

## DEUXIEME PARTIE

### TUNNELS – ENTONNOIRS PEIGNES

par

ERIC BENOIT

#### INTRODUCTION.

En étudiant le champ de vecteurs

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\epsilon} \left( u - \frac{x^3}{3} + x \right) \\ \dot{u} = a - x \end{cases}$$

associé à l'équation étudiée, M. et F. Diener ont montré que pour certaines valeurs de  $a$  équivalentes à 1, les trajectoires périodiques sont des canards. On sait aussi qu'un tel canard est "infiniment" stable, c'est-à-dire que l'intégrale de la divergence du champ sur le cycle est infiniment grande négative. Nous allons montrer dans cette partie que, malgré cette grande stabilité du canard, il y a des solutions qui, après être rentrées dans le halo du canard, *en ressortent* (voir par exemple la trajectoire  $\gamma$  sur la figure 1).

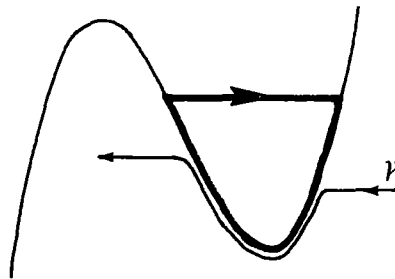
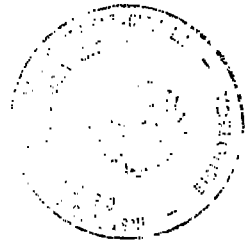


Fig. 1

On est alors conduit, en étudiant l'ombre <sup>(1)</sup> du feuilletage à poser les définitions suivantes: soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  les ombres de deux trajectoires telles que  $\gamma$  et  $\gamma'$  ne soient pas identiques;  $\gamma$  et  $\gamma'$  peuvent être confondues sur un segment AB, on dira alors que AB est un *tunnel*, que A est son *entrée* et B sa *sortie*;  $\gamma$  et  $\gamma'$  peuvent être confondues sur une demi-trajectoire positive (resp. négative) Az (resp. zB) qu'on appellera un *entonnoir* (resp. un *peigne* <sup>(2)</sup>); A est l'*entrée* de l'entonnoir, B la *sortie* du peigne.

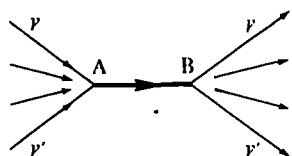


Fig. 2a) le tunnel.

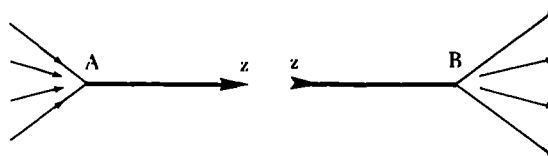


Fig. 2b) l'entonnoir.

Fig. 2c) le peigne.

La stabilité "infinie" d'un cycle-canard sera interprétée géométriquement ainsi: soit D la demi-droite d'équation  $x = 1, u > \frac{2}{3}$ ; et  $\pi$  l'application de premier retour de D sur elle-même. Il existe un segment  $\sigma$  de longueur non infiniment petite dont l'image par  $\pi$ , incluse dans  $\sigma$ , est de longueur infiniment petite. Les solutions issues du segment  $\sigma$  entrent donc dans le halo du canard pour n'en plus ressortir: le canard lui-même est un entonnoir.

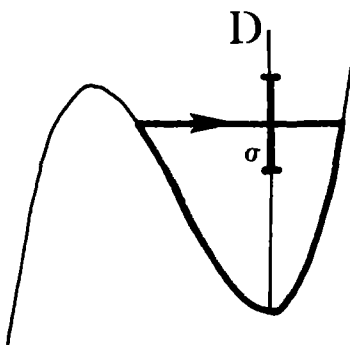


Fig. 3.

(1) L'ombre d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  est l'unique famille standard de "courbes" dont les éléments standard sont les ombres des feuilles de  $\mathcal{F}$ ; (cette définition a un sens en vertu de l'axiome de standardisation ([N])).

(2) Le peigne est un dispositif utilisé dans certaines oasis pour distribuer dans le jardin l'eau en provenance d'un canal principal.

Dans la deuxième partie, nous étudierons le tunnel constitué par un morceau de la variété lente. Cette étude nous permettra ensuite, dans la troisième partie, de chercher les entonnoirs et les peignes. Remarquons déjà que chaque point de la partie répulsive de la cubique est la sortie d'un tunnel ou d'un peigne; de même, chaque point attractif est l'entrée d'un tunnel ou d'un entonnoir.

#### I. LE CAS $a \ll 1$ ; PAS DE TUNNEL.

Si  $a \ll 1$ , les solutions issues d'un point infiniment proche du sommet  $S^+$  de la cubique ne peuvent pas longer la cubique, car la composante verticale du champ est négative dans un voisinage standard de  $S^+$ . L'ombre du feuilletage est alors entièrement déterminée: voir figure 4: les solutions issues du point singulier instable d'abscisse  $a$  longent la partie répulsive de la cubique puis sautent, et enfin longent le grand cycle.

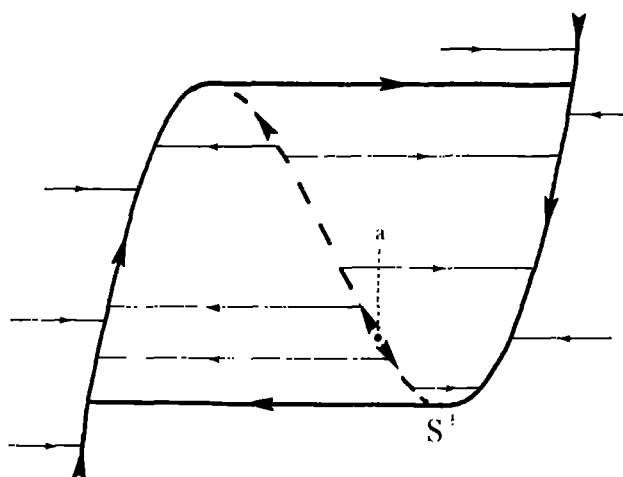


Fig. 4. Ombre du feuilletage pour  $a \ll 1$ .

Entonnoirs et peignes ont été dessinés en gras, les entonnoirs en trait plein, le peigne en pointillés: le cycle lui-même et les parties attractives de la cubique sont des entonnoirs; la partie répulsive de la cubique est un peigne.

