1, es decir:

$$(4\text{-}2) \qquad \nabla K = K \otimes a \quad \text{en donde} \quad a \in \mathcal{K}^*.$$

Sabemos que verifica también la relación:

$$(4\text{-}3) \qquad \nabla^2 K = K \otimes B$$

en donde $b \in \mathfrak{J}_2^o$, y viene dado por $b = \nabla a + a \otimes a$.

Teniendo cuenta de la identidad de Ricci [14], que puede escribirse:

$$(4\text{-}4) \qquad A(\nabla^2)(K)(X_1, \ldots, X_s{:}V{:}W) = \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \ldots, R(W, V, X_i), \ldots, X_s)$$

y de la identidad de Bianchi [1],

$$P_{X,Y,Z}// \; R(X, Y, Z) = 0$$

en donde $P_{XYZ}//$ indica permutación circular sobre los índices X, Y, Z y suma, se deduce

$$P_{W,V,X_i}// \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \ldots, R(W, V, X_i), \ldots X_s) = 0$$

y de esta última relación y de (4-4), se obtiene:

$$P_{W,V,X_i}// \; A(\nabla^2)(K)(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_s{:}V{:}W) = 0$$

y que con (4-3) nos permite formular el teorema siguiente.

Teorema 5. *Si* K *es un* r*-campo tensorial sobre una variedad diferenciable métrica, con covector de recurrencia* a, *y tensor de 2-recurrencia* $b = \nabla a + a \otimes a$ *entonces verifica la relación:*

$$(4\text{-}5) \qquad P_{W,V,X_i} // K(X_1, \ldots, X_i, \ldots X_s) \cdot A\, b(V,W) = 0$$

El Lema 2 de Walker [12], a partir del cual se obtiene la anulación de la parte antisimétrica del tensor de recurrencia para las variedades recurrentes, (Teorema de Roter [13]), es un caso particular de este último teorema.

En particular si $K \in \mathcal{K}^*$ es un campo vectorial, la ecuación (4-5) se transforma

$$(4\text{-}6) \qquad P_{W,V,X} // K(X) \cdot A\, b(V,W) = 0$$

y se obtiene el corolario.

Corolario 6. *Si* $K(X) \neq 0$ *sobre* $\Omega \subset Mn$ *y satisface la relación (4-6) entonces* $A B(V,W) = 0 \quad \forall V, W \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Sea $K \in \Lambda^{2*}(Mn) \vee \Lambda^{2*}(Mn)$, es decir K tiene las simétricas:

$$\begin{aligned} &\text{i)} && K(X,Y,Z,T) = -K(Y,X,Z,T) \\ &\text{ii)} && K(X,Y,Z,T) = -K(X,Y,T,Z) \\ &\text{iii)} && K(X,Y,Z,T) = K(T,Z,X,Y) \end{aligned}$$

y además verifica la relación:

$$(4\text{-}7) \qquad K(X,Y,Z,R(T,V,W)) + K(R(Z,X,Y),T,V,W) = 0$$

La relación (4-4) puede desarrollarse

$$\begin{aligned} A(\nabla^2)(K)(X,Y,Z,T{:}V{:}W) &= K(R(W,V,X),Y,Z,T) \\ &+ K(X,R(W,V,Y),Z,T) \\ &+ K(X,Y,R(W,V,Z),T) \\ &+ K(X,Y,Z,R(W,V,T)) \end{aligned}$$

De la relación (4-7) se obtiene fácilmente

$$
\begin{aligned}
(4\text{-}8) \qquad & \mathcal{A}(\nabla^2)(K)(X, Y, Z, T{:}V{:}W) \\
& + \mathcal{A}(\nabla^2)(K)(V, W, X, Y{:}Z{:}T) \\
& + \mathcal{A}(\nabla^2)(K)(Z, T, V, W{:}X{:}Y) = 0
\end{aligned}
$$

$$\forall X, Y, Z, T, V, W \in \mathcal{X}(Mn).$$

Teniendo cuenta del isomorfismo

$$\mathcal{A}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}) \approx \Lambda_n^{2*}$$

en particular al campo tensorial $\mathcal{A}(\nabla^2)(K)$ le corresponde.

$$\mathcal{A}(\nabla^2)(K)(X, Y, Z, T{:}V{:}W) \longrightarrow Q(A, B, C)$$

en donde $A, B, C \in \Lambda_n^{2*}$.

