CO-H-GRUPOS: OBSTRUCCION A LA CONMUTATIVIDAD Y APLICACIONES CENTRALES

por

J. L. NAVARRO

ABSTRACT.

The generalized Hilton-Hopf invariant

$$\omega(\ \ ;\mu_1,\mu_2):[X_1,X_2]\to[X_1,X_2\ \#X_2]$$

is a homomorphism of abelian groups, but it is not a homomorphism of groups. However

$$\omega(f+g;\mu_1,\mu_2)=\omega(f;\mu_1,\ \mu_2)+\omega(g\ ;\ \mu_1,\mu_2)$$

holds if f (ór g) is a central map, i.e. $(1\ \#f)\,C(\mu_1)=0$ in $[X_1,X_1\ \#X_2]$ where $C(\mu_1)$ is an obstruction for μ_1 to be homotopy commutative. The homological sections of a co-H-groups are co-H-groups and the involved maps are primitive. If X is finite and $\Pi_{n-i}(H_n\ (X);Y)$ is finitely generated for every n, then [X, Y] is a finitely generated nilpotent group. All spaces are assumed to ha ve the homotopy type of CW-complexes with base-point.

Sea

$$\epsilon: S\,\Omega\,X\to X,\quad \epsilon\,[t,\omega]=\omega\,(t)$$

la aplicación evaluación, un espacio X admite una comultiplicación si y solo si ϵ admite una corretracción

$$\gamma: X\to S\,\Omega\,X,\quad \epsilon\,\gamma\simeq 1$$

Por (1.1) de [3] existe una correspondencia biunivoca entre el conjunto de co-H-estructuras sobre X y el conjunto de clases de homotopía de corretracciones para ϵ. La comultiplicación asociada a una corretracción γ viene dada por $\mu = (\epsilon \vee \epsilon)\, \sigma\, \gamma$ donde σ es la comultiplicación suspensión sobre $S\,\Omega\, X$. Además μ induce estructura de co-H-grupo en X si y solo si γ es (μ, σ)-primitiva, es decir, $(\gamma \vee \gamma)\, \mu \simeq \sigma\, \gamma$ En tal caso $\eta = \epsilon\, \nu\, \gamma$ es una inversa homotópica para μ, donde $\nu\, [t, \omega] = [1 - t, \omega]$ es la inversa homotópica para σ. Se observa que si X admite una comultiplicación μ tal que ϵ es (σ, μ)-primitiva, entonces $X \simeq S\,\Omega\, X$, ya que $(\epsilon \vee \epsilon)\, \sigma$ induce monomorfismos, si $(\epsilon \vee \epsilon)\, \sigma = \mu\, \epsilon = (\epsilon \vee \epsilon)\, \sigma\, \gamma\, \epsilon$ entonces $\gamma\, \epsilon \simeq 1$.

Si $\tau : X \vee X \to X \vee X$ viene dada por $\tau(x, *) = (*, x)$, $\tau(*, x) = (x, *)$ para todo $x \in X$, se dice que μ es homotopicamente conmutativa si $\mu \simeq \tau\mu$. Por simplicidad de notación no distinguremos entre aplicaciones y sus clases de homotopía.

1. APLICACIONES CENTRALES Y OBSTRUCCION A PRIMITIVIDAD.

Si (X_1, μ_1) es un co-H-grupo y $Y_1 \# Y_2$ denota la fibra homotópica de la inclusión $Y_1 \vee Y_2 \subset Y_1 \times Y_2$, por (2.3) de [4] se tiene una sucesión exacta de grupos

$$0 \to [X_1, Y_1 \# Y_2] \xrightarrow{k_*} [X_1, Y_1 \vee Y_2] \xrightarrow{j_*} [X_1, Y_1 \times Y_2] \to 0$$

y si además (X_2, μ_2) es un co-H-espacio y $f: X_1 \to X_2$ una aplicación, haciendo $Y_1 = Y_2 = X_2$ en la sucesión exacta, se tiene $j\,(\mu_2\, f - (f \vee f)\, \mu_1) = 0$ y existirá un elemento en $[X_1, X_2 \# X_2]$, $\omega\,(f; \mu_1, \mu_2)$ univocamente determinado por

$$k\, \omega\,(f; \mu_1, \mu_2) = \mu_2\, f - (f \vee f)\, \mu_1$$

que mide la obstrucción a que f sea (μ_1, μ_2)-primitiva.

