

## TROISIEME PARTIE

### LES CANARDS ONT LA VIE BREVE

par

JEAN LOUIS CALLOT

Les canards ont commencé leur carrière par un défi: comment les capturer numériquement. La première tentative, remplacer l'infiniment petit  $\epsilon$  par  $1/100$ , fut un échec. La deuxième,  $\epsilon = 1/20$ , permettait d'attraper quelques canards mais posait autant de problèmes qu'elle en résolvait. Les canards étaient bien là où on les espérait, pour  $a$  voisin de  $1-\epsilon/8$ , mais leur durée de vie était incroyablement brève: il était nécessaire d'effectuer les calculs avec 12 chiffres significatifs pour arriver à les surprendre alors que  $1/20$  semblait une bien piètre approximation d'un infiniment petit.

On peut améliorer la localisation des canards. Un changement d'échelle analogue au passage du plan de Liénard au plan des phases (grossissement autour de l'hyperbole (H) au lieu de la cubique) fournit un terme supplémentaire: il faut que  $a = 1-\epsilon/8-3\epsilon^2/32 + \eta \epsilon^2$  avec  $\eta$  infinitésimal. Mais ce processus peut être continué indéfiniment sans permettre de séparer les divers canards.

A ce stade, le problème se dédouble: déterminer, d'une part, la valeur  $a_0$  du paramètre pour laquelle le cycle est, par exemple, le plus grand canard sans tête, et d'autre part mesurer l'évolution de la taille des canards en fonction de  $(a - a_0)$ . C'est ce deuxième aspect qui va être développé dans la suite.

*Théorème 1.* Il ne peut y avoir de canard que si

$$|a - a_0| = \exp \left( \frac{M}{\epsilon} \right) \text{ avec } M \text{ non infiniment petit et positif.}$$

( $a_0$  désigne la valeur du paramètre pour laquelle le cycle est le plus grand canard sans tête).

Cette condition nécessaire d'existence des canards montre que leur évolution échappe à un développement asymptotique polynômial en  $\epsilon$ . Ou que, si le paramètre est considéré comme une fonction de  $\epsilon$ , l'étude du comportement limite lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro ne permet de trouver au plus qu'un seul canard si on suppose  $a(\epsilon)$  analytique en zéro.

La technique permettant d'arriver à ce résultat est toujours celle des changements d'échelle. Mais le grossissement n'est pas réalisé autour de la sous-variété lente, mais autour du plus grand canard sans tête. Pour l'équation  $F(a_0)$  ceci revient à recentrer sur une trajectoire, mais dans l'équation  $F(a)$  avec  $a = a_0$  le procédé permet de comparer les trajectoires avec un canard de référence.

Comme l'a montré BENOIT, les trajectoires qui longent la partie stable de la cubique convergent exponentiellement. Il est donc nécessaire d'utiliser un grossissement plus violent qu'une simple affinité pour arriver à séparer les ombres de ces trajectoires. Un changement de variable en  $x^\alpha$  avec  $\alpha$  infiniment petit est bien adapté et permet même de mesurer les canards.

*Théorème 2.* Le cycle est un canard sans tête dont l'abscisse du bec est équivalente à  $b$  si:

$$a - a_0 = \exp \left( -\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{b^4}{4} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^2}{2} - b + \frac{11}{12} \right) \right)$$

Le cycle est un canard avec tête dont l'abscisse du col est équivalente à  $c$  si:

$$a_0 - a = \exp \left( -\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{c^4}{4} + \frac{c^3}{3} - \frac{c^2}{2} - c + \frac{11}{12} \right) \right)$$

*Preuves:*

Soit  $a_0$  la valeur du paramètre pour laquelle le cycle est le plus grand canard sans tête. L'ombre de ce cycle est dessinée sur la figure 1.

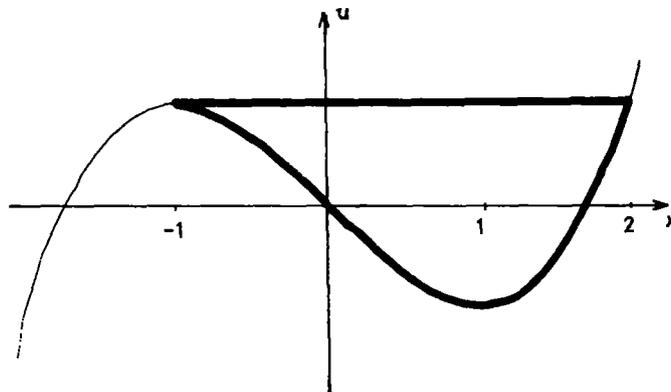
Soit  $v = f_0(x)$  l'équation de la partie du cycle dans le plan des phases telle que:

$$-1 \ll x \ll +2 \text{ et } v < 0$$

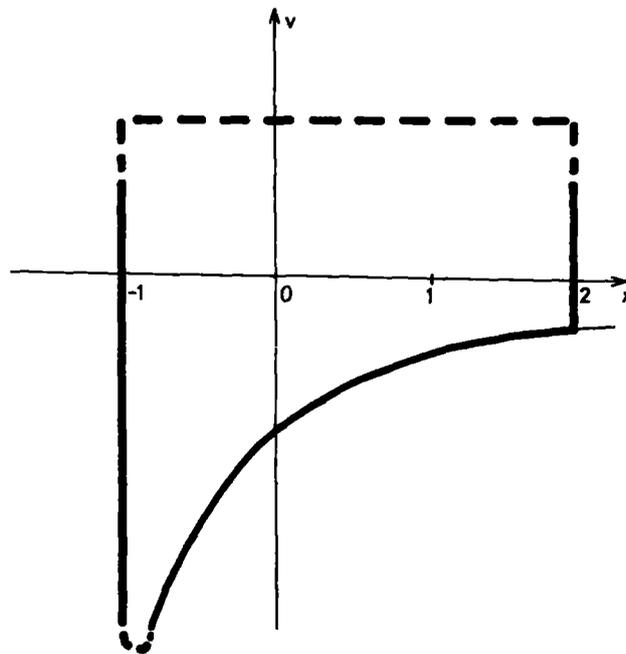
c'est-à-dire de la partie du cycle qui a pour ombre l'hyperbole (H):

$$v = -1/(1+x)$$

Soit  $y = (v - f_0)^{1/\alpha}$  avec  $\alpha > 0$  infiniment petit.



dans le plan de Liénard



dans le plan des phases

Fig. 1.

