

## CHASSE AU CANARD

par

ÉRIC BENOIT, JEAN LOUIS CALLOT, FRANCINE DIENER et MARC DIENER

### AVANT PROPOS

Les pages qui suivent sont le fruit d'un travail d'équipe effectué dans l'ouest algérien (\*), où les quatre auteurs ont la chance d'être réunis depuis plusieurs années. Chaque partie comporte les résultats propres à son ou ses auteurs, mais il va sans dire que, de part nos échanges permanents, nous avons tous contribué au travail de recherche de chacun. C'est pour marquer cette étroite collaboration que ces trois textes paraissent sous un titre commun.

Le travail du groupe oranais n'a été possible que grâce au soutien logistique de l'équipe non standard de Strasbourg et Mulhouse, et tout particulièrement de REEB, à qui nous devons l'idée d'examiner les canards et, avant elle, celle plus générale d'étudier les perturbations singulières d'équations différentielles à l'aide de l'Analyse Non Standard.

La première partie reprend, pour l'essentiel, les résultats de la précédente version de la «Chasse au canard» (I R M A 1978), améliorés (nous l'espérons) et approfondis. Les deux parties suivantes sont nouvelles.

---

(\*) Jean Louis CALLOT et Francine et Marc DIENER enseignent à l'Université d'Oran et Eric BENOIT enseigne au centre universitaire de Tlemcen. Notre groupe comporte, en outre, Rachid BIRBOUCHE, Nicolas de VALLIERE et Imme VAN DEN BERG.

## PREMIERE PARTIE

## LES CANARDS

par

FRANCINE DIENER et MARC DIENER

## I. INTRODUCTION.

Nous étudions ci-dessous le comportement pour  $\epsilon$  petit, des solutions de l'équation

$$(E_\epsilon) \quad c\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x - a = 0 \quad c > 0$$

Cette étude fait apparaître des objets mathématiques nouveaux — les canards — qui jouent un rôle essentiel lors des changements de comportement des solutions.

1. *On chasse le canard.*

Décrivons rapidement le cas où  $\epsilon = 0,01$ . Une étude classique de cette équation, ne prenant pas en compte la relative petitesse de  $\epsilon$ , montrerait que, tant que  $|a| < 1$ , l'équation  $(E_a)$  admet une (unique) solution périodique (à changement d'origine des temps près) et que, dès que  $|a| \geq 1$ ,  $(E_a)$  n'admet plus de solution périodique, mais un état stationnaire stable ( $x = a$ ) vers lequel tendent toutes les solutions. Une étude plus attentive, au voisinage de  $a = 1$  révélerait la présence d'une bifurcation de Hopf pour  $a = 1$ , qui se caractérise entre autre par une décroissance en  $\sqrt{1-a}$  de l'amplitude de la solution périodique, alors que la période reste à peu près constante.

Si, à présent, on effectue une étude numérique (et cela peut se faire à l'aide de la plus modeste calculatrice programmable, même de poche), toujours pour  $\epsilon = 0,01$ , qu'observe-t-on? Pour  $a = 0$ , et quelle que soit la condition initiale choisie (non nulle) la solution se placera très rapidement dans un état oscillant entre les valeurs

2 et  $-2$  approximativement, chaque oscillation alternant des phases d'évolution lente de  $x$  et des bonds. Si l'on change de valeur de  $a$ , en posant par exemple  $a = 0,5$ , on retrouve ce même comportement des solutions, de même en posant  $a = 0,9$  ou  $a = 0,99$ . Brusquement, pour  $a = 0,999$  par exemple, la situation change et les solutions n'oscillent plus qu'entre  $x = 0,6$  et  $x = 1,3$  environ.

On cherche alors une valeur intermédiaire de  $a$  permettant d'obtenir des oscillations d'amplitude moyenne des précédentes: *on chasse le canard*. Mais rien n'y fait: pour  $a = 0,9987404512$ , l'amplitude sera d'environ 3,9 et pour  $a = 0,9987404513$  cette amplitude tombe à 0,7. À croire qu'il y a là une discontinuité. Quant à la période, elle passe, elle, de 2,9 à 1,5 approximativement. C'est ce brusque changement du comportement des solutions que nous nous proposons d'étudier. Un mot encore sur l'étude numérique du cas  $\epsilon = 0,01$ : lorsqu'on augmente la valeur de  $a$  au-delà de la valeur critique 0,9987404513, les oscillations diminuent graduellement en amplitude, sans modification notable de la période, pour finalement disparaître pour  $a = 1$ : on reconnaît là, la bifurcation du Hopf escomptée.

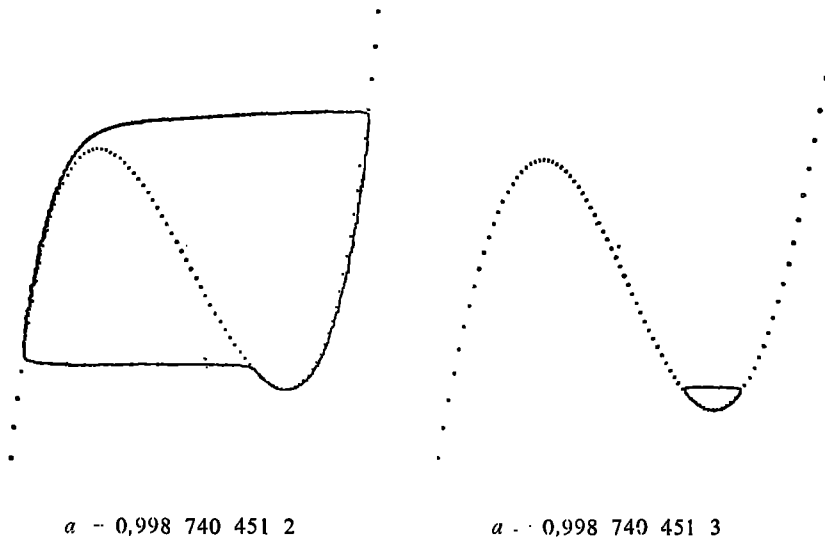


Figure 1. — Cycle de  $U_a$  lorsque  $\epsilon$  n'est pas infiniment petit, mais que  $\epsilon = 0,01$