Queda inducida una aplicación

$$\omega\,(-; \mu_1, \mu_2): [X_1, X_2] \to [X_1, X_2 \# X_2]$$

la cual generaliza el invariante clásico de Hilton-Hopf.

En (1.2) de [1], probamos que si μ_1 es homotópicamente conmutativa, entonces $\omega\,(-; \mu_1, \mu_2)$ es un homomorfismo de grupos abelianos. No obstante, la relación

$$\omega(f+g;\mu_1,\mu_2)=\omega(f;\mu_1,\mu_2)+\omega(g;\mu_1,\mu_2)$$

se satisface si f ó g están en el centro de $[X_1, X_2]$.

Para $Y_1 = Y_2 = X_1$ en la sucesión exacta, denoteremos por $\Phi_1=\mu_1 - \tau_1\mu_1$ el coconmutador de X_1 respecto a μ_1. Es claro que $j\,\Psi_1 = 0$, luego existe

$$c(\mu_1)\in[X_1, X_1 \# X_1]$$

univocamente determinado por $k\,c(\mu_1)=\Psi_1$ que miede la obstrucción a que μ_1 sea homotópicamente conmutativa.

1.1. Definición. Una aplicación $f\colon X_1 \to X_2$ se dirá central si $(1 \vee f)\,\Phi_1 = 0$ ó equivalentemente, si $(1 \# f)\,c(\mu_1)=0$.

Se observa que

$$(1 \vee f)\,\Psi_1 = (1\vee f)\,\mu_1 - (1\vee f)\,\tau_1\mu_1 = \nabla(j_1 \vee j_2)(1\vee f)\,\mu_1 -$$

$$- \nabla(j_1 \vee j_2)(1\vee f)\,\tau_1\mu_1 = j_1 + j_2 f - j_1 - j_2 f$$

es decir, el conmutador $[j_1, j_2 f]$ de j_1 y $j_2 f$ en $[X_1, X_1 \vee X_2]$.

1.2. Lema. Si $f\colon X_1 \to X_2$ es una aplicación central, entonces f está en el centro de $[X_1, X_2]$.

Demostración. Para toda aplicación $g\colon X_1 \to X_2$, se tiene

$$0=[j_1, j_2 f] = \langle j_2 g, j_2\rangle_*[j_1, j_2 f]=[j_2 g, j_2 f]=(j_2)_*[g, f]$$

luego $[g, f]=0$ ya que $(j_2)_*$ es un monomorfismo.

Como $(1 \vee g f)\,\Psi_1 = (1\vee g)(1 \vee f)\,\Phi_1$, es claro que si f es central, también lo es g f para cualquier $g\colon X_2 \to Y$. Si $[X_1, X_2]_c$ indica el subconjunto de las aplicaciones centrales de X_1 en X_2, entonces $[X_1, X_2]_c$ es un subgrupo del centro de $[X_1, X_2]$. En efecto, si $g, f \in [X_1, X_2]_c$, se tiene

$$[j_1, j_2(f+g)]=[j_1, j_2 f + j_2 g]=[j_1, j_2 f]$$

ya que j_2 g es central por serlo g, pero como f es central, $[j_1, j_2\ f] = 0$. Por tanto $f + g \in [X_1, X_2]_c$. Es obvio que $0 \in [X_1, X_2]_c$, luego

$$0 = [j_1, 0] = [j_1, j_2\ (-f + f)] = [j_1, j_2\ (-f)]$$

es decir, $-f$ es central si lo es f.