Ce changement de variable introduit par Francine DIENER [Df1], où  $x^{|\alpha|}$  désigne la fonction impaire valant  $x^\alpha$  pour  $x > 0$ , permet d'agrandir considérablement une partie du halo de la courbe  $v = f_0(x)$ .

La courbe  $v = 0$  est transformée en une courbe contenue dans le halo de  $y = 1$  et la courbe  $\hat{H}: v = 1/(1+x)$ , translacée de l'hyperbole  $H$  devient la courbe  $y = -1$ .

Je vais dans la suite me limiter à la région comprise entre ces deux courbes et bien sûr  $-1 \ll x \ll +2$ .

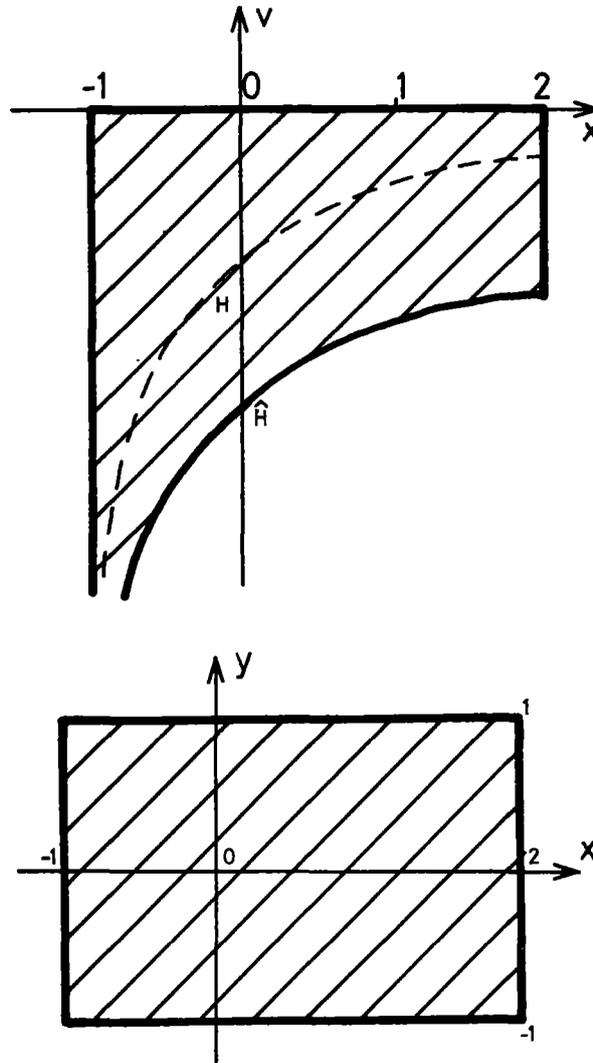


Fig. 2.

Dans le plan des phases, en dehors du halo de  $x = 1$ , le champ est presque vertical sur ces deux courbes. Les ombres des trajectoires issues de ces courbes sont donc partiellement connues: elles sont verticales entre l'hyperbole (H) et l'infini. Les parties de ces trajectoires correspondant à  $v$  infiniment grand apparaissent dans le plan de Liénard comme des trajectoires horizontales (la vitesse  $v$

est infiniment grande). On pourra ainsi suivre les ombres des trajectoires successivement dans les trois échelles.

On a dans les variables  $(x, y)$ :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha |v \dots f_0|^{\alpha-1} \left( \frac{dv}{dx} \dots \frac{df_0}{dx} \right)$$

où

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\epsilon} \left( 1 \dots x^2 + \frac{a-x}{v} \right)$$

puisque c'est une solution de  $E(a)$  et

$$\frac{df_0}{dx} = \frac{1}{\epsilon} \left( 1 \dots x^2 + \frac{a_0 \dots x}{f_0} \right)$$

puisque c'est une solution de  $E(a_0)$  donc

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \alpha |v \dots f_0|^{\alpha-1} \left( \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{a-x}{v} - \frac{a_0 \dots x}{f_0} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha}{\epsilon} y \left( \frac{x-a_0}{f_0 v} + \frac{a-a_0}{y^{1/\alpha} v} \right) \end{aligned}$$

d'où le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = v = y^{1/\alpha} + f_0 \\ \dot{y} = \frac{\alpha}{\epsilon} y \left( \frac{x-a_0}{f_0} - \frac{a-a_0}{y^{1/\alpha}} \right) \end{cases}$$

Dans l'expression de  $\dot{y}$ , le terme  $\frac{\alpha}{\epsilon} y \frac{a-a_0}{y^{1/\alpha}}$  peut s'interpréter comme une perturbation de l'expression correspondant à  $a = a_0$ . En posant  $k = (a-a_0)^{1/\alpha}$  ce terme s'écrit  $\frac{\alpha}{\epsilon} y (k/y)^{1/\alpha}$  il est infiniment petit pour  $|y| \gg k$  ( $1/\alpha$  est infiniment grand) et la perturbation est négligeable.

Par contre dans la bande  $|y| \ll k$ , ce terme est infiniment grand et le champ est presque vertical.