La ecuación (4-8) puede escribirse en la forma siguiente

$$(4\text{-}9) \qquad P_{A,\,B,\,C} /\!/ \, Q(A, B, C) = 0 \qquad\qquad \forall A, B, C \in \Lambda_n^{*2}.$$

Resumiendo en la proposición:

Proposición 9. *Si* $K \in \Lambda^{2*}(Mn) \vee \Lambda^{2*}(Mn)$ *y verifica la relación (4-7), entonces el tensor* $\mathcal{A}(\nabla^2)$ (K) *o su isomorfo* $Q \in \overset{3}{\otimes} \Lambda^{*2}$ (Mn) *verifica la relación (4-9).*

Corolario 7. *Si* K *es un* r^2*-campo tensorial no nulo,* $\nabla^2 K = K \otimes b$, $K \neq 0$, *entonces* $\mathcal{A}\, b = 0$.

Corolario 8. *Si* K *es un* r*-campo tensorial no nulo,* $\nabla K = K \otimes A$, $K \neq 0$, *entonces* $A = d\theta$ *en donde* $\theta \in F(Mn)$.

Demostración. Sigue inmediatamente del hecho que $B = \nabla A + A \otimes A$ y que del corolario 7, se deduce $\mathcal{A} B = 0$, es decir $\mathcal{A}\ \nabla A = 0$.

Proposición 10. *Si* $K \in \mathcal{J}_r^s$ *es un* r*-campo tensorial,* $\nabla K = K \otimes a$ *tal que la 1-forma de recurrencia sea exacta,* $a = d\theta$, $\theta \in F(Mn)$, *entonces existe un campo tensorial* Q *colineal con* K, $Q = \phi \cdot K$ *tal que* Q *es paralelo,* $\nabla Q = 0$, *y* ϕ *viene dada por* $\theta = -\ln \phi$.

Demostración. De la definición de Q

$$\nabla Q = \phi \cdot \nabla K + \nabla \phi \otimes K$$
$$= K \otimes (\phi \cdot a + \nabla \phi)$$

si debe ser paralelo entonces $a = - d\,\ell n\, \phi$.

Proposición 11. *Si* Q *es un* r-*campo tensorial especial, paralelo; entonces todo campo colineal* $K = \lambda Q$, $\lambda \in F(Mn)$, *es un* r-*campo tensorial, con 1-forma de recurrencia exacta e igual a* $a = d\,\ell n\,\lambda$.

Demostración.

· De la definición de K

$$K = \lambda Q$$

se deduce por diferenciación covariante

$$\nabla K = \nabla \lambda \otimes Q$$
$$= \frac{\nabla \lambda}{\lambda} \otimes \lambda Q$$
$$= d\,\ell n\,\lambda \otimes K$$

es decir $K = K \otimes a$, en donde $a = d\,\ell n\,\lambda$.

Corolario 9. *Si* Q *es un* r-*campo vectorial, especial, paralelo; entonces todo campo vectorial* $K = \lambda \cdot Q$, en donde $\lambda \in F(Mn)$ *es un* r-*campo vectorial con 1-forma de recurrencia exacta* $a = d\,\ell n\,\lambda$. *y además es un* a-*campo vectorial cuando* $\nabla \lambda = \lambda^2 \cdot Q$.

Demostración. La segunda parte del corolario puede obtenerse immediatamente del hecho que para ser un a-campo vectorial debe satisfacer

$$\nabla K = K \otimes K$$

en donde $K \in \mathcal{K}^*$. Es decir $K = d\,\ell n\,\lambda$ o todavía $\lambda Q = d\,\ell n\,\lambda$.

Teorema 6. Si

i) $K \in \mathfrak{J}^s_r$

ii) $\nabla^{m-1} K = K \otimes \rho, \quad \rho \in \mathfrak{J}^o_{m-1}$

iii) $C_1 \ldots C_{m-1} (\rho \otimes \sigma) \neq 0$ en $\Omega \subset Mn$

$\sigma \in \mathfrak{J}^o_{m-1}$

iv) $\nabla^m K = K \otimes \mu$

entonces K *es un* r*-campo tensorial es decir* $\nabla K = K \otimes \alpha$.

Demostración.