En particular, si f es central y (μ_1, μ_2)-primitiva, entonces f^* aplica $[X_2, Y]$ en el centro de $[X_1, Y]$, para todo Y. Sea $[X_1, X_2]_\omega$ el subconjunto de las aplicaciones (μ_1, μ_2)-primitivas, entonces si $g \in [X_1, X_2]_\omega$ y $f \in [X_1, X_2]_{\omega\ c}$ se sigue que $f + g \in [X_1, X_2]_\omega$.

En lo que sigue, todo co-H-espacio se supondrá 1-conexo. Toda comultiplicación sobre espacios 1-conexos induce estructura de lazo algebraico en [X, Y] para todo Y es decir, existen aplicaciones ℓ, r: $X \to X$ tales que $\ell + 1 = 0 = 1 + r$. Si μ es homotópicamente asociativa, $\ell = r$ y (X, μ) es un co-H-grupo.

*1.3. **Lema.*** Si f: $X_1 \to X_2$ es un epimorfismo homotópico (μ_1, μ_2)-primitivo y (X_1, μ_1) un co-H-grupo homotopicamente conmutativo, entonces (X_2, μ_2) también lo es.

Demostración. Probaremos en primer lugar que μ_2 es homotópicamente asociativa. En efecto

$$(\mu_2 \vee 1)\,\mu_2\ f = (f \vee f \vee f)\,(\mu_1 \vee 1)\,\mu_1 = (f \vee f \vee f)\,(1 \vee \mu_1)\,\mu_1 = (1 \vee \mu_2)\,\mu_2\ f$$

como f^* induce monomorfismos, se sigue $(\mu_2 \vee 1)\,\mu_2 = (1 \vee \mu_2)\,\mu_2$. De manera análoga,

$$\tau_2\ \mu_2\ f = \tau\,(f \vee f)\,\mu_1 = (f \vee f)\ \tau_1\ \mu_1 = (f \vee f)\,\mu_1 = \mu_2\ f$$

y por tanto $\Phi_2 = \mu_2 - \tau_2\ \mu_2 = 0$.

Si f es (μ_1, μ_2)-primitiva, el cono C_f admite una comultiplicación μ tal que la inclusión j es (μ_2, μ)- primitiva. Si Sf admite una retracción, entonces j^* es inyectiva y μ es única con esa propiedad. Se sigue de (1.3) que μ tiene las mismas propiedades que μ_2.

*1.4. **Proposición.*** Sea (X_1, μ_1) un co-H-espacio y f: $X_1 \to X_2$ un epimorfismo homotópico. Si X_2 es $(n - 1)$-conexo, $n \geqslant 2$, y $\dim X_2 \leqslant 4n - 3$, entonces X_2 es co-H-espacio.

Demostración. Como f y ϵ_1 son epimorfismos homotópicos, también lo es

$$\epsilon_1 (S\,\Omega\, f) = f\, \epsilon_1 .$$

Siendo X_2 $(n-1)$-conexo, ϵ_2 es una $(2n-1)$-equivalencia y por tanto, si

$$\dim X_2 \leqslant 2\,(2n-1)-1 = 4n-3$$

entonces ϵ_2 admite una inversa homotópica a derecha γ_2. Se sigue que

$$\mu_2 = (\epsilon_2 \vee \epsilon_2)\, \sigma_2\, \gamma_2$$

es una comultiplicación sobre X_2.

Si además (X_1, μ_1) es un co-H-grupo homotopicamente conmutativo y $\dim X_1 \leqslant 2n-2$ entonces (X_2, μ_2) también lo es. En efecto, como ϵ_2 es una $(2n-1)$-equivalencia, si $\dim X_1 \leqslant 2n-2$ entonces $[X_1, X_2 \# X_2] = 0$ pero $\omega(f; \mu_1, \mu_2) \in [X_1, X_2 \# X_2]$ es decir, f es (μ_1, μ_2)-primitiva y estamos en las condiciones de (1.4.).