## 2. $\epsilon$ petit, infiniment.

Nous avons dit que nous intéressons au cas où  $\epsilon$  est petit. Ceci a un sens relativement clair dans la pratique. Mathématiquement également: il suffit d'étudier, s'il existe, le comportement limite des solutions lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Grâce à A. ROBINSON [Ro], il est possible d'étudier ce comportement limite sans pour autant avoir à considérer une variable supplémentaire  $\epsilon$ : il suffit pour cela de donner à  $\epsilon$  une valeur infinitésimale non nulle fixée. Cette méthode apparaît même comme élémentaire lorsqu'on a pu être introduit aux méthodes non classiques par G. REEB. A défaut, on pourra se reporter à [Re], [L-G], [N] ou [L-S]. En fait, nous avons cherché à ce que notre étude puisse être abordée sans connaissance préalable de l'analyse non-standard: une bonne part de nos résultats découlent de l'existence, dans la droite réelle  $\mathbf{R}$ , d'un  $\epsilon > 0$  infiniment petit (i.e. plus petit que tout réel classique positif). Qui veut bien l'admettre, constatera que cette existence est à la fois très naturelle et riche de conséquences. On peut cependant se demander quelle est l'utilité de montrer des résultats relatifs à  $\epsilon$  infiniment petit; en effet, dans la pratique  $\epsilon$  peut être petit (par exemple égal à 0,1 ou 0,000001), mais jamais infiniment! Rappelons donc  $\mathcal{N}$ : qu'on sait associer à tout énoncé non-standard (théorème ou définition) un énoncé standard équivalent: ainsi, si une proposition standard (telle que l'unicité ou l'existence d'un cycle) est établie «pour  $\epsilon$  infiniment petit», ceci revient à dire que cette même proposition est vraie «pour  $\epsilon$  suffisamment petit», au sens habituel. Si nous avons choisi de ne pas donner cet énoncé classique équivalent, c'est que la lourdeur de ce dernier gâcherait une bonne part de la saveur du résultat. Ainsi l'hypothèse «si ' $a$ '  $\ll 1$ , ...» du théorème I deviendrait «pour tout germe  $a(\epsilon)$  de fonction en 0 tel que ' $a(\epsilon)$ '  $< 1$  et tel que pour aucune suite  $(\epsilon_n)$  tendant vers zéro, on ait  $\lim |a(\epsilon_n)| = 1$ , ...». Que dire alors de la définition classique d'un canard (cf. IV). Un mot sur la terminologie: on dira que  $x$  est *équivalent* à  $y$  (noté  $x \simeq y$ ) si  $x - y$  est infiniment petit et que  $x$  est *nettement inférieur* à  $y$  (noté  $x \ll y$ ) si  $x$  est inférieur à  $y$  et non équivalent à  $y$ . Si un adjectif (par exemple horizontal) sert à qualifier les objets annulant une fonction (ici, la pente), ce même adjectif, précédé de l'adverbe «quasi» qualifiera les objets donnant une valeur infiniment petite à cette fonction,

On obtient ainsi les locutions quasi-vertical, quasi-rectiligne, etc... Enfin, le halo  $E$ , noté  $h(E)$  désignera l'ensemble (externe  $\mathbb{T}$ - $G$ ) des points qui sont infiniment proches de  $E$ .

### 3. Le champ $\mathcal{U}_a$ associé à $(E_a)$ dans le plan de Liénard.

L'étude d'une équation différentielle du second ordre s'effectue généralement en introduisant la variable auxiliaire  $\dot{x}$  et en associant à l'équation un champ de vecteurs dans le «plan des phases». Pour  $(E_a)$ , suivant l'exemple de Liénard [L] on introduit tout d'abord la variable

$$u = c\dot{x} - F(x), \text{ où } F(x) = x^3/3 - x.$$

L'étude qualitative de  $(E_a)$  est donc ramenée à celle du champ de vecteurs

$$\mathcal{U}_a \begin{cases} \dot{x} = (1/\epsilon)(u - F(x)) \\ \dot{u} = a - x \end{cases}$$

dans le «plan de Liénard»  $\mathbf{R}_{xu}^2$ . Du fait du coefficient infiniment grand  $1/\epsilon$ , les solutions, comme nous le verrons, sont soumises à deux régimes, selon que  $\mathcal{U}_a(x, u)$  est fini ou infiniment grand: le champ  $\mathcal{U}_a$  est un «champ lent-rapide».

Remarquons que la symétrie centrale  $(x, u) \rightarrow (-x, -u)$  échange les champs  $\mathcal{U}_a$  et  $\mathcal{U}_{-a}$ . A partir du III nous nous bornerons donc au cas  $a \geq 0$ .

## II. LE CAS $|a| \neq 1$ .

**THEOREME 1.** *Si  $|a| \ll 1$ , le champ  $\mathcal{U}_a$  admet un unique cycle limite (grand-cycle).*

L'essentiel de ce chapitre sera consacré à la démonstration de ce théorème. Comme on suppose que  $|a| \ll 1$ , cette démonstration ne présente guère de nouvelle difficulté par rapport au cas  $a = 0$ , traité dans [T U].

Elle nous permettra par contre de fixer certaines terminologies

et de présenter quelques techniques non-standard qui constituent une nouvelle approche des «systèmes différentiels comportant des petits paramètres devant la plus haute dérivée» [P], ou des «systèmes déferlants» [V].

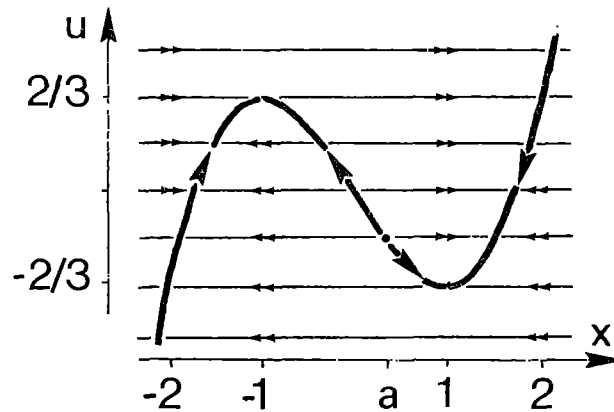


Figure 2

### 1. Le plan de Liénard.

Une propriété remarquable du champ  $\mathcal{U}_a$  est certainement que, tant que  $u \neq F(x)$ , donc tant qu'un point n'appartient pas au halo de la cubique  $C$  d'équation  $u = F(x)$ , la première composante du champ est infiniment grande, alors que la seconde est finie (du moins pour les points finis que seuls nous considérerons, sauf mention contraire).

De ce fait, comme nous allons le montrer, la solution de  $\mathcal{U}_a$  issue d'un point, n'appartenant pas à  $h(C)$  (i.e. le halo de  $C$ ) commence par se rendre quasi horizontalement, et à vitesse  $\dot{x}$  infiniment grande dans  $h(C)$ , et plus précisément dans le halo des «branches croissantes»  $C^+$  et  $C^-$  de  $C$  (constituées des points de  $C$  d'abscisse  $x > +1$  et  $x < -1$  respectivement), que, de ce fait, nous qualifierons *d'attractives*, alors que nous qualifierons de *répulsive* la portion décroissante  $C^0$  de  $C$  (fig. 3).