Si  $a \gg 1$ , les solutions arrivant dans le halo de  $S^+$  ne peuvent provenir que du halo de la demi-droite horizontale d'extrémité  $S^+$ , car la composante verticale du champ est positive dans un voisinage standard de  $S^+$ . L'ombre du feuilletage est alors entièrement déterminée: voir figure 5: les solutions, toutes en provenance de l'infini, "tombent" sur la cubique. Elles atteignent ensuite le point singulier

stable, éventuellement après une ou deux relaxations. La demi-droite d'extrémité  $S^+$  et la partie répulsive de la cubique forment un peigne. Les parties attractives de la cubique et le "saut" issu du sommet  $S^-$  forment des entonnoirs.

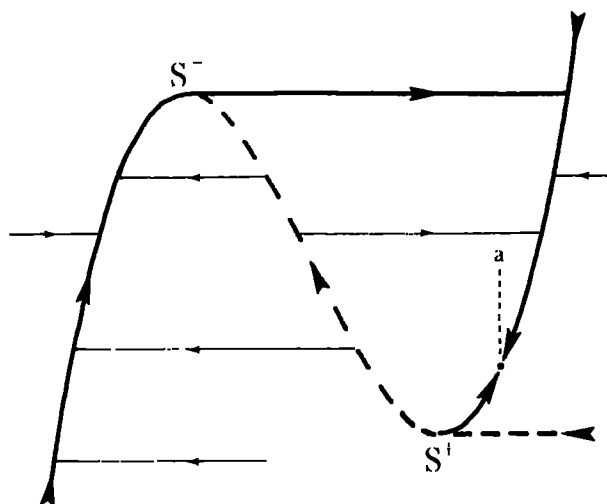


Fig. 5. Ombre du feuilletage pour  $a \geq 1$ .

## II. ETUDE DES TRAJECTOIRES LE LONG DE LA CUBIQUE - LE TUNNEL.

Supposons dorénavant que  $a \approx 1$ . Nous voulons connaître le comportement d'une trajectoire passant dans le halo du point  $S^+$ : une solution  $\gamma$  longeant la cubique et arrivant dans le halo de  $S^+$  va-t-elle sauter vers la gauche, rester dans le halo de  $S^+$  ou continuer à longer la cubique ? (voir fig. 6). Dans le dernier cas, où la solution  $\gamma$  quittera-t-elle le halo de la cubique ?

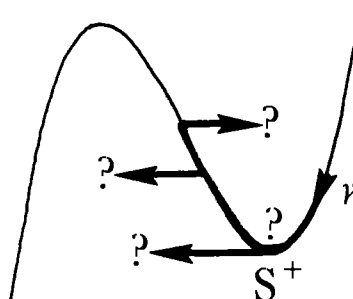


Fig. 6.

1. *Les loupes linéaires.*

Il vient naturellement l'idée de faire un grossissement du halo de la cubique, pour mieux voir ce qui s'y passe. On pose donc:

$$v_1 = \frac{1}{\epsilon} \left( u - \left( \frac{x^3}{3} \dots x \right) \right)$$

Les nouvelles variables  $(x, v_1)$  sont alors les variables du plan des phases, et le système étudié s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1 \\ \dot{v}_1 = \frac{1}{\epsilon} ((1 - x^2)v_1 + a - x) \end{cases}$$

Les solutions qui longeait la cubique dans le plan de Liénard  $(x, u)$  sont, maintenant, groupées dans le halo de l'hyperbole H d'équation  $v_1 = -1/(1+x)$  (voir figure 7). La question posée se traduit ainsi dans le plan des phases:

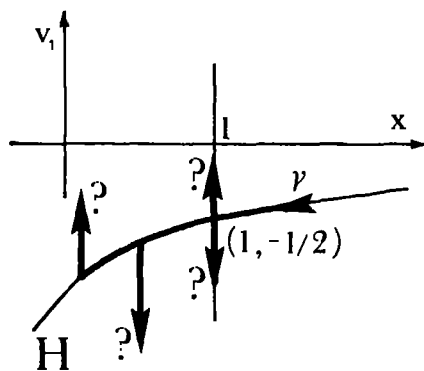


Fig. 7.

Une solution  $\gamma$  longeant H et arrivant dans le halo du point de coordonnées  $(1, -1/2)$  va-t-elle "sauter" vers le haut ? vers le bas ? continuer à longer H ? et, dans ce cas, jusqu'où ?

*Les informations géométriques de la figure 7 sont insuffisantes pour résoudre le problème.*

On peut évidemment recommencer le même travail en faisant un grossisse-

ment du halo de l'hyperbole  $H$ , en posant  $v_2 = \frac{1}{\epsilon} \left( v_1 + \frac{1}{1+x} \right)$ , mais le même genre de problème va se poser à nouveau. Tous les grossissements linéaires successifs du type  $v_n = \frac{1}{\epsilon} (v_{n-1} + f_n(x))$  ne nous permettent pas de préciser le comportement des solutions considérées. Il faut utiliser une loupe ayant un grossissement beaucoup plus fort, pour "séparer" les différentes solutions passant dans le halo de  $S^+$  après avoir longé la cubique.

## 2. Le microscope exponentiel.

Soit  $\Gamma$  un morceau de trajectoire, canard du champ dans le plan des phases, ayant pour ombre un segment de l'hyperbole  $H$ , limité par les points d'abscisse  $x_0 \gg 1$  et  $x_1 \ll 1$  (voir figure 8).

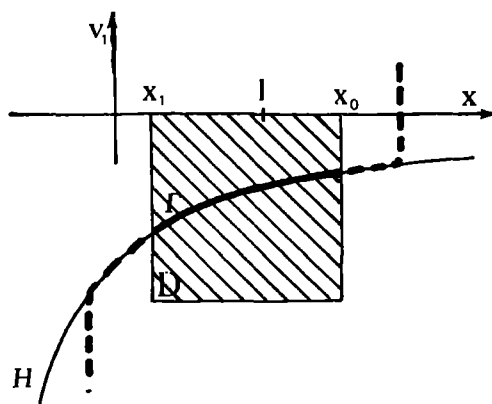


Fig. 8.