Si on choisit  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \text{Log } 2 / \text{Log } |a - a_0|$  ou  $|k| = 1/2$

la bande  $|y| \ll k$  est bien visible sans occuper tout le domaine  $|y| < 1$  et  $\alpha$  est infiniment petit dès que  $|a - a_0|$  est infiniment petit. Ce choix de  $\alpha$  convient donc pour toutes les situations intéressantes puisque nous savons que pour tous les canards  $a - a_0$  doit être infiniment petit.

Le facteur  $\alpha/\epsilon$  présent dans l'expression de  $y$  amène à distinguer deux cas:

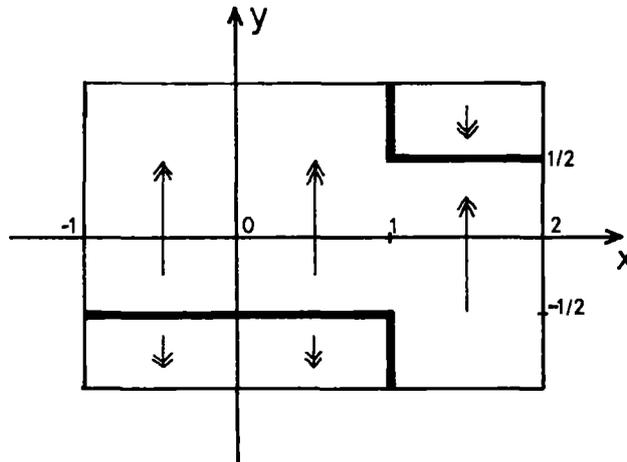
$\frac{\alpha}{\epsilon}$  infiniment grand ou  $\epsilon \text{Log } |a - a_0|$  infiniment petit

$\frac{\alpha}{\epsilon}$  fini, ce qui correspond à  $|a - a_0| = \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right)$

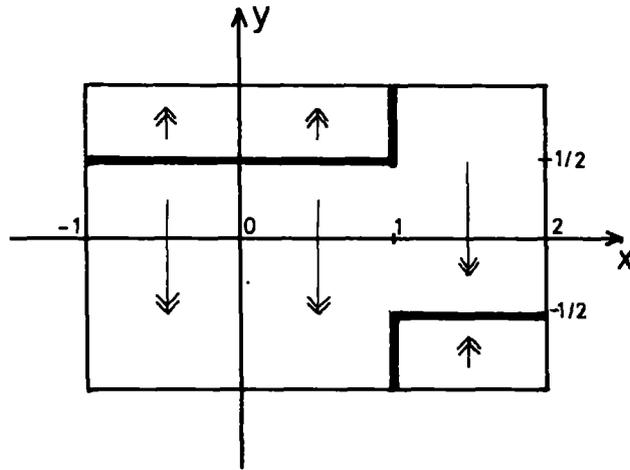
avec  $M$  non infiniment petit.

A. Si  $\frac{\alpha}{\epsilon}$  est infiniment grand ( $|a - a_0|$  n'est pas "très" petit)

le champ dans le plan  $(x, y)$  a l'allure suivante:



$$\text{si } a - a_0 > 0 \quad k = +\frac{1}{2}$$



$$\text{si } a - a_0 < 0 \quad k = -\frac{1}{2}$$

Fig. 3.

Le champ est presque vertical en dehors du halo de la courbe

$$y = -k(f_0/(x - a_0))^{\alpha}$$

où  $\dot{y}$  s'annule (en gras sur la figure).

De plus, en dehors du halo de  $x = 1$ , le champ est encore presque vertical jusqu'au bord du domaine utilisé, c'est-à-dire jusqu'aux courbes correspondant à  $v = 0$  et  $v = -1/(1+x) - 1$  (II).

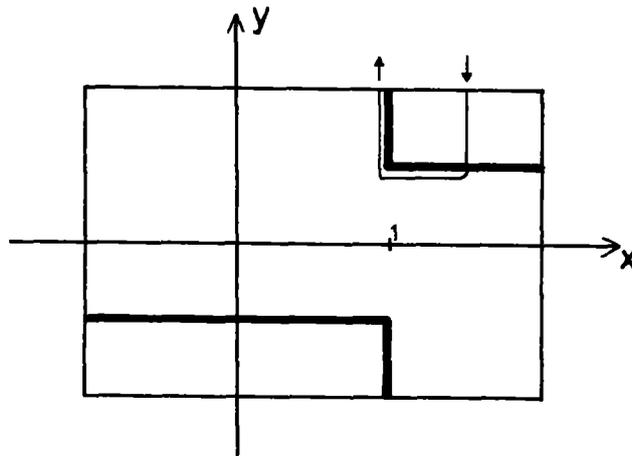


Fig. 4.



B. Si  $\frac{\alpha}{\epsilon}$  est fini ( $a - a_0$  est "très" petit)

il est plus simple dans ce cas de fixer  $\alpha = \epsilon$ , donc de faire le changement de variable

$$w = (v - f_0)^{|\epsilon|}$$

D'où le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = v = w^{1/|\epsilon|} + f_0 \\ \dot{w} = w \left( \frac{x - a_0}{f_0} + \left( \frac{h}{w} \right)^{1/|\epsilon|} \right) \text{ avec } h = (a - a_0)^{|\epsilon|} \end{cases}$$

(l'hypothèse sur  $a - a_0$  nous assure que  $|h| \ll 1$ ).

Si  $a = a_0$ , le système se réduit à  $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{w} = w \frac{x - a_0}{f_0} \end{cases}$

C'est la situation qu'a considérée BENOIT pour décrire le feuilletage autour des canards.