1.5. ***Proposición.*** Sea (X_2, μ_2) un co-H-espacio, X_1 un espacio $(q-1)$-conexo, $q \geqslant 2$, y $f\colon X_1 \to X_2$ una $(n-1)$-equivalencia, $n \geqslant q$, entonces si

$$\dim X_1 \leqslant n+q-3$$

existe una comultiplicación μ_1 sobre X_1 univocamente determinada t.q.

$$\omega(f; \mu_1, \mu_2) = 0$$

Demostración. Sea γ_2 la corretracción asociada a ϵ_2 y W el pull-back homotópico del diagrama

$$X_2 \xrightarrow{\ \gamma\ } S\,\Omega\, X_2 \xleftarrow{\ S\,\Omega\, f\ } S\,\Omega\, X_1$$

Por (3.2.) de [3] se sigue que la composición

$$W \xrightarrow{\ \theta\ } S\,\Omega\, X_1 \xrightarrow{\ \epsilon_1\ } X_1$$

es una (n + q – 2)-equivalencia, entonces si dim $X_1 \leqslant n + q - 3$

$$(\epsilon_1\ \theta)_*: [X_1, W] \to [X_1, X_1]$$

es una biyección y por tanto existirá un único $t \in [X_1, W]$ tal que $\epsilon_1 \theta\ t = 1$. Sea $\gamma_1 = \theta\ t$ y $\mu_1 = (\epsilon_1 \vee \epsilon_1)\ \sigma_1\ \gamma_1$ la comultiplicación sobre X_1 asociada a γ_1, como

$$f = f\ \epsilon_1\ \gamma_1 = f\ \epsilon_1\ \theta\ t\ =\ \epsilon_2\ \gamma_\epsilon\ \psi\ t\ =\ \psi\ t$$

se sigue que

$$(S\,\Omega\, f)\,\gamma_1\ =\ (S\,\Omega\, f)\,\theta\ t\ =\ \gamma_2\ \psi\ t\ =\ \gamma_2\ f$$

y en consecuencia, f es (μ_1, μ_2)-primitiva.

1.6. Corolario. Si (X_2, μ_2) es un co-H-grupo homotópicamente conmutativo, en las condiciones de (1.5.) se sigue que (X_1, μ_1) también lo es.

Demostración. Si $X_1 \# X_1 \# X_1$ denota la fibra homotópica de la inclusión $X_1 \vee X_1 \vee X \subset X_1 \times X_1 \times X_1$, se tiene una sucesión exacta de lazos algebraicos.

$$0 \to [X_1, X_1 \# X_1 \# X_1] \xrightarrow{k_*} [X_1, X_1 \vee X_1 \vee X_1] \xrightarrow{j_*} [X_1, X_1 \times X_1 \times X_1] \to 0$$

y de $j\ D\ ((1 \vee \mu_1)\,\mu_1, (\mu_1 \vee 1)\,\mu_1) = 0$, se sigue que existe un elemento

$$a\,(\mu_1) \in [X_1, X_1 \# X_1 \# X_1],$$

univocamente determinado por

$$k\ a\,(\mu_1) = D\ ((1 \vee \mu_1)\,\mu_1, (\mu_1 \vee 1)\,\mu_1)$$

que mide la obstrucción a que μ_1 sea homotópicamente asociativa. Como f es (μ_1, μ_2)-primitiva,

$$0 = (f \vee f \vee f)\ k\ a\,(\mu_1) = k\ (f \# f \# f)\ a\,(\mu_1)$$

y como k_* inyectiva, se sigue

$$(f \# f \# f)\ a\,(\mu_1) = 0$$

Pero las condiciones de conectividad implican que $f \# f \# f$ es una $(n + q - 2)$-equivalencia y como $\dim X_1 \leqslant n + q - 3$, se sigue que

$$(f \# f \# f)_* : [X_1, X_1 \# X_1 \# X_1] \to [X_1, X_2 \# X_2 \# X_2]$$

es una biyección. En consecuencia a $(\mu_1) = 0$. Por un argumento similar se sigue c $(\mu_1) = 0$.