Nous allons nous placer dans un nouveau repère  $(x, W)$  pour mettre  $\Gamma$  sur l'axe  $W = 0$ , ce qui nous permettra par la suite de faire un grossissement violent sans rejeter  $\Gamma$  dans les infiniment grands.

Soit  $v = f(x)$  l'équation du canard  $\Gamma$  dans le plan des phases. On pose le changement de variable

$$v = W + f(x)$$

Le système étudié s'écrit dans le nouveau repère

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = W + f(x) \\ \dot{W} = \frac{1}{\epsilon} [(1 - x^2)(W + f(x)) + a - x] - (W + f(x)) \frac{df}{dx} \end{array} \right.$$

Comme  $\Gamma$  est une trajectoire du champ, on sait calculer  $\frac{df}{dx}$  en fonction de  $f(x)$  et  $x$ , et le système s'écrit alors simplement:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = W + f(x) \\ \dot{W} = \frac{1}{\epsilon} \frac{(x - a)W}{f(x)} \end{array} \right.$$

J. HAAG a déjà fait un calcul analogue dans le cas où  $a = 0$ , ce qui lui a permis de montrer que la distance entre deux solutions qui longent la partie attractive de l'hyperbole décroît exponentiellement.

De même, si deux solutions longent la partie répulsive de l'hyperbole  $H$ , leur distance croît exponentiellement.

Nous utilisons pour cela le changement de variable suivant, appelé microscope:  $w = W^{|\epsilon|}$  (où  $W^{|\epsilon|}$  désigne la fonction impaire de  $W$  valant  $W^\epsilon$  quand  $W$  est positif). Dans ce nouveau grossissement, introduit par F. DIENER ([Df 1]) les points standard du plan  $(x, W)$  ont pour images, dans le plan  $(x, w)$ , des points du halo des droites  $\Delta^+$  et  $\Delta^-$  d'équation  $w = \pm 1$  (sauf les points de l'axe  $W = 0$ ); les points du plan  $(x, w)$  tels que  $|w| \ll 1$  correspondent à des points du plan  $(x, W)$  où  $W$  est infiniment petit, plus petit même que n'importe quelle puissance standard de  $\epsilon$ . C'est cette dernière propriété qui fait appeler "microscope" cet instrument non-standard.

Soit  $\mathcal{H}$  le système dans le nouveau repère:

$$(\mathcal{H}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = w^{1/|\epsilon|} + f(x) \\ \dot{w} = \frac{(x - a)w}{f(x)} \end{array} \right.$$

3. Etude du système  $\mathcal{H}$ 

Soit  $D$  le domaine rectangulaire fermé du plan des phases, limité par les droites  $x = x_0$ ,  $x = x_1$ ,  $v = 0$ ,  $v = v_0$  (domaine hachuré sur la figure 8) où  $v_0 \ll \frac{-1}{1+x_1}$ .

Il nous suffit de connaître les trajectoires dans le domaine  $D$ , le "raboutage" au plan de Liénard ne posant alors plus de problème.

Notons  $\mathcal{D}$  l'image de  $D$  dans le nouveau repère  $(x, w)$ . Le domaine  $\mathcal{D}$  est limité par les droites  $x = x_0$ ,  $x = x_1$  et les courbes  $w_1(x) = (-f(x))^{|\epsilon|}$  et  $w_2(x) = (v_0 - f(x))^{|\epsilon|}$ . Les fonctions  $-f(x)$  et  $v_0 - f(x)$  n'étant jamais infiniment petites, on a  $w_1(x) \simeq 1$  et  $w_2(x) \simeq -1$ . Le domaine  $\mathcal{D}$  a donc pour ombre le rectangle  $[x_1, x_0] \times [-1, 1]$ .

Soit  $\tilde{\mathcal{H}}$  le système standard suivant:

$$(\tilde{\mathcal{H}}) \begin{cases} \dot{x} = \frac{-1}{1+x} \\ \dot{w} = (1-x^2)w \end{cases}$$

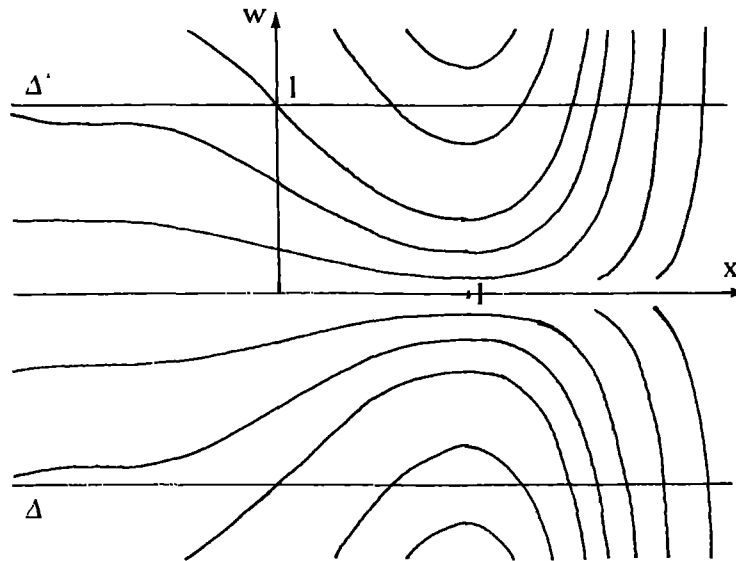


Fig. 9. Trajectoires de  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

Comme  $a \simeq 1$  et  $f(x) \simeq -(1+x)^{-1}$ , les champs de vecteurs  $\mathcal{H}$  et  $\tilde{\mathcal{H}}$  sont



équivalents dans tout le domaine  $\mathcal{D}$ , sauf dans le halo des horizontales  $\Delta^+$  et  $\Delta^-$ . De plus,  $\tilde{\mathcal{H}}$  est intégrable par quadrature: ses trajectoires ont pour équations:

$$w = C \exp \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right)$$

**PROPOSITION.**

Soit  $\gamma$  une trajectoire de  $\mathcal{H}$ . Le segment de  $\gamma$ , contenu dans le domaine  $\mathcal{D}$ , a pour ombre un segment d'une trajectoire  $\tilde{\gamma}$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

Si on se borne à regarder un segment de  $\gamma$ , inclus dans un rectangle  $[x_1, x_0] \times [-h, h]$  où  $h \ll 1$ , le lemme de l'ombre courte <sup>(3)</sup> permet de démontrer la proposition.