Une fois dans  $h(C^\pm)$ , la solution *longera*  $C^\pm$  dans le sens indiqué sur la figure 2, c'est-à-dire qu'elle restera infiniment proche

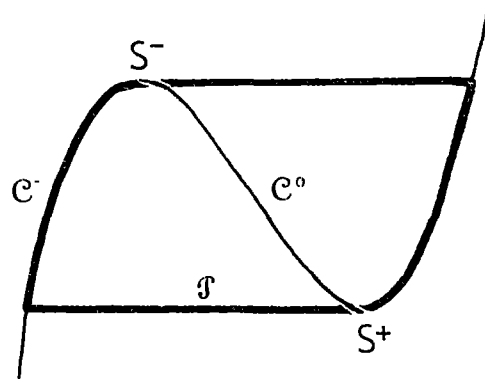


Figure 3

de  $C^\#$ . Nous verrons que ceci s'effectue à vitesse finie  $\dot{x} \simeq (a - x) / (x^2 - 1)$ , ce qui explique le nom de *courbe lente de  $\mathcal{U}_a$*  par lequel nous désignerons encore  $C$ . Arrivée dans le halo d'un «sommet»  $S^-$  ou  $S^+$  de  $C$ , la solution reprend sa «course quasi horizontale». Indiquons dès à présent que c'est ce dernier comportement qui ne sera plus assuré dans le cas  $|a| \simeq 1$ . Nous voyons donc qu'après avoir longé un segment horizontal, puis un segment de  $C$ , toute solution issue d'un point fini  $M_0 \notin h(C)$  reste contenue dans le halo du «parallélogramme curviligne»  $\mathcal{P}$  (fig. 3).

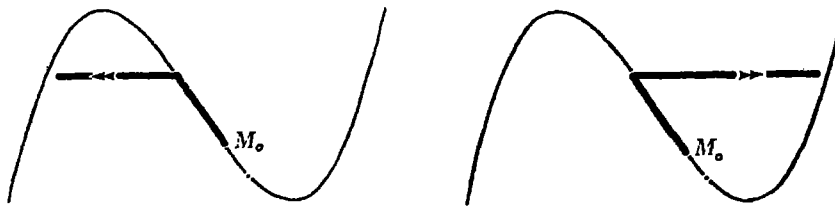


Figure 4

Avant de passer à la démonstration de ce que nous venons d'énoncer, indiquons encore brièvement le comportement de la solution issue d'un point  $M_0$  de  $h(C^0)$ . Elle commence éventuellement par longer  $C^0$  à vitesse finie avant de «sauter» en longéant un segment horizontal (sauf évidemment si  $M_0$  est le point singulier  $(a, F(a))$ )

de  $\mathcal{U}_a$ ). Il n'est cependant pas facile d'indiquer, même à un infiniment petit près, l'ordonnée du segment horizontal que longera la solution, ni même si elle sautera «à gauche» ou «à droite» (figure 4). Nous ne nous attarderons plus ci-dessous, dans le cas  $|a| \simeq 1$ , sur le comportement de ces solutions jusqu'à ce qu'elles aient quitté  $h(C)$ .

Ce que nous venons d'en dire s'obtient facilement en appliquant les raisonnements que nous ferons aux demi-trajectoires négatives au lieu des demi-trajectoires positives.

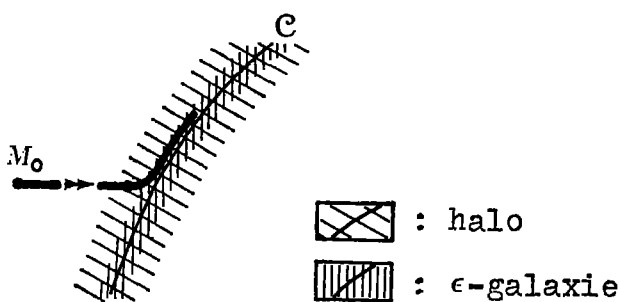


Figure 5

Venons en donc à la démonstration: comme nous l'avons déjà remarqué, la pente du champ  $\mathcal{U}_a$  est infiniment petite en dehors du halo de  $C$ . En fait, ceci est même vrai en dehors de l' $\epsilon$ -galaxie de  $C$ ,  $c\text{-gal}(C)$ , c'est-à-dire en dehors de l'ensemble (externe) des points dont la distance à  $C$  est égale à  $r\epsilon$ , avec  $r$  fini. En appliquant le théorème des accroissements finis, et en menant un raisonnement de type classique, on montre que tant qu'une solution de  $\mathcal{U}_a$  issue d'un point  $M_0 = (x_0, u_0) \notin h(C)$  reste en dehors de l' $\epsilon$ -galaxie de  $C$  (et reste finie), son ordonnée  $u(t)$  reste équivalente à l'ordonnée initiale  $u_0$ . En tenant compte à présent du sens du champ (fig. 2) et en remarquant que  $\mathcal{U}_a$  n'admet pas de point singulier en dehors de  $c\text{-gal}(C)$ , on montre que la *demi-trajectoire positive* de  $M_0$  pénètre dans l' $\epsilon$ -galaxie de  $C$ . Comme par continuité la solution atteint le halo avant l' $\epsilon$ -galaxie (fig. 5), nous voyons que la demi-trajectoire positive reste quasi-horizontale jusque dans le halo de  $C$ . En d'autres termes, nous venons de montrer que la demi-trajectoire d'un point fini  $M_0 \notin h(C)$  commence par un segment de trajectoire dont l'om-



bre (1) est un segment de droite horizontale joignant la partie standard de  $M_0$  à un point attractif de  $C$  ou à un sommet  $S^+$  ou  $S^-$ .

Avant d'aborder le comportement d'une solution dans  $h(C)$  remarquons que par un raisonnement de type classique fondé sur le théorème d'unicité, on montre que, lorsque la solution a atteint le halo de  $C^+$  ou  $C^-$ , elle ne le quittera plus tant qu'elle n'aura pas atteint le halo d'un «sommet»  $S^+$  ou  $S^-$  (fig. 2). Nous dirons qu'elle longe  $C$  jusqu'à  $S^+$  ou  $S^-$ .

## 2. Le plan des phases.

Nous avons vu que toute solution de  $\mathcal{U}_a$  pénètre dans l' $\epsilon$ -galaxie de  $C$ . Considérons donc le grossissement de  $\mathbf{R}^2xv$  au voisinage de  $C$  obtenu en posant  $v = (1/\epsilon)(u - T(x))$ . Le champ  $\mathcal{U}_a$  devient:

$$\mathcal{V}_a \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = (1/\epsilon)(a - x - (x^2 - 1)v) \end{cases} .$$

Remarquons que le plan  $\mathbf{R}^2xv$  n'est rien d'autre que le plan des phases associé à  $(E_a)$ . Par définition, les points de l' $\epsilon$ -galaxie de  $C$  du plan de Liénard correspondent aux points finis du plan des phases.