De la hipótesis

$$\nabla^{m-1} K = K \otimes \rho$$

$$\nabla^m K = K \otimes \mu$$

La derivada covariante de la primera ecuación es:

$$\nabla (\nabla^{m-1} K) = \nabla K \otimes t + K \otimes \nabla t$$

que debe ser igual a la segunda ecuación. Después de la contracción con σ obtenenemos:

$$K \otimes C_1 \cdots C_{m-1} (\mu \otimes \sigma) = \nabla K \cdot C_1 \cdots C_{m-1} (\rho \otimes \sigma) + K \otimes C_1 \cdots C_{m-1} (\nabla \rho \otimes \sigma)$$

y poniendo

$$\alpha = (C_1 \cdots C_{m-1} (\rho \otimes \sigma))^{-1} \cdot C_1 \cdots C_{m-1} (\mu \otimes \sigma - \nabla \rho \otimes \sigma)$$

se obtiene el teorema 6.

Corolario 10. Si K *es un* r^{m-1}*-campo tensorial con* $C_1 \ldots C_{m-1} (\rho \otimes \sigma) \neq 0$ *en* $\Omega \subset Mn$ *y verifica* $\nabla^m K = 0$, *entonces es un* r*-campo tensorial y la 1-forma de recurrencia viene dada por:*

$$\alpha = (C_1 \ldots C_{m-1} (\rho \otimes \sigma))^{-1} \cdot C_1 \ldots C_{m-1} (\nabla\rho \otimes \sigma)$$

Corolario 11. Si K *verifica las condiciones del teorema 6 y además el tensor de recurrencia satisface* $\nabla \rho = -\alpha \otimes \rho$, *es decir es un* r*-campo tensorial entonces* $\nabla K = 0$, *es paralelo. (Caso particular de* r*-campo tensorial).*

Demostración. Puede obtenerse fácilmente en las etapas siguientes.

$$\nabla^{m-1} K = K \otimes \rho$$

$$\nabla \rho = -\alpha \otimes \rho$$

$$\nabla^m K = \nabla K \otimes \rho + K \otimes \nabla \rho$$

$$= (\nabla K - \alpha \otimes K) \otimes \rho$$

y el teorema 6 se aplica inmediatamente.

Corolario 12. Si K *satisface las condiciones i), ii), iii) y iv) del teorema 6 y además:*

$$iv) \quad C_1 \ldots C_{m-1} (\nabla\rho \otimes \rho) = C_1 \ldots C_{m-1} (\rho \otimes \sigma)$$

entonces $\nabla K = 0$, *es paralelo.*

Proposición 12. Si K *es un campo tensorial que verifica*

$$i) \quad \nabla K = K \otimes a$$

$$ii) \quad \nabla^2 K = 0$$

entonces $\nabla a = -\, a \otimes a$ (auto-recurrente).

Demostración.

Calculemos

$$\nabla (\nabla K) = K \otimes (\nabla a + a \otimes a)$$

la condición de ser 2-paralelo implica

$$\nabla a + a \otimes a = 0$$

lo que prueba la proposición.

5. r- Y r^2-VARIEDADES RIEMANNIANAS Y COMPACTAS.

Toda variedad métrica es un espacio topológico de Haussdorff, normal y paracompacto. Toda variedad compacta es paracompacta [17], pero no todas las variedades métricas son compactas. Lichnerowicz [18] estudia la propiedad de recurrencia en las variedades riemannianas compactas de métrica definida positiva (propiamente riemannianas).

Basándose sobre la teoría de los operadores elípticos, estudia, siguiendo el método de Cartan [2] para las variedades simétricas, casos especiales de las r-variedades, las r-variedades riemannianas compactas.

Los resultados preliminares que nos interesan para nuestra discusión, pueden resumirse en las proposiciones siguientes, las demostraciones se encuentran en [18] y son así omitidas.