En remarquant que  $a_0$  est équivalent à 1 et que  $v$  et  $f_0$  sont infiniment voisins de  $-1/(1+x)$  pour  $|w| \ll 1$  et  $-1 \ll x \ll 2$  on a:

$$\begin{cases} \dot{x} \simeq -1/(1+x) \\ \dot{w} \simeq -w(x-1)(x+1) \end{cases}$$

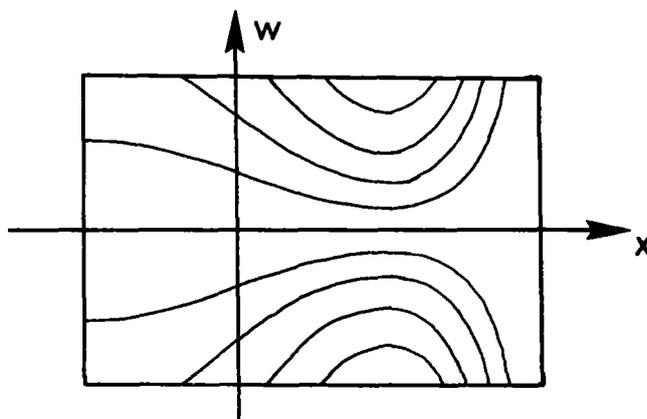


Fig. 6.

donc:

$$w \simeq C \exp \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x$$

Une majoration du champ montre que cette approximation est bonne dans tout le domaine qui nous intéresse, c'est-à-dire jusqu'aux courbes correspondant à  $v = 0$  et à (II).

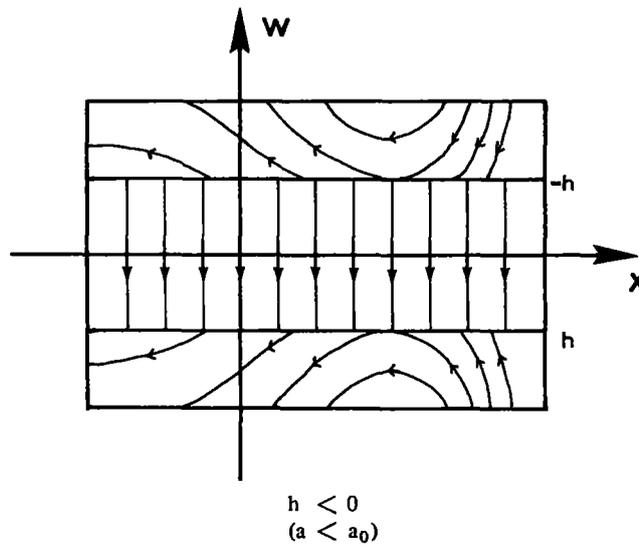
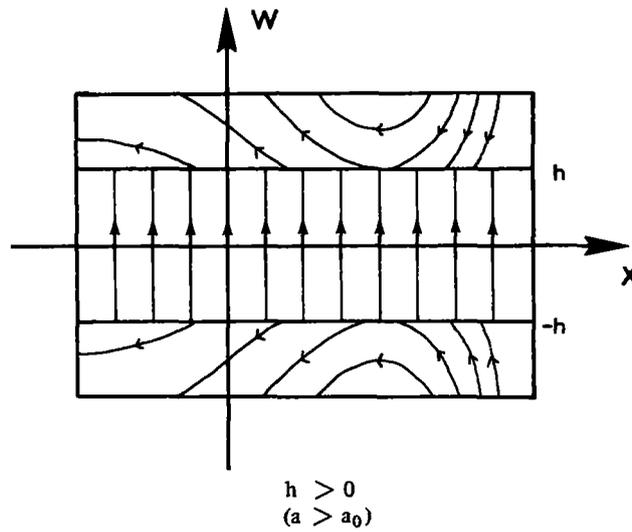


Fig. 7.

Comme précédemment, le terme  $(h/w)^{1/\epsilon}$  est infiniment petit pour  $|w| \gg |h|$  et infiniment grand dans la bande  $|w| \ll |h|$ .

Je vais maintenant piéger le cycle limite en suivant quelques trajectoires. Les trajectoires qui s'enroulent (ou spiralent vers l'intérieur) se trouvent à l'extérieur du cycle alors que celles qui se déroulent se trouvent à l'intérieur (le cycle est asymptotiquement stable).

Il est nécessaire de suivre les trajectoires dans 3 échelles: le plan de Liénard pour avoir une vue globale (les demi-trajectoires des points finis restent à distance finie dans ce plan), le plan  $(x, w)$  pour séparer les ombres des trajectoires qui longent la cubique, et le plan des phases qui permet le passage entre les deux précédents.

Je ne donne les détails du jeu à trois échelles que dans un cas pour  $h > 0$ , il se reconstitue facilement dans les autres cas.

Soit  $\gamma$  une trajectoire issue d'un point d'abscisse équivalente à 2 de la courbe correspondant à  $v = 0$ , donc du halo de  $w = 1$ .

Si  $h > 0$ . A l'échelle  $(x, w)$   $\gamma$  a pour ombre la courbe en gras (figure 8): elle ne peut pas pénétrer dans la bande  $|w| \ll h$  où le champ est presque vertical dirigé vers le haut.

Pour  $x \ll 1$ , elle longe la trajectoire du champ approché qui est tangente à  $w = h$  et atteint  $w = 1$  en un point d'abscisse  $x_1$ .

$x_1$  est solution de:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{11}{12} = -\epsilon (\text{Log } h)$$

Dans le plan des phases (figure 9) l'ombre de  $\gamma$  atteint l'hyperbole (H) en un point d'abscisse 2, le longe jusqu'à l'abscisse  $x_1$  puis saute vers le haut, c'est-à-dire que la vitesse devient infiniment grande.

Dans le plan de Liénard (figure 10) l'ombre de  $\gamma$  longe la cubique (qui correspond à l'axe  $v = 0$  du plan des phases) entre les abscisses 2 et  $x_1$ . Au point d'abscisse  $x_1$ , elle saute vers la droite (la dérivée de  $x$  est infiniment grande positive).