Il reste à s'assurer que  $\gamma$  a pour ombre  $\tilde{\gamma}$  jusqu'au bord de  $\mathcal{D}$ . Si  $|w| \gg 1$ , la composante horizontale du champ est infiniment grande, alors que la composante verticale est finie. Les trajectoires ont donc, dans cette zone, des horizontales pour ombres (voir figure 10).

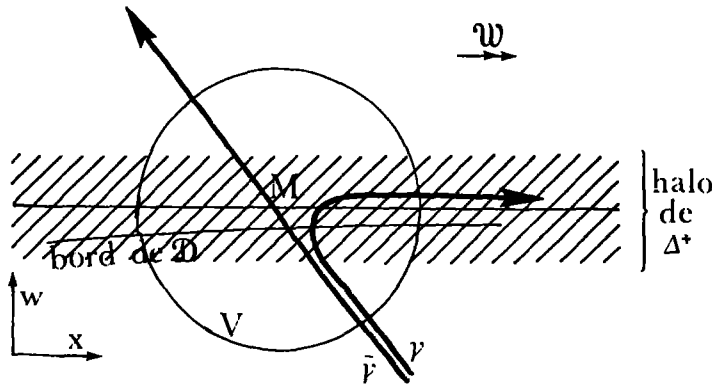


Fig. 10.

<sup>(3)</sup> Le lemme de l'ombre courte, conséquence du théorème des accroissements finis, est énoncé ainsi dans [Df 1]: soit  $\mathcal{U}$  un champ de vecteurs différentiable de  $\mathbb{R}^2$  infiniment proche d'un champ standard  $\tilde{\mathcal{U}}$  en tout point d'un ouvert standard  $O$ . Soient  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  les trajectoires pour  $\mathcal{U}$  et  $\tilde{\mathcal{U}}$  respectivement d'un même point de  $O$ . Alors pour tout  $t$  fini, si  $\tilde{\gamma}(\tau) \in O$  pour tout  $\tau < t$ , on a  $\gamma(t) \sim \tilde{\gamma}(t)$ .

La solution  $\gamma$  va donc nécessairement longer  $\Delta^+$  ou  $\Delta^-$ . Le problème est de montrer que  $\gamma$  ne longe  $\Delta^+$  ou  $\Delta^-$  que hors du domaine  $\mathcal{D}$ .

Étudions le cas où  $\tilde{\gamma}$  sort du domaine  $\mathcal{D}$  en un point du halo de  $\Delta^+$  dont l'abscisse est comprise entre  $-1$  et  $1$ . (On étudierait de même le cas de  $\Delta^-$  et aussi ceux où  $\tilde{\gamma}$  entre dans le domaine  $\mathcal{D}$ ).

Soit  $M$  le point d'intersection de  $\tilde{\gamma}$  et de  $\Delta^+$  d'abscisse (standard) comprise entre  $-1$  et  $1$ . Il existe un voisinage standard  $V$  de  $M$  dans lequel la composante verticale du champ  $\mathcal{H}$  est minorée par un standard non nul  $m$ . Dans  $\mathcal{D}$ , la composante horizontale est majorée par  $|v_0|$ . Donc, dans  $V \cap \mathcal{D}$ , la pente du champ est minorée par  $m/|v_0|$ ; ce nombre n'étant pas infiniment petit, la solution  $\gamma$  ne peut pas longer  $\Delta^+$  en restant dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

#### 4. Théorème du tunnel.

L'équation

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x = \frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \quad \alpha$$

admet deux solutions seulement, car le polynôme

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x$$

n'a qu'un seul extremum. Notons  $\varphi(\alpha)$  la solution différente de  $\alpha$  de cette équation.

#### THEOREME.

*S'il existe un segment de trajectoire  $\Gamma$ , canard du champ dans le plan des phases, ayant pour ombre un segment de l'hyperbole  $\Pi$ , limité par les points d'abscisse  $x_0 \gg 1$  et  $x_1 \ll 1$ ; si  $\gamma$  est une solution entrant dans le domaine  $\mathcal{D}$  en un point d'abscisse  $\tilde{x}$  (avec  $1 \ll \tilde{x} \ll x_0$ ), alors  $\gamma$  sort du domaine  $\mathcal{D}$  en un point d'abscisse équivalente à  $\varphi(\tilde{x})$ , sauf si  $\varphi(\tilde{x}) \ll x_1$ , auquel cas,  $\gamma$  sort du domaine  $\mathcal{D}$  en un point d'abscisse  $x_1$ .*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition précédente dans le plan des phases: dans le plan  $(x, w)$ ,  $\gamma$  est une solution de  $\mathcal{H}$  entrant dans

le domaine  $\mathcal{D}$  en un point d'abscisse  $\tilde{x}$ . La trajectoire  $\gamma$  a donc pour ombre dans le domaine  $\mathcal{D}$  la courbe  $\tilde{\gamma}$ , trajectoire de  $\tilde{\mathcal{H}}$ , d'équation

$$w = C \exp\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right)$$

où la constante d'intégration  $C$  est déterminée par  $\tilde{x}$ .

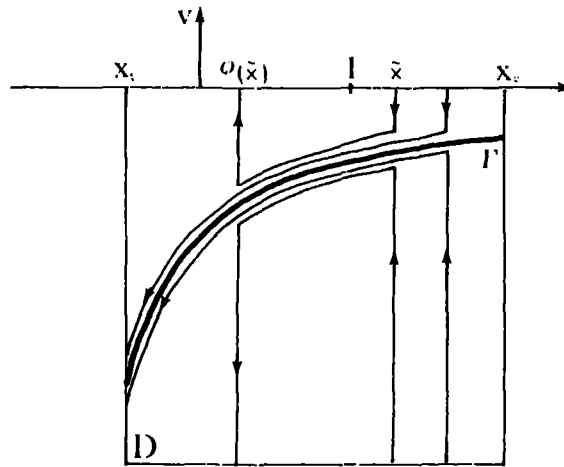


Fig. 11.

La trajectoire  $\tilde{\gamma}$  recoupe la droite  $\Delta^+$  ou  $\Delta^-$  au point d'abscisse  $\varphi(\tilde{x})$ . De plus,  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  sortent du domaine  $\mathcal{D}$  en deux points infiniment voisins. Le théorème est donc démontré.