Proposición. En toda variedad compacta la anulación de una derivada covariante de cualquier orden, implica la anulación de la derivada primera. Es decir si $K \in \mathfrak{J}^r_s$ *entonces*

$$\nabla^m k = 0 \Longrightarrow \nabla k = 0$$

Proposición. La condición necesaria y suficiente para que una variedad riemanniana compacta sea simétrica es que se satisfagan las relaciones siguientes:

$$i)\quad H(X, Y, Z, T, V, W) = 0$$

$$ii)\quad \nabla S(X, Y: V) = 0$$

$\forall X, Y, Z, T, V, W \in \mathcal{K}$, *siendo* H *el campo tensorial de Cartan.*

Proposición. Toda r*-variedad riemanniana compacta con* $S(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{K}$ *es localmente euclidiena, es decir* $R(X, Y, Z, T) = 0 \quad \forall X, Y, Z, T \in \mathcal{K}$.

Proposición. Toda r^2*-variedad riemanniana compacta con* $R = 0$ *es una* r*-variedad.*

Teniendo en cuenta los resultados precedentes podemos obtener fácilmente.

Proposición 13. Toda r^2*-variedad riemanniana compacta con* $S(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathcal{K}$ *es necesariamente una* r*-variedad especial (simétrica).*

Demostración. Para toda r^2-variedad se tiene

$$A\nabla^2 R(X, Y, Z, T{:}V{:}W) \equiv H(X, Y, Z, T, V, W) = 0$$

$$\forall X, Y, Z, T, V, W \in \mathcal{K}$$

y puesto que

$$S(X, Y) = 0 \Longrightarrow \nabla S(X, Y{:}\ V) = 0 \qquad \forall X, Y, V \in \mathcal{K}$$

de los resultados precedentes se deduce la proposición.

Esta proposición 13, había sido obtenida por Lichnerowicz con un método diferente. Posteriormente fue obtenida por Wong [19], cuando el grupo de holonomia es irreducible, y con una demostración diferente.

Para toda r-variedad se deduce de la identidad de Bianchi:

(5-1) $\qquad P_{X,Y,V} \,//\, R(X, Y, Z) \cdot a(V) = 0$

Particularizando $Z = \tau^{-1}$ a se obtiene:

(5-2) $\qquad R(\tau^{-1} a, V, X, Y) + a(Y) \cdot S(V, X) - a(X) \cdot S(V, Y) = 0$

si $S(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathcal{K}$ se obtiene:

(5-3) $\qquad R(\tau^{-1} a, V, X, Y) = 0, \qquad \forall V, X, Y \in \mathcal{K}$

escrito de otra forma:

(5-4) $\qquad R(X, Y)\, \tau^{-1} a = 0$

siendo $R(X, Y)$ el campo curvatura de la variedad, definido en (1-4).

Podemos entonces darle la interpretación siguiente.

En cada punto $p \in V_n$, $R(X_p, Y_p) \in \mathrm{End}\,(T_p(V_n))$, es una transformación lineal. De (2-4) se deduce entonres:

$$(\tau^{-1} a)_p \in \mathrm{Ker}\, R(X_p, Y_p)$$

El álgebra de Lie del grupo de holonomia está engendrado por el conjunto de todos los endomorfismos dados por

$$R(X_p, Y_p), \qquad \forall X_p, Y_p \in T_p(V_n).$$

Es decir $\tau_1 a$ es invariante por el grupo de holonomia y por consiguiente $\tau^{-1} a = 0$ cuando es irreducible. Si R se anula en $p \in V_n$, como es arbitrario, se anula sobre V_n.

Proposición 14. *Toda* r*-variedad riemanniana compacta con* $S(X, Y) \neq 0$, $\forall X, Y \in \mathcal{K}$ *y* $\nabla S(X, Y: V) = 0$, $\forall X, Y, V \in \mathcal{K}$ *es simétrica.*

Demostración. Para toda r-variedad se verifica:

$$H(X, Y, Z, T, V, W) = 0, \qquad \forall X, Y, Z, T, V, W \in \mathcal{K}$$

puesto que $a = d\theta$, $\theta \in F(V_n)$. De las proposiciones de Lichnerowicz sigue entonces esta.