Le saut vers la droite s'achève sur la cubique en un point d'abscisse  $x_2$  (figure 11) telle que:

$$x_2^3/3 - x_2 = x_1^3/3 - x_1 \quad \text{et} \quad x_2 > x_1$$

$$\text{Si } h > 0$$

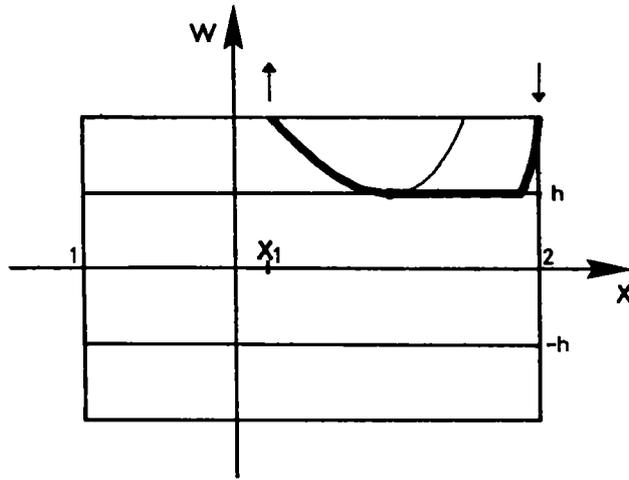


Fig. 8.

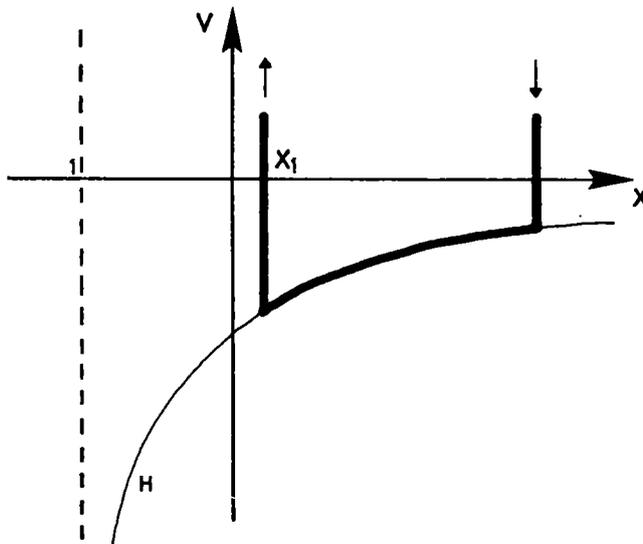


Fig. 9.

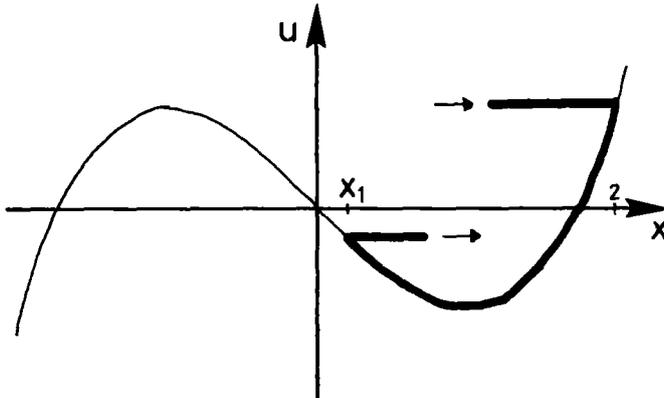


Fig. 10.

On a nécessairement

$$x_2 < 2$$

Dans le plan des phases (figure 12) l'ombre de  $\gamma$  coupe verticalement l'axe  $v = 0$  en un point d'abscisse  $x_2$  puis longe l'hyperbole (H) vers la gauche.

A l'échelle  $(x, w)$  (figure 13) l'ombre de  $\gamma$  ne peut pas pénétrer dans la bande  $|w| \leq h$ . Elle longe donc la droite  $w = h$  jusqu'à l'abscisse 1 à partir d'où elle longe la trajectoire tangente à  $w = h$ .

En conclusion la trajectoire  $\gamma$  s'enroule et se trouve donc à l'extérieur du cycle.

On montre de la même manière que toute trajectoire issue de l'axe  $v = 0$  en un point d'abscisse compris entre 1 et  $x_2$  se déroule et se trouve donc à l'intérieur du cycle.

(La figure 14 symbolise par des pointillés les parties de la trajectoire qui n'apparaissent que dans le plan de Liénard ou dans le plan des phases).

L'ombre du cycle est ainsi localisée. La solution périodique oscille entre  $b$  et  $q$  avec  $-1 < b < 1 < q < 2$ . ( $b \simeq x_1, q \simeq x_2$ ). Il s'agit d'un canard sans tête.

L'abscisse  $b$  du bec de ce canard est équivalente à la plus petite des deux solutions de:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{11}{12} = -\epsilon \text{Log } h = -\epsilon \text{Long}(a - a_0)$$

ou à  $-1$  si cette solution est inférieure à  $-1$ .

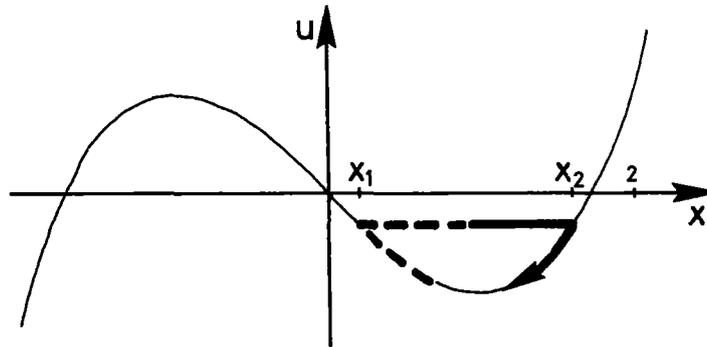


Fig. 11.