Nous voyons qu'à cette nouvelle échelle, le pente du champ est infiniment grande cette fois, en dehors de l' $\epsilon$ -galaxie de la courbe  $\mathcal{H}_a$  d'équation  $(x^2 - 1)v - x - a = 0$ . En raisonnant comme précédemment, on montre que la demi-trajectoire positive (pour  $\mathcal{V}_a$ ) d'un point fini d'abscisse  $x$  telle que  $|x| > 1$  (i.e. correspondant à un point du plan de Liénard appartenant à  $c\text{-gal}(C^+ \cup C^-)$ ) est donc quasi-verticale jusque dans le halo de  $\mathcal{H}_a$ , puis qu'elle longe  $\mathcal{H}_a$  dans le sens indiqué sur la figure 6. En effet, le sens de déplacement de la

(1) Rappelons que, comme  $\mathbf{R}$  est complet, tout point fini (i.e. dont les coordonnées sont finies)  $M$  de  $\mathbf{R}^2$  est infiniment proche d'un unique point standard  ${}^sM$  (i.e. dont les coordonnées sont standard) appelé *partie standard* de  $M$ . L'ombre d'un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$  est l'unique ensemble standard dont les éléments standard sont les parties standard des éléments du sous-ensemble (existence et unicité assurées respectivement par les axiomes de Standardisation et de Transfert de I.S.T., cf. [N] et [L-G]). En d'autres termes, c'est l'ensemble standard qui lui est infiniment proche.

solution se déduit du fait que, cette solution restant contenue dans  $h(\mathcal{H}_a)$ , on a

$$\dot{x} - v \simeq (a - x)/(x^2 - 1).$$

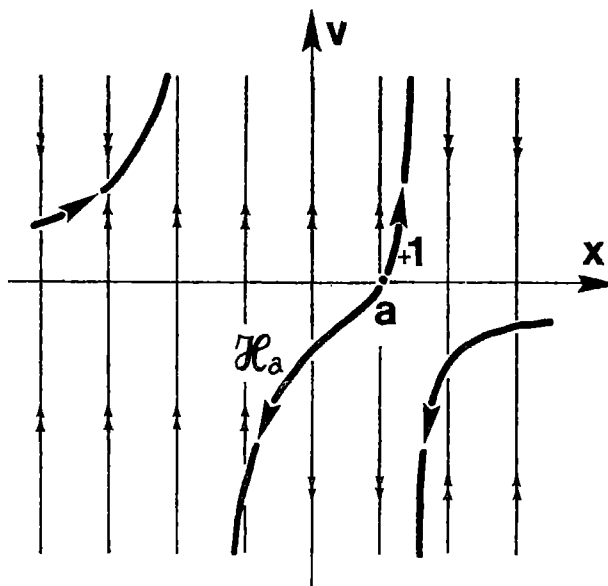


Figure 6

Nous avons donc établi que les solutions de  $\mathcal{U}_a$  longent  $C^+ \cup C^-$  avec une vitesse finie  $\dot{x} \simeq (a - x)/(x^2 - 1)$  dans le sens indiqué sur la figure 2.

### 3. Questions de «aboutage».

Nous disposons donc, à présent, de deux informations complémentaires sous le comportement d'une solution de  $(E_a)$  selon que son point représentatif dans le plan de Lienard appartient ou n'appartient pas à l'*c*-galaxie de  $C$ , ou, ce qui revient au même, selon que  $\dot{x}$  est fini ou infiniment grand. Le fait que la dichotomie ne soit pas interne impose qu'on s'attarde un peu à la mise bout-à-bout de ces deux informations. Le problème peut se formuler ainsi: quelle est l'ombre, dans le plan de Lienard, de la portion de trajectoire qui aboutit, dans le plan des phases cette fois, au point  $(x_0, v_0) \notin h(\mathcal{H}_a)$ ,

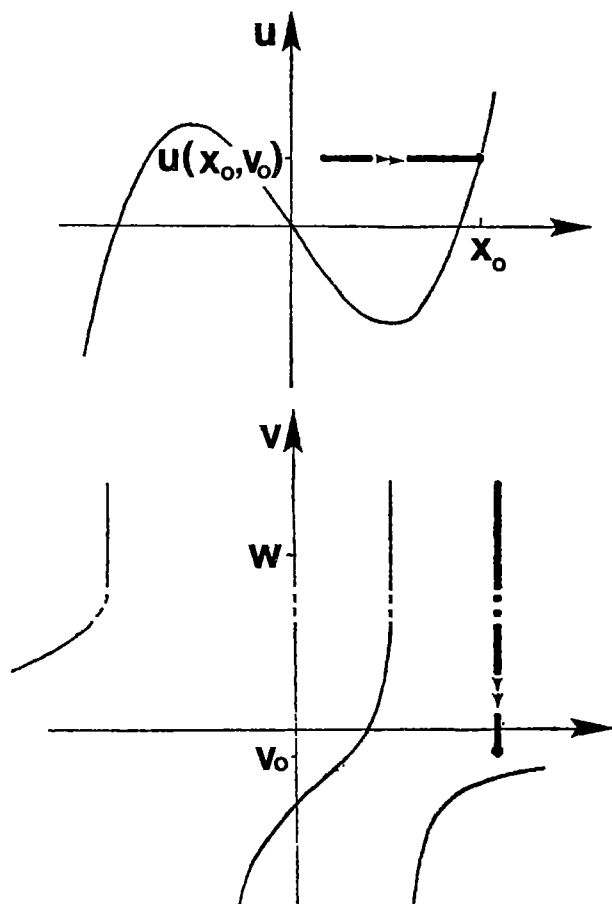


Figure 7

$|x_0| \gg 1$ . Ce type de problème, courant en analyse non-standard (et en analyse classique où il se rencontre lorsqu'il s'agit de rattacher deux développements d'une même fonction) se résout ici à l'aide du lemme de Robinson... (2) [Re] et de son corollaire immédiat, le «principe de permanence» (3) [L-G].

(2) Lemme de Robinson: «Si un ensemble interne contient tous les réels finis plus grand qu'un réel fini fixé, il contient certains infiniment grands» (sans quoi l'intersection de cet ensemble avec  $\mathbf{N}$  serait en contradiction avec le théorème de récurrence).

(3) Principe de permanence: «Si une fonction interne  $f: [r, \omega] \rightarrow \mathbf{R}$ , où  $r$  est fini et  $\omega$  est infiniment grand, est infiniment petite sur les réels finis, elle est encore infiniment petite sur certains réels infiniment grands» (Appliquer le lemme de Robinson à  $\{x \in [r, \omega], |x f(x)| \leq 1\}$ ).

Examinons, pour fixer les idées, le cas où  $x_0 \gg 1$  et  $v_0 \gg (a - x)/(x^2 - 1)$ . Désignons par  $\bar{x}$  la fonction de  $v$  dont le graphe (figure 7) est la demi-trajectoire négative aboutissant à  $(x_0, v_0)$ . Son domaine de définition est un ensemble interne qui contient un moins tous les intervalles  $[v_0, v_1]$  avec  $v_1$  fini, donc également un intervalle  $[v_0, w_1]$  avec  $w_1$ , infiniment grand (lemme de Robinson). On déduit de l'étude faite au paragraphe précédent, que pour tout  $v \geq v_0$ ,  $v$  fini, on a  $\bar{x}(v) \simeq x_0$ . Par le principe de permanence, la fonction  $\bar{x}(v) - x_0$  étant infiniment petite pour tout  $v$  fini, il existe un infiniment grand  $w$  tel qu'elle soit également infiniment petite pour tout  $v \leq w$ . Mais le point  $(x(w), w)$  du plan des phases correspond à un point  $(\bar{x}(w), u)$  du plan de Liénard qui n'appartient pas à l' $\epsilon$ -galaxie de  $C$  et auquel on peut appliquer l'étude du plan de Liénard.