Proposición 15. *Toda* r*-variedad con métrica definida positiva verifica:*

$$R^2 = \sum_{a,b,c,d}^{1,n} \sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot g(\tau X_\rho, \tau X_c) \cdot$$
$$\cdot\, g(\tau X_\sigma, \tau X_d) \cdot R(X_\alpha, X_\beta, X_\rho, X_\sigma) \cdot R(X_a, X_b, X_c, X_d)$$
$$\equiv < R \mid R >$$

Demostración. De la condición de recurrencia

$$\nabla R(X, Y, Z, T: V) = R(X, Y, Z, T) \cdot a\,(V)$$

se deduce:

$$a(V) = \sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma}^{1,n} \sum_{a,b,c,d}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot g(\tau X_\rho, \tau X_c) \cdot$$

$$\cdot g(\tau X_\sigma, \tau X_d) \cdot R(X_\alpha, X_\beta, X_\rho, X_\sigma : V) \cdot R(X_a, X_b, X_c, X_d)$$

$$/ \sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma}^{1,n} \sum_{a,b,c,d}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot g(\tau X_\rho, \tau X_c) \cdot$$

$$\cdot g(\tau X_\sigma, \tau X_d) \cdot R(X_\alpha, X_\beta, X_\rho, X_\sigma) \cdot R(X_a, X_b, X_c, X_d).$$

e igualmente por contracción:

$$\alpha(V) = \frac{1}{2} R(: V)/R$$

de estas dos últimas relaciones se obtienen:

$$2\, d\, \ell n\, R = d\, \ell n \Big(\sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma}^{1,n} \sum_{a,b,c,d}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot$$

$$\cdot g(X_\rho, X_c) \cdot g(X_\sigma, X_x) \cdot R(X_\alpha, X_\beta, X_\rho, X_\sigma) \cdot$$

$$\cdot R(X_a, X_b, X_c, X_d) \Big)$$

de la cual se obtiene la proposición. Este resultado fue obtenido por Lichnerowich [18] con la hipótesis de ser la variedad compacta y de métrica definida positiva y posteriormente por Roter [20] aunque de una forma diferente. Aquí ninguna de estas dos suposiciones es retenida. Sin embargo $R \neq 0$.

Proposición 16. *Para toda* r*-variedad de métrica definida positiva compacta, si el tensor de Ricci es nulo, la variedad es plana.*

Demostración. Se obtiene immediatamente de los resutlados de Lichnerowicz y del hecho que:

$$\nabla R = R \otimes a \Longrightarrow \nabla^2 R = R \otimes B$$

siendo B = a + a a. Toda r^2-variedad verifica siempre H = 0.

Puesto, que S = 0 $\Longrightarrow$ $R = 0$. La variedad es plana y por consiguiente siempre simétrica.

Proposición 17. Toda r*-variedad con métrica definida positiva y $R = 0$ es localmente plana.*

Demostración. Se obtiene immediatamente de la proposición 15.

Roter [20] obtiene de nuevo algunos resultados de Lichnerowicz sin la condición de compacidad para la variedad. Remarcamos en particular, los siguientes.

Proposición. Toda r*-variedad con métrica definida positiva verifica:*

$$\begin{aligned} R^2 &= 2 \sum_{\alpha,\beta}^{1,n} \sum_{a,b}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot S(X_\alpha, X_\beta) \cdot S(X_a, X_b) \\ &= 2 < S \mid S > \end{aligned}$$

Lema 1. Toda r*-variedad verifica la relación*

$$R(\tau^{-1} a, Y, Z, T) = a(T) \cdot S(Y, Z) - a(Z) \cdot S(Y, T) \qquad \forall Y, Z, T \in \mathcal{K}$$

Demostración: De

$$P_{Z,T,V} \,//\, R(X, Y, Z, T; V) = 0$$

se deduce para una r-variedad:

$$P_{Z,T,V} \,//\, a(V) \cdot R(X, Y, Z, T) = 0$$

y por contracción en V y X se obtiene el Lema 1.

Lema 2. Toda r*-variedad satisface la relación:*

$$S(\tau^{-1} a, X) = \frac{1}{2} a(X) \cdot R$$

Demostración: Se obtiene inmediatamente del Lema 1, por contracción en Y y Z.