##### 5. Remarques.

\* On peut traduire facilement ce théorème dans le plan de Liénard, car on sait que toute solution qui a quitté le halo de l'hyperbole  $H$  du plan des phases, quitte en un temps infiniment petit le halo de la cubique du plan de Liénard. C'est d'ailleurs dans le plan de Liénard que le théorème sera utilisé par la suite, le plan des phases n'ayant été introduit que pour pouvoir donner commodément un domaine  $\mathcal{D}$  où la vitesse  $v$  est bornée (fait indispensable pour montrer que les solutions de  $\tilde{\mathcal{H}}$  sortent de  $\mathcal{D}$  sans longer  $\Delta^+$  ou  $\Delta^-$ ).

\* *Le tunnel* du plan de Liénard est alors un corollaire: plaçons-nous dans ce plan et examinons le comportement de l'ombre  $\tilde{\gamma}$  d'une solution passant en  $S^+$ .

Pour connaître le point  $Q$  où  $\tilde{\gamma}$  quitte la cubique pour sauter à gauche ou à droite, il est nécessaire (du moins s'il y a canard) de connaître le point  $P$  où elle a rencontré la cubique. En effet, les ombres des trajectoires ne forment pas un feuilletage du plan: deux ombres distinctes sont confondues sur un segment: le segment  $PQ$  est un *tunnel*.

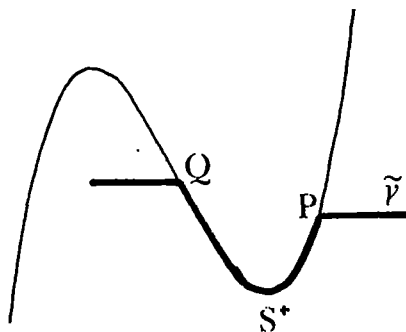


Fig. 12.

\* La courbe  $\tilde{\gamma}$  dessinée sur la figure 12 est l'ombre d'une trajectoire du champ pour toute valeur de  $a$  qui donne un cycle-canard longeant la cubique au moins de  $P$  à  $Q$ . En effet, la fonction  $\varphi$  est indépendante de  $a$ . Nous utiliserons cette remarque pour étudier le "rideau" quand nous connaîtrons complètement l'ombre du feuilletage.

### III. OMBRE DU FEUILLETAGE: ENTONNOIR ET PEIGNE.

Nous allons maintenant pouvoir, grâce à la description faite ci-dessus du tunnel, déterminer l'ombre du feuilletage uniquement par des raisonnements géométriques n'utilisant que la forme du cycle et non les valeurs de  $a$ .

Nous noterons, pour alléger l'écriture,  $(x)$  le point de la cubique d'abscisse  $x$ .

#### 1. Cas où le système a un grand cycle.

**LEMME.** *Aucune trajectoire ne peut être un canard.*

En effet, supposons qu'il existe un canard  $\Gamma$  dont l'ombre contient le segment de cubique limité par les points  $(x_0)$  et  $(x_1)$ . On peut alors appliquer le

théorème du tunnel: soit  $\gamma$  une solution provenant des infiniment grands positifs et dont l'ombre rencontre la cubique au point  $(\tilde{x})$  avec  $x_1 < \varphi(\tilde{x}) < 1 < \tilde{x} < x_0$  (voir figure 13). L'ombre de  $\gamma$ , quitte alors la cubique au point  $(\varphi(\tilde{x}))$ . Comme cette valeur est inférieure et non équivalente à 1, la solution  $\gamma$  a nécessairement recoupé le grand cycle, ce qui est absurde.

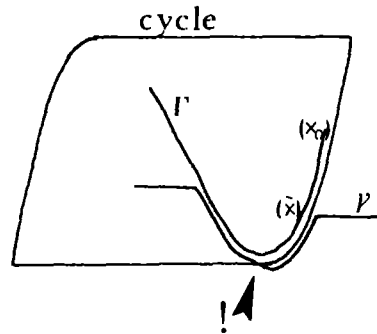
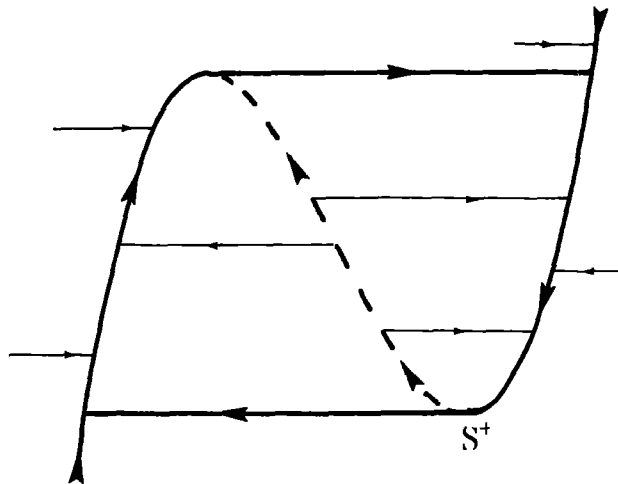


Fig. 13.

Les solutions qui longent la partie répulsive de la cubique ne peuvent donc provenir que du point singulier instable situé dans le halo du sommet  $S^+$ : nous avons là un peigne.

L'ombre du feuilletage est complètement déterminée: voir figure 14.

Fig. 14. Ombre du feuilletage ( $a \simeq 1$ , grand cycle).

On peut remarquer la similitude de cette figure et de la figure 4:

**PROPOSITION.**

*Le cas  $a \ll 1$  se prolonge sans modification aux valeurs de  $a$  équivalentes à 1 pour lesquelles le cycle ne s'est pas encore transformé en canard.*

**2. Cas où le système n'a ni grand cycle ni cycle-canard.**

Soit  $D$  la demi-droite  $\left(x = 1, u > -\frac{2}{3}\right)$ , et soit  $\pi$  l'application de premier retour de Poincaré de  $D$  sur elle-même. Il est évident que cette application  $\pi$  est définie, continue et croissante sur  $D$ . Ses points fixes correspondent aux cycles du système.

Remarquons que, si  $\varphi(x) \in [-1, 1[$ , l'ordonnée du point  $(\varphi(x))$  est strictement supérieure à celle du point  $(x)$ . (On peut démontrer cette propriété de  $\varphi$  par un calcul, ou, plus élégamment, en en faisant une conséquence de l'unicité ou de la stabilité des canards; cette propriété n'est pas nécessairement conservée si on remplace dans le système la cubique par une autre courbe ayant même sens de variation [Dm 2], voir alors [B]).