2. DESCOMPOSICION HOMOLOGICA DE CO-H-GRUPOS Y APLICACIONES.

Sea X un CW-complejo $(q-1)$-conexo y supongamos que $H_q(X)$ es el primer grupo de homología no nulo de X. Una descomposición homológica de X es una de espacios y aplicaciones

$$* \to X_q \xrightarrow{i_q} X_{q+1} \to \dots \quad X = \bigcup_{n \geqslant q} X_n$$

tales que

i) X_n es $(q-1)$-conexo y $\dim X_n \leqslant n + 1$, para todo n.

ii) Existen elementos $k'_n : M(H_{n+1}(X), n) \to X_n$ tales que i_n es equivalente a la cofibración inducida $X_n \to X_n \cup_{k'_n} CM(H_{n+1}(X), n)$ con cofibra $M(H_{n+1}(X), n+1)$.

iii) Existen aplicaciones $f_n : X_n \to X$ tales que $f_n = f_{n+1} i_n$, y

$$H_m(X_n) \cong \begin{cases} H_m(X), & m \leqslant n \\ 0, & m > n \end{cases}$$

Aquí $M(G, n)$ denota el espacio de Moore de tipo (G, n), es bien conocido que $M(G, n + 1)\ SM(G, n)$ y por tanto $M(G, n)$ es un co-H-grupo, el cual admite una única comultiplicación si $n \geqslant 3$ (si $n \geqslant 2$ y G libre).

Como f_n es una n-equivalencia y X $(q - 1)$-conexo, si $q \geqslant 3$ entonces $\dim X_n < n + q - 1$ y si (X, μ) es un co-H-grupo, se sigue de (1.5) y (1.6) que X_n admite una comultiplicación μ_n, univocamente determinada, tal que f_n es (μ_n, μ)-primitiva y por tanto (X_n, μ_n) es un co-H-grupo para todo n.

Nota. Este último resultado es debido, por otro método a C.R. Curjel ([2]) y en una forma más general, para espacios de LS-cat $\leqslant$ k, a I. Berstein y P. Hilton.

Consideremos la sucesión cofibrada inducida por k'_{n-1}

$$M(H_n(X), n-1) \xrightarrow{k'_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} X_n \xrightarrow{q_n} M(H_n(X), n)$$

vamos a probar que todas estas aplicaciones son primitivas.

*2.1. **Proposición.*** La aplicación q_n es (μ_n, μ_M)-primitiva y central, para todo $n \geqslant 3$.

Demostración. La inclusión $M \vee M \subset M \times M$ es una $(2n-1)$-equivalencia, ya que $M(H_n(X), n)$ es $(n-1)$-conexo. Para $n \geqslant 3$, $\dim X_n \leqslant n+1 < 2n-1$ y por tanto $[X_n, M \# M] = 0$ luego $\omega(q_n; \mu_n, \mu_M) = 0$. De manera análoga, como X_n es $(q-1)$-conexo, la inclusión $X_n \vee M \subset X_n \times \dot{M}$ será una $(n+q-1)$-equivalencia y $\dim X_n \leqslant n+1 < n+q-1$ si $q \geqslant 3$, entonces $[X_n, X_n \# M] = 0$ y $(1 \# q_n) \subset (\mu_n) \in [X_n, X_n \# M]$ implican que q_n es central.

*2.2. **Proposición.*** La inclusión $i_{n-1} : X_{n-1} \to X_n$ es (μ_{n-1}, μ_n)-primitiva.