On peut donc répondre à la question posée: avant d'atteindre, dans le plan de Liénard, le point  $(x_0, u(x_0, v_0))$ , l'ombre de la trajectoire est horizontale et atteint  $C$  au point  $({}^0x_0, F({}^0x_0))$  -- ce qui n'est rien d'autre que ce qu'on imaginait. (4)

On montrerait de façon tout à fait semblable que la trajectoire de  $(x_0, v_0)$  atteint  $h(\mathcal{H}_a)$  en des points d'abscisse équivalente à  $x_0$ , et que la solution passant par  $(x_0, v_0)$  relie en un temps infiniment court un point où  $v$  est infiniment grand à un point où  $v$  est équivalent à  $(a - x)/(x^2 - 1)$ .

Pour en terminer avec notre «étude par tronçons», il nous reste à présent un dernier problème de «rabotage»: le passage du régime lent au régime rapide à proximité d'un sommet  $S^\pm$ , encore appelé *saut* (5). Examinons par exemple le cas de  $S^+$ . Il est clair qu'une trajectoire de  $\mathcal{U}_a$  ayant longé  $C^+$  doit recouper la droite  $D$  d'équation  $x = 1$  en un point du halo de  $S^+$ . Nous allons montrer que le *point d'intersection avec  $D$  n'appartient pas à l' $\epsilon$ -galaxie de  $S^+$* . En effet, considérons la solution correspondante de  $\mathcal{V}_a$  (plan des phases). Comme nous l'avons vu, lorsque  $x \gg 1$ , la solution longe  $\mathcal{H}_a$  (néces-

(4) Ce type de problème est en général étudié dans une approche heuristique de la question, et il est bon qu'il en soit ainsi: ces questions ne semblent pas devoir tromper l'intuition. On pourra cependant méditer au champ  $(\dot{x}, \dot{u}) = (x^2/\epsilon, -1)$ . Dans ce cas la courbe lente  $D$  est la droite  $\{x = 0\}$ . Les trajectoires  $u = \epsilon/x \pm c$  sont quasi-horizontales hors de  $\epsilon$ -gal( $D$ ), mais ne le restent pas jusqu'en des points de  $\epsilon$ -gal( $D$ ). En effet, sur une trajectoire quelconque (différente de  $D$ ) tout point de  $\epsilon$ -gal( $D$ ) est d'ordonnée non équivalente à celle de tout point n'appartenant pas à  $\epsilon$ -gal( $D$ ).

(5) On trouvera une étude non standard détaillée du saut dans [T U].

sairement au-dessus de  $\mathcal{H}_a$ ), donc  $v \simeq (a - x)/(x^2 - 1)$ . En vertu du principe de permanence, ceci sera encore vrai pour des  $x (> 1)$  équivalents à 1;  $v$  est alors infiniment grand négatif. Or  $v$  ne peut que diminuer jusqu'à ce que la solution franchisse la droite  $D$ , d'où notre affirmation. Ceci permet d'assurer le saut. Un effet, en revenant au plan de Liénard, on en déduit qu'au point d'intersection de la solution avec  $D$ , le champ  $\mathcal{U}_a$  est à nouveau infiniment grand et de pente infiniment petite: la solution a donc déjà repris sa course quasi-horizontale. Elle rejoindra  $h(C^-)$  dans le halo du point  $(-2, -2/3)$ .

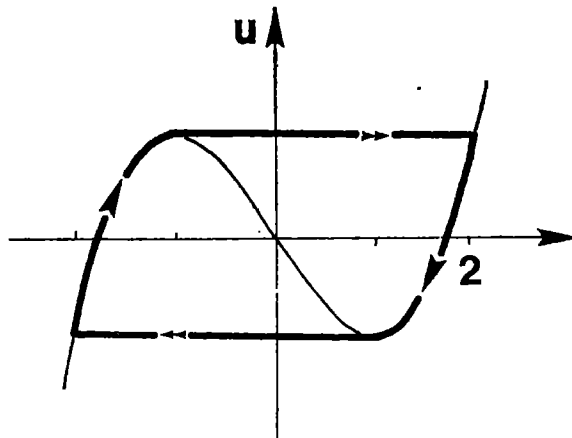
#### 4. Existence d'un grand cycle.

Nous désignerons par *grand-cycle* une trajectoire fermée de  $\mathcal{U}_a$  dont l'ombre est le parallélogramme curviligne  $\mathcal{P}$  (fig. 8). De l'étude qui précède, il résulte que  $\mathcal{U}_a$  admet un grand-cycle. En effet, soit  $\sigma$  un segment fermé standard, centré sur  $\mathcal{P}$  et transverse à  $\mathcal{U}_a$ ; par exemple  $\sigma = \{1\} \times [1/3, 1]$  (Fig. 9). Toute demi-trajectoire positive de  $\mathcal{U}_a$  issue de  $\sigma$  recoupe  $\sigma$  en un point d'ordonnée équivalente à  $+2/3$ , ce qui induit une application continue  $\pi$  de  $\sigma$  dans lui-même (l'application de premier retour de Poincaré), et qui donc admet un point fixe. Par construction, ce point appartient à un grand-cycle de  $\mathcal{U}_a$ . Notons que pour un grand-cycle, les valeurs extrémales de la solution périodique correspondante  $x(t)$  de  $(E_a)$  sont équivalentes à  $+2$  et  $-2$ , d'où, suivant Adam Riese, une amplitude équivalente à 4.

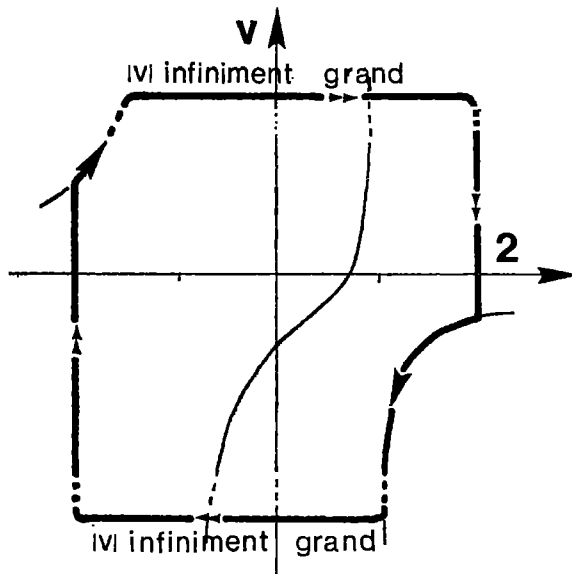
#### 5. Unicité du grand-cycle.

Nous allons montrer que tout grand-cycle est asymptotiquement stable. On sait par ailleurs que deux cycles asymptotiquement stables ne peuvent border une couronne ne contenant ni cycle instable, ni point singulier. Le champ  $\mathcal{U}_a$  ne peut donc admettre plus d'un grand-cycle.