**LEMME.** *Aucune trajectoire ne peut être un canard.*

En effet, supposons qu'il existe un canard  $\Gamma$  dont l'ombre contient le segment de cubique limité par les points  $(x_0)$  et  $(x_1)$ . Soit  $\tilde{x}$  une valeur telle que  $x_1 < \varphi(\tilde{x}) < 1 < \tilde{x} < x_0$ .

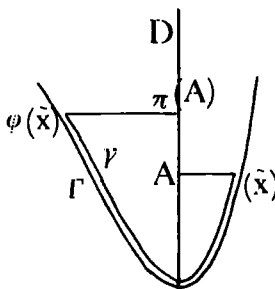


Fig. 15.

Soit  $\gamma$  la solution issue du point  $A$  de coordonnées  $\left(1, \frac{\tilde{x}^3}{3} - \tilde{x}\right)$ . Son ombre rencontre la cubique au point  $(\tilde{x})$  et la quitte au point  $(\varphi(\tilde{x}))$ ;  $\gamma$  et  $\Gamma$  n'ayant aucun point commun, l'ombre de  $\gamma$  se dirige ensuite vers la droite et l'ordonnée de  $\pi(A)$  est supérieure à celle de  $A$ .

D'autre part, on sait que si  $B$  est un point de  $D$  d'ordonnée assez grande, l'ordonnée de  $\pi(B)$ , équivalente à  $2/3$ , est inférieure à celle de  $B$ . Donc l'application  $\pi$  devrait avoir un point fixe entre  $A$  et  $B$ , ce qui est impossible puisque nous avons supposé que le système n'avait ni grand cycle ni cycle-canard.

Soit maintenant  $M$  un point de la demi-droite  $D$  d'ordonnée  $y$  telle que  $-2/3 < y < 2/3$ . D'où provient la solution  $\gamma$  arrivant en  $M$ ? Si on remonte le temps, le raisonnement habituel montre que  $\gamma$  provient du halo de  $S^+$ . De là, toujours en remontant le temps,  $\gamma$  pourrait avoir trois comportements (voir figure 16):

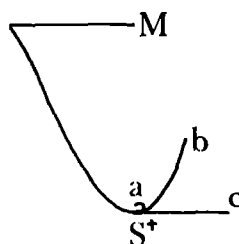
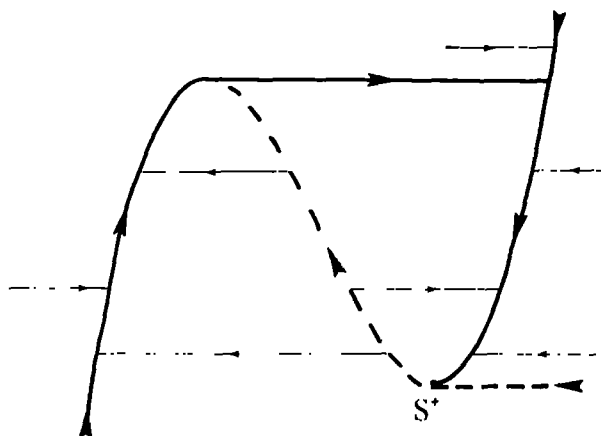


Fig. 16.

- a) rester dans le halo de  $S^+$ .
- b) longer la partie attractive de la cubique.
- c) provenir du halo de la demi-droite horizontale d'extrémité  $S^+$ .

Le comportement b) est impossible d'après le lemme démontré précédemment. Si  $\gamma$  avait le comportement a)  $\gamma$  recouperait la demi-droite  $D$  en un point  $A$  infiniment voisin de  $S^+$  et l'ordonnée de  $\pi(A) = M$  serait supérieure à celle de  $A$ , ce qui est absurde. Donc seul le dernier comportement est possible.

L'ombre du feuilletage est complètement déterminée: voir figure 17.

Fig. 17. Ombre du feuilletage ( $a \approx 1$ , ni grand cycle, ni cycle-canard).

On a donc le résultat suivant:

*PROPOSITION.*

le cas  $a \geq 1$  se prolonge sans modification aux valeurs de  $a$  équivalentes à 1, pour lesquelles il n'y a ni grand cycle, ni cycle-canard. L'apparition, par bifurcation de Hopf, d'un cycle infiniment petit, n'a aucune influence sur l'ombre du feuilletage.

3. Cas où le système a un canard sans tête:

Soit  $x_c$  l'abscisse du col du canard ( $x_c$  est par définition un nombre standard) et soit  $\bar{x}$  l'unique valeur telle que  $\varphi(\bar{x}) = x_c$ . Le point  $(\bar{x})$  a une ordonnée inférieure strictement à celle de  $x_c$  (voir fig. 18).

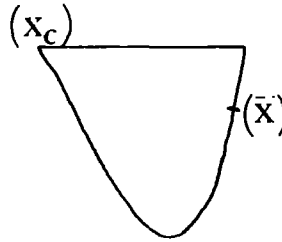


Fig. 18.

*PROPOSITION.*

Les seuls tunnel, peigne et entonnoirs sont les suivants:

- \* le segment de cubique limité par  $(\bar{x})$  et  $(x_c)$  est un tunnel: voir fig. 19 a
- \* la demi-droite horizontale d'extrémité  $(\bar{x})$  et le segment de cubique limité par  $S^-$  et  $(\bar{x})$  est un peigne: voir fig. 19 b
- \* le cycle-canard est un entonnoir, ainsi que les branches attractives de la cubique et le saut de  $S^-$  à (2) voir fig. 19 c

Soit  $\gamma$  une trajectoire dont l'ombre rencontre la cubique en  $(x)$ :

- \* si  $l < x < \bar{x}$ , on peut appliquer directement le théorème tunnel en prenant le cycle comme trajectoire de référence: l'ombre de  $\gamma$  quitte la cubique au point  $(\varphi(x))$  (car  $x_c = \varphi(\bar{x}) < \varphi(x)$ ): nous avons là le tunnel.