Lema 3. Toda r*-variedad satisface la relación:*

$$(5\text{-}5) \qquad <\nabla R \mid \nabla R> = \sum_{\alpha,\beta,\rho}^{1,n} \sum_{a,b,c}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot$$
$$\cdot\, g(\tau X_\rho, \tau X_c) \cdot R(\tau^{-1} a, X_\alpha, X_\beta, X_\rho) \cdot$$
$$\cdot\, R(a, \tau X_a, \tau X_b, \tau X_c)$$

Demostración: De la identidad de Bianchi (5-1) se obtiene:

$$R(X, Y, Z, T: V) = - a(T) \cdot R(X, Y, V, Z)$$
$$- a(Z) \cdot R(X, Y, T, V)$$

Si hacemos la contracción

$$<\nabla R \mid \nabla R> = - < a(T) \cdot R(X, Y, V, Z) \mid \nabla R >$$
$$- < a(Z) \cdot R(X, Y, T, V) \mid \nabla R >$$

puesto que $\nabla R = R \otimes a$, se obtiene:

$$<\nabla R \mid \nabla R> = 2 < R(\tau^{-1} a, X, Y, Z) \mid \tau R(a, \tau X, \tau Y, \tau Z)>$$

y esta última expresión es una forma diferente de escribir (5-5). Los que prueba el Lema.

Teorema 7. *Para toda* ɪ*-variedad diferenciable se verifica la relación:*

$$[< R \mid R > - 4 < S \mid > + R^2] \cdot g(\tau^{-1} a, \tau^{-1} a) = 0$$

donde convenimos:

$$< R \mid R > \equiv \sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma}^{1,n} \sum_{a,b,c,d}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot$$
$$\cdot\, g(\tau X_\rho, \tau X_c) \cdot g(\tau X_\sigma, \tau X_d) \cdot$$
$$\cdot\, R(R_\alpha, X_\beta, X_\rho, X_\sigma) \cdot R(X_a, X_b, X_c, X_d)$$

$$< S \mid S > = \sum_{\alpha,\beta}^{1,n} \sum_{a,b}^{1,n} g(\tau X_\alpha, \tau X_a) \cdot g(\tau X_\beta, \tau X_b) \cdot$$
$$\cdot\, S(X_\alpha, X_a) \cdot S(X_\beta, X_b)$$

Demostración. La demostración del teorema 7, se hace con los tres lemas dados.

Puesto que

$$<\nabla R \mid \nabla R> \;=\; <R \mid R> \cdot g(\tau^{-1} a, \tau^{-1} a)$$

con el lema 3, tenemos

$$<R \mid R> \cdot g(\tau^{-1} a, \tau^{-1} a) = 2 \cdot <R(\tau^{-1} a, X, Y, Z) \mid \tau R(a, \tau X, \tau Y, \tau Z)>$$

y del Lema 1, las dos expresiones del segundo miembro pueden reemplazarse, obteniendo:

$$(<R \mid R> - 4 <S \mid S>)\, g(\tau^{-1} a, \tau^{-1} a) = 4 \cdot S(\tau^{-1} a, X) \mid \tau S(a, \tau X)>$$

y con el Lema 2 aplicado al segundo miembro obtenemos finalmente el teorema 7.

Del teorema 7, se deduce como corolario.

Corolario 13. Para toda r*-variedad propiamente riemanniana* (a(X) $\neq$ 0), *se verifica la relación:*

$$<R \mid R> - 4 <S \mid S> + R^2 = 0$$

Si g $(\tau^{-1} a, \tau^{-1} a) = 0$, por ser la r-variedad de métrica definido positiva, implicaría a(X) = 0, $\forall X \in \mathcal{K}$, es decir la variedad sería simétrica.

Corolario 15. Para toda r*-variedad propiamente riemanniana* S(X, Y) = 0 $\forall$ X, Y $\in \mathcal{K}$, *la variedad es plana.*

Este último corolario 14 fue obtenido también por Lichnerowicz.

Corolario 14. Para toda r*-variedad propiamente riemanniana si* $R = 0$, *la variedad es plana.*

Demostración. De la proposición de Roter se deduce que si

$$R = 0 \Longrightarrow <S \mid S> = 0$$

lo que implica $<R \mid R> = 0$.

Lichnerowicz obtiene que toda r^2-variedad compacta riemanniana con $R = 0$ es una r-variedad.

Teorema 8. Toda r^2 *-variedad propiamente riemanniana con* $R = 0$ *es plana.*

Teorema 9. Toda r*-variedad propiamente riemanniana es plana si una de las condiciones siguientes es cierta:*

i) $R = 0$

ii) $S(X,Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}$

iii) $R(\tau^{-1} a, Y, Z, T) = 0, \forall Y, Z, T \in \mathcal{K}$

iv) $S(X,Y) = \kappa \cdot \omega(X) \cdot \omega(Y)$

Demostración: Las dos primeras condiciones son respectivamente la de las proposiciones 16 y 17.