Soit  $\Gamma$  un grand-cycle de  $\mathcal{U}_a$ . Pour voir que  $\Gamma$  est asymptotiquement stable, il suffit de montrer que la dérivée  $\pi'$  de l'application de Poincaré introduite au paragraphe précédent, est strictement inférieure à 1 au point  $J = \Gamma \cap \sigma$ . C'est un résultat classique que  $\pi'(J) = e^E$  où  $E$  est l'exposant caractéristique non nul de  $\Gamma$ . Or  $E < 0$ . En effet,



Grand cycle (dans le plan de Liénard)



Grand cycle vu dans le plan des phases  
Figure 8

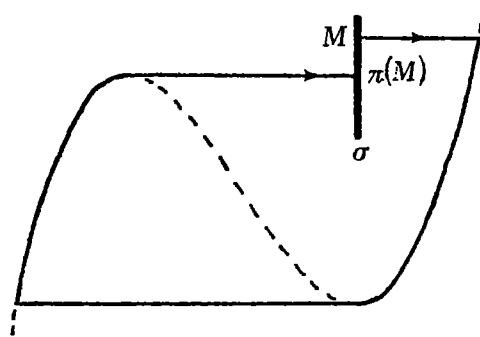


Figure 9

$$\epsilon E = \epsilon \oint_{\Gamma} \operatorname{div}(\mathcal{U}_a) dt = \oint_{\Gamma} (x^2 - 1) dt = \oint_{\Gamma \cap \{|x| \leq 1\}} (x^2 - 1) dt + \oint_{\Gamma \cap \{|x| > 1\}} (x^2 - 1) dt =: I_1 + I_2,$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont respectivement positif et négatif.

Nous avons vu que lorsque  $|x(t)| < 1$ ,  $\dot{x}(t)$  est infiniment grand. Donc, sur  $I_1$ , les deux traversées de la bande  $\{|x| \leq 1\}$  s'effectuent en un temps infiniment court, d'où  $I_1 \simeq 0$ . Au contraire, tant que  $|x| \gg 1$  et que la solution longe  $C$ ,  $\dot{x}$  est équivalent à  $(a - x)/(x^2 - 1)$  et est donc fini; on en déduit que sur  $I_2$ , l'incursion dans les demi-plans  $\{x < -1\}$  et  $\{x > +1\}$  s'effectue en un temps non infiniment petit, d'où  $I_2 \ll 0$ . Finalement  $\epsilon E < 0$ , d'où  $E < 0$ .

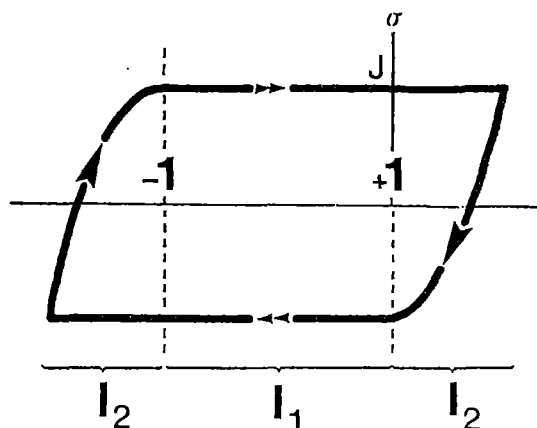


Figure 10

## 6. Fin et suite.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il convient de montrer qu'il ne peut exister, pour  $|a| \gg 1$ , d'autres cycles que des grands-cycles. Du premier paragraphe (fig. 2), il résulte qu'un tel cycle serait, soit infiniment grand, soit infiniment petit et contenu dans le halo du point singulier. Il ne peut donc exister en vertu du théorème suivant:

**THEOREME 2.** *Si  $|a| \neq 1$  est fini,  $\mathcal{U}_a$  n'a pas de cycle infiniment petit.*

*Si  $a$  est fini,  $\mathcal{U}_a$  n'a pas de cycle infiniment grand.*

*Si  $a$  est fini et si  $|a| \gg 1$ ,  $\mathcal{U}_a$  n'a pas de cycle.*

*Preuve:* comme pour le cas  $|a| \ll 1$ , on montre que lorsque  $|a| \gg 1$ , en dehors de  $h(C)$  les solutions longent des droites horizontales, et lorsqu'elles longent  $C$ , on a, pour  $|x| \neq 1$ ,  $\dot{x} \simeq (a - x)/(x^2 - 1)$ . Les ombres des trajectoires ont donc le comportement indiqué sur la figure 11. On en déduit que si  $\mathcal{U}_a$  admet un cycle pour  $|a| \gg 1$ , celui-ci est, soit infiniment grand, soit infiniment petit et situé dans le halo du point singulier.

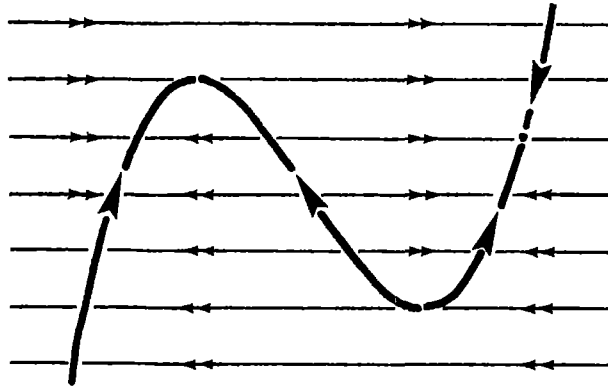


Figure 11

Soit à présent  $a \neq \pm 1$  et supposons par l'absurde que  $\mathcal{U}_a$  admette un cycle infiniment petit contenu dans le halo du point singulier  $(a, F(a))$ . Il existe donc  $\delta$  infiniment petit tel que ce cycle (qui entoure nécessairement le point singulier) soit de diamètre fini non infiniment petit dans le grossissement  $(X, U) = (x - a, u - F(a))/\delta$ . Or, à cette échelle, le champ  $\mathcal{U}_a$  devient

$$\mathcal{U}_a^{\text{gro}} \begin{cases} \dot{X} = \frac{1}{\epsilon} (U - (F(\delta X + a) - F(a))/\delta) \\ \dot{U} = -X \end{cases}$$

Comme  $F$  est standard, que  $a$  et  $X$  sont finis, et que  $\delta$  est infiniment petit, on a  $(F(a + \delta X) - F(a))/\delta \simeq F'({}^0a)X$ , et  $F'({}^0a) \neq 0$  puisque  $a \neq \pm 1$ . Le champ  $\mathcal{U}_a^{\text{gro}}$  est donc à nouveau un champ lent-rapide, où la courbe lente est cette fois la droite  $U = F'({}^0a)X$ . Les



ombres des trajectoires ont alors le comportement décrit sur la figure 12, d'où il ressort qu'à cette nouvelle échelle, il ne peut exister de cycle de diamètre fini non infiniment petit.