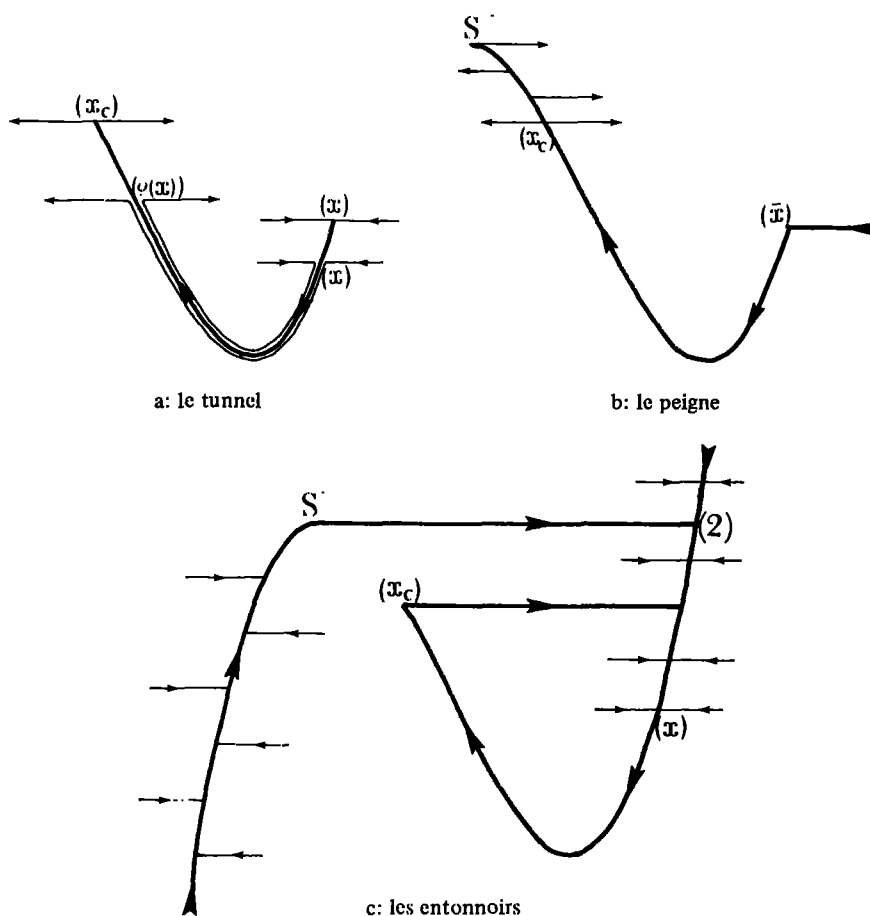


Fig. 19.

- \* si  $\bar{x} < x$ ,  $\gamma$  est piégée par les trajectoires du tunnel. Elle longe donc la cubique au moins jusqu'à  $(x_c)$ . Si elle longeait au-delà de  $(x_c)$ , on pourrait l'utiliser comme trajectoire de référence pour appliquer le théorème du tunnel, et on en déduirait que l'ombre du cycle quittant la cubique en  $(x_c)$  aurait dû rejoindre la cubique en  $(\bar{x})$ , ce qui est absurde.

L'ombre de  $\gamma$  quitte donc la cubique en  $(x_c)$ .

- \*  $x = \bar{x}$  est le seul cas où  $\gamma$  peut longer la cubique au-delà de  $(x_c)$ . Une telle trajectoire est nécessairement extérieure au cycle. Nous avons trouvé le peigne annoncé.
- \* si  $\bar{x} < x$ , on complète l'étude précédente: comme  $\gamma$  est piégée par les trajectoires du peigne, son ombre quitte la cubique vers la droite, comme le cycle: nous avons là les entonnoirs.

4. Cas où le système a un canard avec tête:

Ce cas est analogue au précédent,  $x_c$  désignant toujours l'abscisse du col et  $\bar{x}$  l'unique valeur telle que  $\varphi(\bar{x}) = x_c$ . (voir Fig. 20).

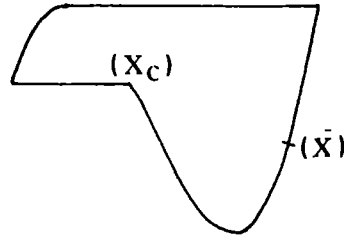


Fig. 20.

PROPOSITION.

Les seuls tunnel, peigne et entonnoirs sont les suivants:

- \* le segment de cubique limité par  $(\bar{x})$  et  $(x_c)$  est un tunnel: voir fig. 21 a
- \* l'ombre de trajectoire, provenant du point singulier et aboutissant au point  $(\bar{x})$  et le segment de cubique limité par  $S^-$  et  $(\bar{x})$  forment un peigne: voir fig. 21 b
- \* le cycle-canard ainsi que les branches attractives de la cubique forment des entonnoirs: voir fig. 21 c

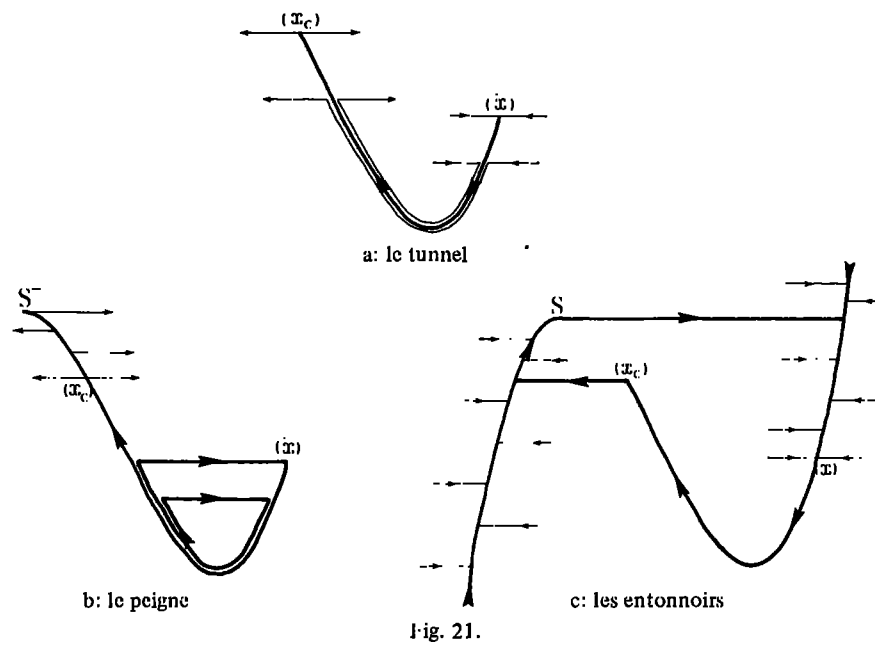


Fig. 21.