Demostración. En efecto, como f_n es (μ_n, μ)-primitiva para todo n, de (3.1.) de [4]

$$0 = \omega(f_{n-1}; \mu_{n-1}, \mu) = \omega(f_n i_{n-1}; \mu_{n-1}, \mu) = (f_n \# f_n)\, \omega(i_{n-1}; \mu_{n-1}, \mu_n)$$

pero f_n es una n-equivalencia y por tanto $f_n \# f_n$ es una $(n+q-1)$-equivalencia. Para $q \geqslant 3$, $\dim X_{n-1} < n+q-1$, luego

$$(f_n \# f_n)_*: [X_{n-1}, X_n \# X_n] \to [X_{n-1}, X \# X]$$

es una biyección. Se sigue que $\omega(i_{n-1}; \mu_{n-1}, \mu_n) = 0$.

*2.3. **Corolario.*** La aplicación $k'_{n-1} : M(H_n(X), n-1) \to X_{n-1}$ es (μ_M, μ_{n-1})-primitiva.

Demostración. Como $i_{n-1}\, k'_{n-1} = 0$, de (2.2.) y de (3.1.) de [4]

$$(i_{n-1} \# i_{n-1})\, \omega(k'_{n-1}) = 0$$

pero i_{n-1} es una $(n-1)$-equivalencia y X_n es $(q-1)$-conexo luego $i_{n-1} \# i_{n-1}$ es una $(n + q - 2)$-equivalencia. Como $\dim M \leqslant n < n + q - 2$, para $q \geqslant 3$, la aplicación inducida

$$[M(H_n(X), n-1), X_{n-1} \# X_{n-1}] \xrightarrow{(i_{n-1} \# i_{n-1})_*} [M(H_n(X), n-1), X_n \# X_n]$$

es una biyección y en consecuencia $\omega(k'_{n-1}; \mu_M, \mu_{n-1}) = 0$.

Por el Teorema de Coeficientes Universales el n-simo grupo de homotopía de Y con coeficientes en G, $\pi_n(G; Y) = [M(G, n), Y]$ está determinado por G, $\pi_n(Y)$ h $\pi_{n+1}(Y)$, y es abeliano para $n \geqslant 3$.

2.4. Teorema. Sea (X, μ) un co-H-grupo $(q-1)$-conexo, $q \geqslant 3$, y

$$\{ Xn, fn, k'_n \}$$

una descomposición homológica de X, entonces para todo espacio Y y todo n

$$\pi_n(H_n(X); Y) \xrightarrow{q_n^*} [X_n, Y] \xrightarrow{i_{n-1}^*} [X_{n-1}, Y] \xrightarrow{k'^*_{n-1}} \pi_{n-1}(H_n(X); Y)$$

es una sucesión de grupos y homomorfismos exacta en los términos centrales y tal que q_n^* aplica $\pi_n(H_n(X); Y)$ en el centro de $[X_n, Y]$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los resultados anteriores.

2.5. Corolario. Si X es finito y $\pi_{p-i}(H_n(X); Y)$, $i = 0, 1$ es un grupo abeliano finitamente engendrado para todo n, entonces $[X, Y]$ es un grupo nilpotente finitamente engendrado.

Demostración. En efecto, si $\dim X = N$, entonces $X \simeq X_N$, pero por (2.4.), para todo Y y n

$$0 \to \operatorname{im} q_n^* \to [X_n, Y] \to \operatorname{im} i_{n-1}^* \to 0$$

es una extensión central de grupos y homomorfismos y el corolario se sigue por inducción.

BIBLIOGRAFIA

1. M. Castellet – J. L. Navarro. Co-H-estructuras sobre la unión puntual de dos co-H-espacios. Collectanea Mathematica Vol. XXXI (1980).

2. R. R. Curjel. A note on spaces of category $\leqslant 2$. Math. Zeitschr., 80 (1963).

3. T. Ganea. Congroups and suspensions. Invent. Math. 9 (1970).

4. J. L. Navarro. On the existence and classification of co-H-structures. Collectanea Mathematica Vol. XXX (1979).

Dt.º Geometría y Topología
Universidad de Zaragoza