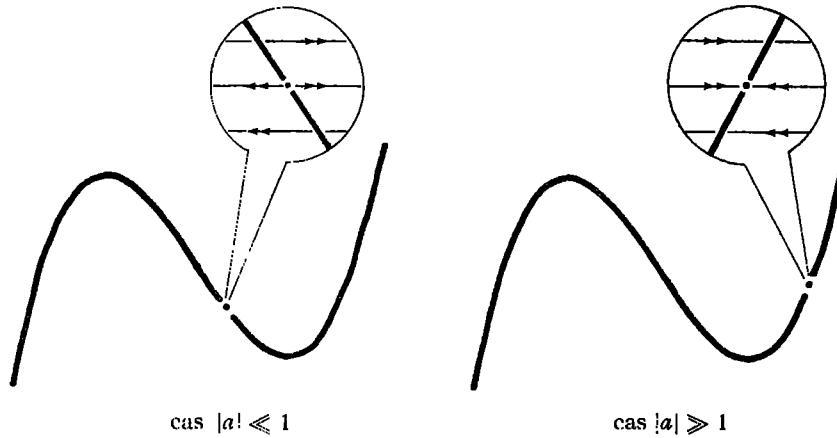


Figure 12

On raisonne de manière analogue pour exclure l'éventualité d'un cycle infiniment grand. Supposons en effet qu'un tel cycle existe. Il existe alors  $\delta$  infiniment petit tel que ce cycle soit de diamètre fini et non infiniment petit dans la réduction (6)  $(X, U) = (\delta x, \delta^3 u)$ . Or à cette échelle  $\mathcal{U}_a$  devient:

$$\mathcal{U}_a^{\text{red}} \begin{cases} \dot{X} = \frac{1}{\epsilon} (U/\delta^2 - X^3/\delta^2 + X) \\ \dot{U} = \delta^3 a - \delta^2 X \end{cases}$$

qui admet les mêmes trajectoires que le champ

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{1}{\epsilon} (U - X^3 + \delta^2 X) \\ \dot{U} = \delta^5 a - \delta^4 X \end{cases}$$

qui est à nouveau un champ lent-rapide (en fait «très lent» rapide), où la courbe lente est cette fois la cubique dégénérée d'équation

(6) Cette réduction a été introduite par TROMSCHE [7] et lui a permis de donner une élégante démonstration de l'existence d'une solution périodique de l'équation  $(E_0)$  pour tout  $\epsilon > 0$  (infiniment petit ou non) qui, d'ailleurs, se généralise immédiatement pour  $(E_a)$ , avec  $|a| < 1$ .

$U = X^3$ . Les ombres des trajectoires sont donc du type décrit par la figure 13, d'où il ressort qu'à cette échelle, il ne peut exister de cycle de diamètre fini non infiniment petit.

C.Q.F.D.

Il apparaît donc que le cycle de  $\mathcal{U}_a$  dont nous avons établi l'existence pour  $|a| \ll 1$  va disparaître pour  $|a| \simeq 1$ . Le chapitre qui suit va nous permettre de voir, par une étude locale, qu'il y a bien disparition d'un cycle pour  $a = -1$  (et, par symétrie, pour  $a = 1$ ). Au chapitre IV nous décrirons le mécanisme global de cette disparition.

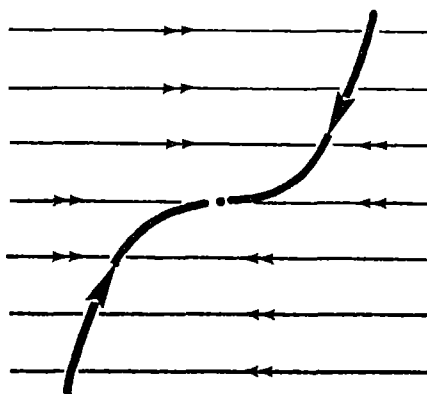


Figure 13

Rappelons que dorénavant, nous ne considérerons plus que le cas  $a > 0$ . Comme nous l'avons dit dans l'introduction, le cas  $a < 0$  s'obtient par symétrie, et ne produit donc pas de phénomène différent.

### III. UNE ETUDE LOCALE: LA BIFURCATION DE HOPF POUR $a = 1$ .

Nous venons de voir que pour  $a \simeq 1$ , il y a disparition d'un cycle. Qui connaît la bifurcation de Hopf pense spontanément à elle lorsqu'il est placé devant une telle situation. C'est à un tel lecteur que nous destinons ce petit chapitre: il y a bien bifurcation de Hopf (pour  $a = 1$ ), et de ne pas le montrer pourrait laisser ce lecteur insatisfait. Mais disons dès à présent que le phénomène que nous présentons ici (les canards) est distinct de cette bifurcation. D'ailleurs l'omission

de ce paragraphe ne générerait pas la logique interne de notre étude.

Une étude élémentaire de la partie linéaire du champ  $\mathcal{U}_a$  au voisinage du point singulier  $(a, F(a))$  montre que ce point est un foyer (ou un nœud) stable [resp. instable] si  $a > 1$  [resp.  $a < 1$ ]. Lorsque  $a = 1$ , cette même étude ne permet pas de conclure, la partie linéaire présentant alors un centre.

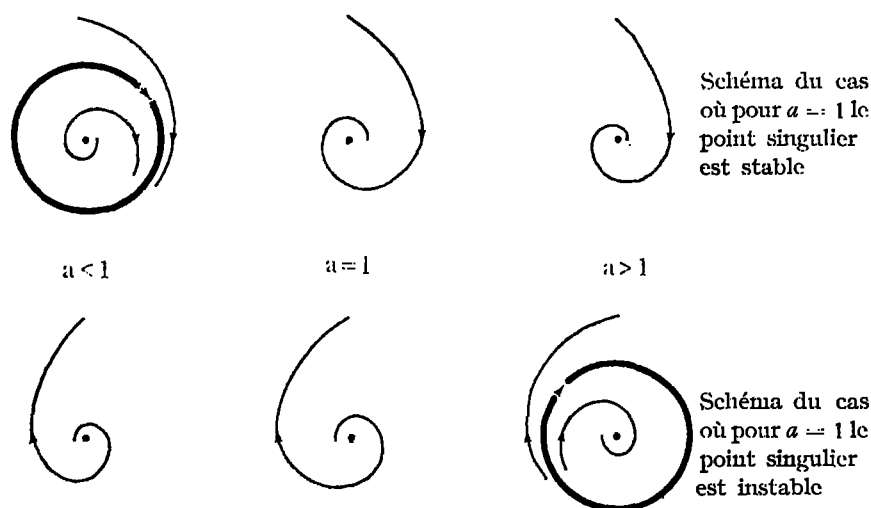


Figure 14. — Schéma de la bifurcation de Hopf dans les cas où pour la valeur de bifurcation le point singulier est asymptotiquement stable ou instable.