## IV. DEUX REMARQUES:

1. L'application  $\varphi$  et l'intégrale de la divergence du champ.

Soit  $\gamma$  le segment, limité par les points d'abscisse  $x_0$  et  $x_1$ , d'une trajectoire longeant la cubique au moins de  $(x_0)$  à  $(x_1)$ . (Fig. 22).

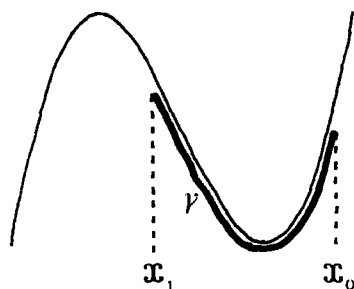


Fig. 22.

*PROPOSITION.*

Si  $E$  désigne l'intégrale de la divergence du champ sur  $\gamma$ ,  $\epsilon E$  est infiniment petit si et seulement si  $x_1 \simeq \varphi(x_0)$ .

En effet,  $\epsilon E = \oint_{\gamma} (1 - x^2) dt \simeq \oint_{\gamma} (x^2 - 1)(1 + x) dx$  car  $\gamma$  longe la cubique et donc  $\frac{dx}{dt} \simeq \frac{-1}{1+x}$ .

Or il résulte de la définition de  $\varphi$  que

$$\int_{x_0}^{\varphi(x_0)} (x^2 - 1)(1 + x) dx = 0$$

Donc

$$\epsilon E \simeq \int_{\varphi(x_0)}^{x_1} (x^2 - 1)(1 + x) dx$$

d'où la proposition. Autrement dit, si  $x_0$  est standard, soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux trajectoires longeant la cubique au moins de  $(x_0)$  à  $(\varphi(x_0))$ , d'équations respectives  $u = f_1(x)$  et  $u = f_2(x)$ . Le point  $(\varphi(x_0))$  est le point standard qui réalise au mieux la propriété idéale suivante:

$$f_2(x_0) - f_1(x_0) = f_2(\varphi(x_0)) - f_1(\varphi(x_0))$$

Le rapprochement des trajectoires  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  le long du segment de cubique  $(x_0) S^+$  est compensé par leur éloignement le long du segment  $S^+(\varphi(x_0))$ .

On comprend mieux alors le rôle de l'application  $\varphi$  dans l'étude précédente: si les ombres des trajectoires  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne sont pas confondues avant le point  $(x_0)$ , c'est que  $f_2(x) - f_1(x)$  est infiniment petit pour  $x$  compris nettement entre 1 et  $x_0$ , mais pas pour  $x$  nettement supérieur à  $x_0$ . Dans ces conditions, il est naturel que  $f_2(x) \cdot f_1(x)$  reste infiniment petit tant que  $x$  est nettement compris entre  $\varphi(x_0)$  et 1, mais plus quand  $x$  est nettement inférieur à  $\varphi(x_0)$ . Ceci montre que les ombres de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  doivent se séparer au point  $(\varphi(x_0))$ .

C'est ce qui se passe non seulement pour le tunnel, mais aussi quand on compare les trajectoires du peigne et celles de l'entonnoir: les ombres des premières rencontrent la cubique en  $(\bar{x})$ , celles des secondes quittent la cubique en  $(\varphi(\bar{x}))$ .

## 2. Le rideau.

Il s'agit ici de voir comment se modifie l'ombre du feuilletage au cours de l'effet-canard. Celui-ci est en principe paramétré par  $a$ , mais la variation de  $a$  pendant le phénomène est infiniment petite. Le paramètre  $x_b$  (abscisse du bec du canard) est ici beaucoup plus commode, car sa partie standard varie (de  $-2$  à  $+1$ ) pendant l'effet-canard et caractérise l'ombre du feuilletage.

Pendant cette variation de  ${}^\circ x_b$ , peigne et entonnoirs bougent; de plus, c'est seulement quand  ${}^\circ x_b$  est strictement compris entre  $-2$  et  $+1$  qu'apparaît le tunnel dont l'évolution est la suivante: les extrémités  $(x_c)$  et  $(\bar{x})$  du tunnel vérifient:

$$\text{pour } {}^\circ x_b = -2, \quad x_c = \bar{x} = 1$$

$$\text{pour } {}^\circ x_b = -1, \quad x_c = -1 \quad \bar{x} = 5/3$$

$$\text{pour } {}^\circ x_b = 1, \quad x_c = \bar{x} = 1$$

(on vérifie par un calcul facile que  $\varphi(5/3) = -1$ ).

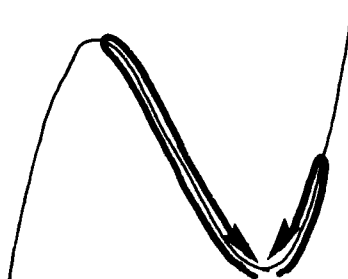


Fig. 23. Variation des extrémités du tunnel.

Au cours de la variation de  $\circ x_b$ , apparaît donc tout un domaine  $\mathcal{U}$  (hachuré sur la figure 24) où le comportement des ombres de trajectoires est déterminé par l'application  $\varphi$ . Cette application étant indépendante de  $a$ , on a la proposition suivante:

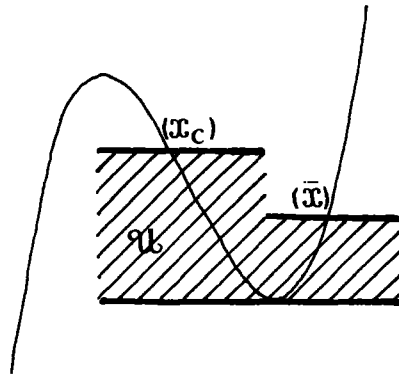


Fig. 24.

*PROPOSITION.*

*L'ombre du feuilletage est invariante dans le domaine  $\mathcal{U}$ , seule la taille de  $\mathcal{U}$  varie.*

Quand  $\circ x_b$  varie,  $(x_c)$  et  $(\bar{x})$  se déplacent pour dévoiler un moment le domaine  $\mathcal{U}$  et ses propriétés. C'est cela que nous appelons *rideau*.