Las dos últimas condiciones son equivalentes, como se deduce del Lema 1.

$$R(\tau^{-1} a, Y, Z, T) = 0 \Longleftrightarrow S(X, Y) = \kappa \cdot \omega(X) \cdot \omega(Y)$$

La condición iii) implica, para las métricas definidas positivas, que una u otra de las siguientes condiciones debe ser cierta.

a) $a(X) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{K}$

b) $R(Y, Z, T) = 0, \quad \forall Y, Z, T \in \mathcal{K}$

Si suponemos a) cierta, esto implica b), que es lo que tratábamos de demostrar.
Podemos resumir estos resultados con el teorema:

Teorema 10. Toda r- *o* r^2 *-variedad propiamente riemanniana* $(a \neq 0, B \neq 0)$ *y no plana* $(R \neq 0)$ *tiene el tensor de Ricci no-nulo e indescomponible y la curvatura escalar no nula.*

Las derivadas covariantes del tensor de Ricci y de la curvatura escalar no se anulan.

REFERENCES

[1] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.; "Foundations of differential geometry", Interscience Pub., N. Y., 1963.

[2] CARTAN, E.; "Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann I", Bull. Soc. Math. France, 54, 1926, 214-264.

[3] COPSON, E. T. and RUSE, H. S.; "Harmonic Riemannian Spaces", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A, 60, 1939-40, 117-133.

[4] WALKER, A. G. "Note on a Distance Invariant and the Calculations of Ruse's Invariant". Proc. Edinburgh Math. Soc., 7, 1942, 16-26.

[5] RUSE, H. S. "The Riemann Tensor in a Completely Harmonic V_4". Proc. Roy. Soc. Edinb., A, 62, 1944-45, 156-163.

[6] WALKER, A. G. "A Particular Harmonic Riemannian Space" J. Lond. Math. Soc., 20. 1945, 93-99.

[7] LICHNEROWICZ, A.; "Sur les espaces Riemanniens Complètement Harmoniques", Bull. Soc. Math. France, 72, 1944, 146-168.

[8] SÓLER, F.; "Sur les variétés récurrentes conformément planes", C.R. Acad. Sc. Paris, A, 277, 601-603.

[9] RUSE, H. S. "On Simple Harmonic Spaces". J. Lond. Math. Soc., 21, 1946, 243-247.

[10] SÓLER, F. "Sur un théorème de Lichnerowicz concernant les variétés complètement harmoniques" (aceptado: C. R. Ac. Sc. Paris).

[11] WONG, Y.-C.; "Linear connexions with zero torsion and recurrent curvature", Trans. Amer. Math. Soc., 102, 1962, 471-506.

[12] WALKER, A. G.; "On Ruse's spaces of recurrent curvautre", Proc. Long. Math. Soc., 2, 52, 1950, 36-64.

[13] ROTER, W.; "Some remarks on second order recurrent spaces", Bull. Acad. Pol. Sc. Serie Math., 12, 4, 1964, 207-211.

[14] EISENHART. L. P., "Riemannian Geometry". Princeton Univ. Press. Princeton, 1966.

[15] SÓLER, F.; "δ-dérivations d'algèbres", Publ. Math., 20, 3-4, 1973, 207-214.

[16] SÓLER. F.; "r-Vector Fields on Metric Manifolds", Ann. Math. pura e. app., 4, 119, 1979, 1-8.

[17] CHOQUET-BRUHAT, Y. "Géométrie différentielle et systèmes extérieurs". Dunod, Paris, 1968.

[18] LICHNEROWICZ, A. "Courbure, Nombres de Betti et Espaces Symétriques". Proc. of the Int. Cong. of Math., 2, 1952, 216-223.

[19] WONG, Y.-C. "Recurrent tensor on a linearly connected differentiable manifold". Trans. Am. Math. Soc. 99, 1961, 325-341.

[20] ROTER, W. "Quelques remarques sur les espaces recurrents et Ricci-recurrents". Bull. Acad. Sc. Pol. Math, X, 10, 1962, 533-536.

[21] SÓLER, F.; "r2-variétés à connexion affine" Act. Math. 1977, 5-8.