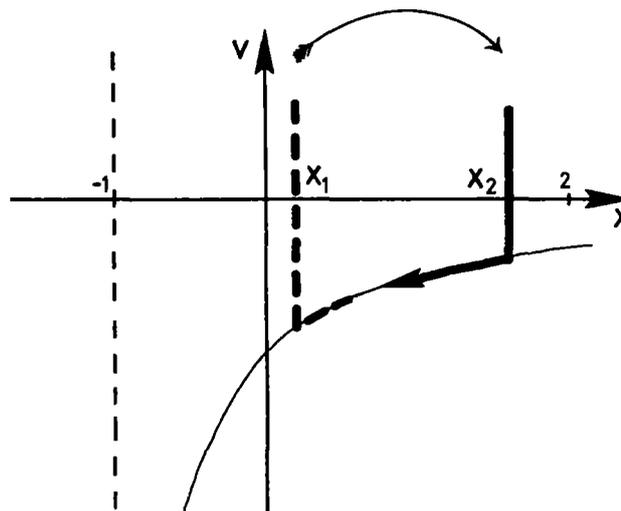


Fig. 12.

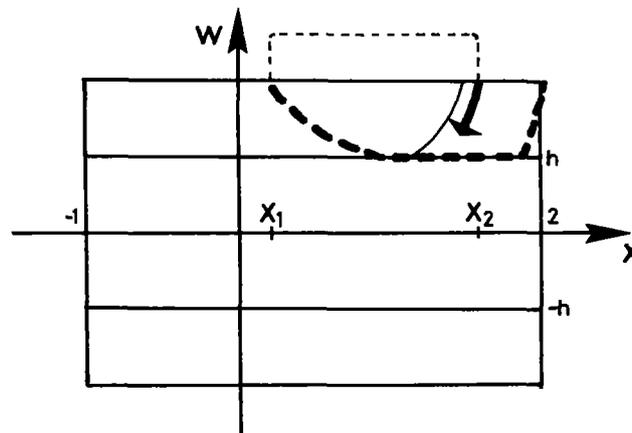


Fig. 13.

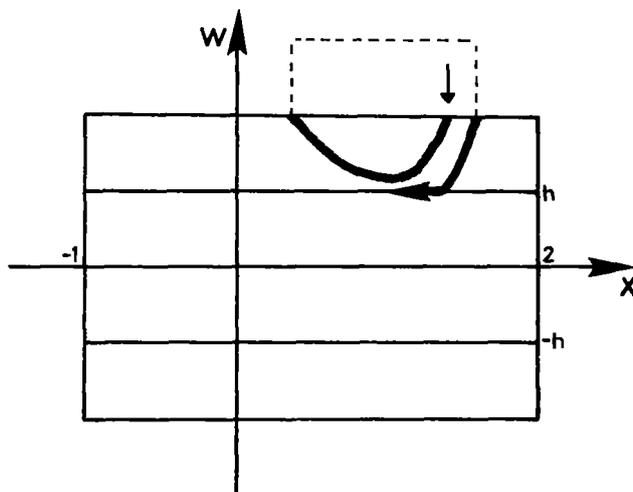


Fig. 14.

L'abscisse  $q$  de sa queue est équivalente à la solution supérieure à  $b$  de:

$$\frac{x^3}{3} - x = \frac{b^3}{3} - b$$

Si  $h < 0$ . Toute trajectoire issue d'un point de l'axe  $v = 0$  d'abscisse nettement inférieure à  $2$  coupe une première fois cet axe en un point d'abscisse inférieure à  $-1$ , puis le recoupe en un point d'abscisse équivalente à  $2$ . Elle se trouve donc à l'intérieur du cycle (figure 15).

Toute trajectoire atteignant la cubique en venant de la droite, donc avec une vitesse négative, se trouve à l'extérieur du cycle (figure 16).

L'ombre du cycle est ainsi localisée, il s'agit d'un canard avec tête.

L'abscisse  $c$  de son col ( $c \simeq x_1$ ) est équivalente à la plus petite des deux solutions de:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{11}{12} = -\text{Log}(h) = -\epsilon \text{Log}(a - a_0)$$

ou à  $(-1)$  si cette solution est inférieure à  $(-1)$ .

L'abscisse  $b$  de son bec est la solution inférieure à  $c$  de:

$$\frac{x^3}{3} - x = \frac{c^3}{3} - c$$

L'abscisse de la queue est équivalente à  $+2$ .

Si  $h < 0$

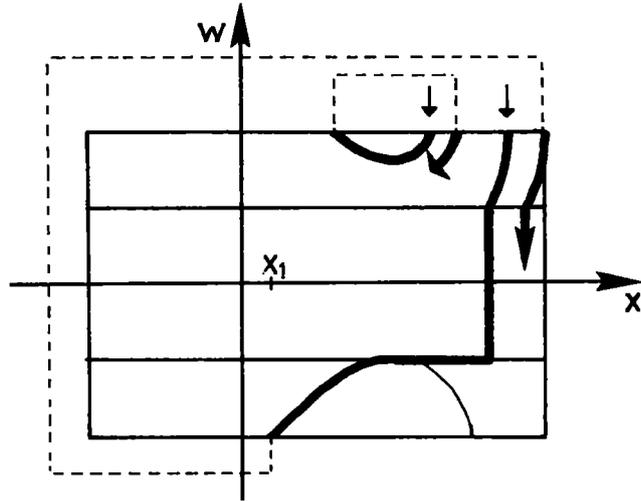


Fig. 15.

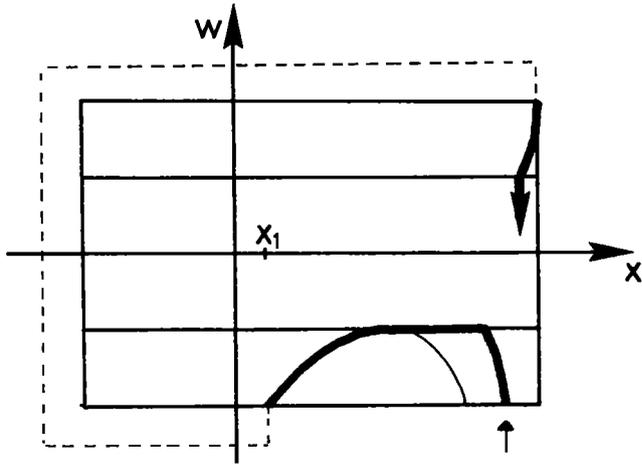


Fig. 16

QUATRIÈME PARTIE  
ANNEXE NUMÉRIQUE

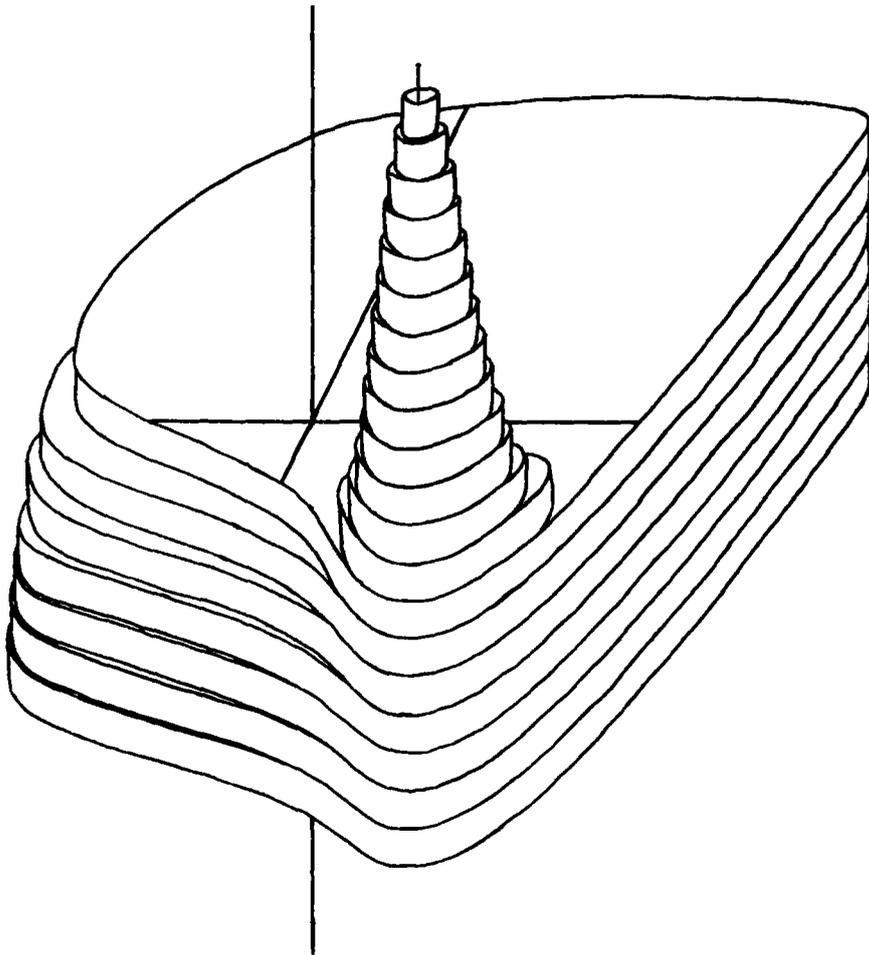


Fig. 1. Evolution de la forme du cycle pour  $\epsilon = 1/10$ ,  $a$  variant de 0,980 à 1. Chaque plaque correspond à une variation de  $a$  de 0,001. (Le même dessin avec  $a$  variant de 0 à 1 aurait 5 m de haut).

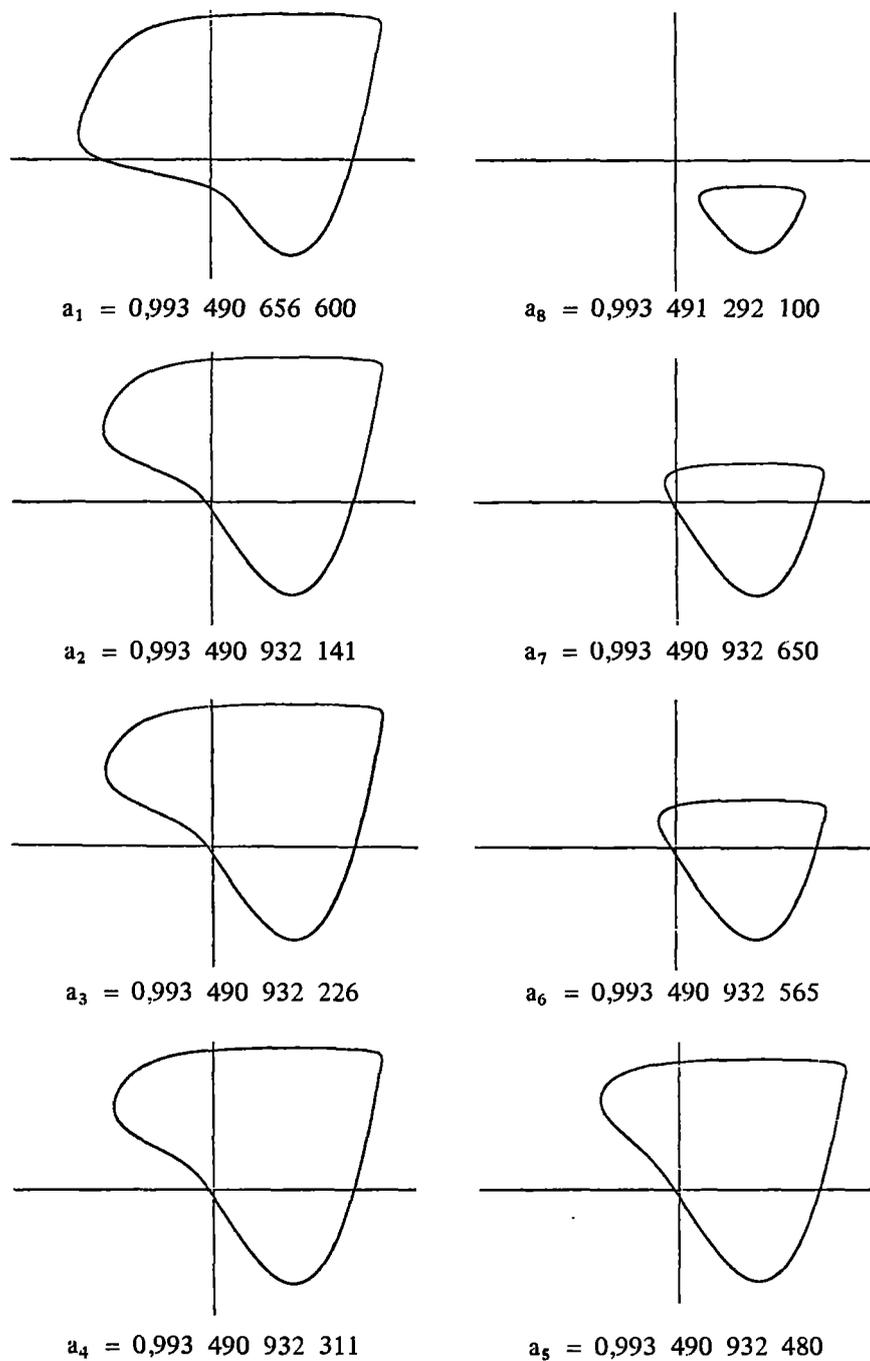


Fig. 2. Cycles-canards pour  $e = 1/20$  et diverses valeurs de  $a$ .



Fig. 3. Les phénomènes d'entonnoir et de peigne s'observent pour des valeurs de  $\epsilon$  même non infiniment petites: les figures ci-dessus ont été tracées à l'ordinateur, avec  $\epsilon = 0.1$ .

Les deux figures supérieures (où  $a = 0.986332$ ) illustrent les figures 19b et 19c de la deuxième partie les deux inférieures (où  $a = 0.9861$ ) les figures 21b et 21c.

Des flèches ont été rajoutées aux endroits où toutes les trajectoires tracées sont quasi-confondues. On remarquera ici l'épaisseur du trait qui montre à quel point les trajectoires calculées sont proches les unes des autres.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AVK] Andronov A.A., Vitt A.A. et Khaikin S.E. Theory of oscillators. Pergamon Press (1966).
- [B] Benoit F. Equations différentielles: relation entrée-sortie. C.R. Acad. Sc. Paris, 293, série I (1981), p. 293 à 296.
- [CDD] Callot J.-L., Diener F. et Diener M. Le problème de la "chasse au canard". C.R. Acad. Sc. Paris, 286, série A (1978), p. 1059 à 1061.
- [Df1] Diener F. Famille d'équations à cycle limite unique C.R. Acad. Sc. Paris, 289,, série A (1979), p. 571 à 574. Les équations  $e^{x''} + (x^2 - 1) x' |S| + x = a$ . Collectanea Mathematica, vol. XXIX, fasc. 3 (1978).
- [Df2] Diener F. Quelques exemples de bifurcations et leurs canards Publication IRMA, Strasbourg (1979).
- [Dm1] Diener M. Deux nouveaux phénomènes canard. C.R. Acad. Sc. Paris, 290, série A (1980). Nessie et les canards. Publication IRMA, Strasbourg (1979).
- [Dm2] Diener M. Etude générique des canards. These, Strasbourg (1981).
- [H] Haag M.J. Etude asymptotique des oscillations de relaxation. Ann. Ec. Norm., (3), LX, p. 35 à 111 (1943).
- [L] Lienard A. Etude des oscillations entretenues. Revue Générale de l'Electricité, p. 901 (1928).
- [Lo] Lobry C. Une intervention de l'Analyse Non Standard en Mathématiques appliquées. A paraître.
- [LG] Lutz R. et Goze M. Pratique commentée de la méthode non classique. A paraître.
- [LS] Laugwitz D. et Schmieden C. Kontinuum und Zahlen. Neucere mathematische Überlegungen zum Endlichen. Darmstadt (1980).
- [MMcC] Marsden J.E. et Mc Cracken M. The Hopf bifurcation and its applications. Springer Verlag, New York (1976).
- [N] Nelson F. Internal Set Theory. Bull. Amer. Math. Soc., 83, no 6 (1977), p. 1165 à 1198.
- [P] Pontryagin L.S. Asymptotic behaviour of the solutions of a differential equation with a small parameter in the high derivatives Amer. Math. Soc. Transl., série 2, 18 (1961), p. 295 à 319.
- [Re1] Reeb G. Séance-débat sur l'Analyse Non Standard. Gazette des mathématiciens, no 8 (1977), p. 8 à 14.
- [Re2] Reeb G. La Mathématique Non Standard vieille de soixante ans? Publication IRMA, Strasbourg (1979).
- [Ro] Robinson A. Non standard analysis. North Holland, Amsterdam (1966).
- [T] Troesch A. Etude macroscopique de systèmes différentiels. Publication IRMA, Strasbourg (1980).

- [TU] Troesch A. et Urlacher E. *Analyse Non Standard et équation de Van der Pol* Publication IRMA, Strasbourg (1977).
- [V] Vogel T. *Théorie des systèmes évolutifs*. Gauthier-Villars, Paris (1965).
- [Z] Zeeman E.C. *Differential equations for heart beat and nerve impulse*. *Dynamical Systems*, M. Peixoto Ed. Academic Press, New York (1973), p. 683 à 748.