Le fait que pour  $a = 1$  il y ait inversion de la stabilité du point singulier montre que pour cette valeur du paramètre nous avons affaire à une bifurcation de Hopf, c'est-à-dire (dans les cas simples) apparition d'un cycle comme indiqué schématiquement sur la figure 14 [M McC]. Ceci explique que nous nous attachions à la démonstration du

**LEMMA.** *pour  $a = 1$ , le point singulier de  $\mathcal{U}_a$  est asymptotiquement stable.*

*Preuve:* la stabilité asymptotique étant une propriété topologique, il suffit de montrer que le point singulier de  $\mathcal{V}_1$  est asymptotiquement stable. Soit  $\Phi(x, v) = (x - 1)^2 + c(v - \frac{1}{2} \log(1 + 2v))$  ( $= (x - 1)^2 + \epsilon v^2(1 - 4/3 v + \dots)$ ) la fonction obtenue par inté-

gration de la partie quadratique, au voisinage du point singulier lier  $(1,0)$ , de  $\mathcal{V}_1$ . On vérifie que  $\mathcal{V}_1$ .  $\text{Grad } \Phi = -2v^2(x-1)^2$ .

On déduit de ce lemme que la bifurcation de Hopf pour  $a = 1$  se déroule selon le premier scénario de la figure 14.

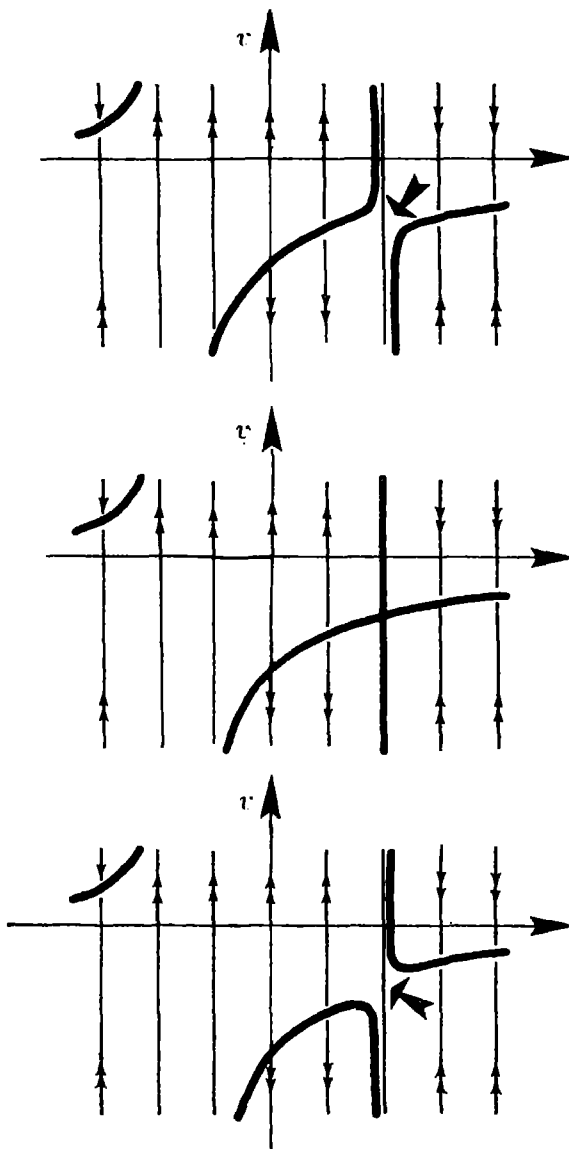


Figure 15. — En gras, les courbes  $\mathcal{H}a$ ; à noter que, lorsque  $a \sim 1$ , toutes ces courbes sont infiniment proches; en particulier l'isthme indiqué par une flèche grasse est infiniment étroit.

IV. LES CANARDS ( $a \simeq 1$ ).

## 1. Définition et exemples.

Un point important de l'étude du cas  $|a| \ll 1$  était qu'une solution ayant longé  $C^\pm$ , atteint une vitesse  $v$  infiniment grande dès que  $|x| \simeq 1$ , ce qui entraînait un saut en  $S^\pm$ . Pour voir ce qu'il advient lorsque  $a \simeq 1$ , examinons le champ  $\mathcal{V}_a$  dans ce cas. Comme précédemment, il est quasi vertical en dehors du halo de la courbe  $\mathcal{H}_a$  d'équation  $a - x - (x^2 - 1)v = 0$  (fig. 15). On constate que pour  $a \simeq 1$ , l'ombre de  $\mathcal{H}_a$  ( $= \mathcal{H}_1$ ) est la réunion de la droite verticale  $D$  et de l'hyperbole  $H = \{v(x \pm 1) \pm 1 = 0\}$ . On en déduit que lorsque  $a \simeq 1$  une solution ayant longé  $H$  pour des  $x \gg 1$ , peut éventuellement continuer à longer  $H$  pour des  $x \simeq 1$  ou des  $x \ll 1$ ,  $v$  restant alors fini. A l'échelle initiale (plan de Liénard), cela se traduit par le fait qu'une solution ayant longé  $C$  pour  $x \gg 1$  ne saute pas nécessairement en  $S^+$ , mais peut, pour certaines valeurs de  $a$  équivalentes à 1, continuer à longer une portion de la partie répulsive  $C^o$  de  $C$  (fig. 16).

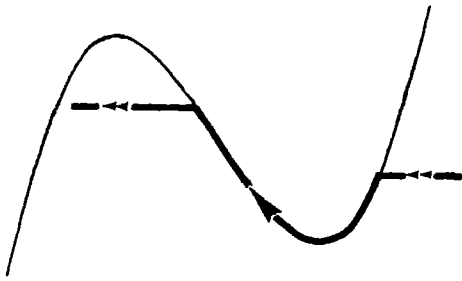


Figure 16

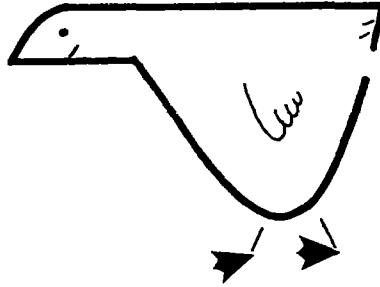


Figure 17

Un segment convenable d'une trajectoire adoptant le comportement que nous venons de décrire aura par exemple pour ombre la courbe tracée en gras sur la figure 17: que le lecteur veuille bien trouver là la raison qui nous a poussé à appeler «canard» une telle trajectoire (terminologie qui a, en outre, les vertus d'être à la fois brève et (mathématiquement) non conotée. Plus précisément;

DEFINITION. Nous appellerons canard une trajectoire de  $\mathcal{U}_a$  dont un segment au moins a pour ombre une portion de courbe lente comportant à la fois des points attractifs et des points répulsifs (fig. 16).

Sans chercher à donner ici une définition générale d'un canard (ce qui reviendrait à donner une définition générale d'un champ lent-rapide [P], d'une courbe lente et d'un point attractif ou répulsif [Z]), nous pouvons néanmoins remarquer que nous disposons déjà d'un second exemple de canards simplement en examinant un canard de  $\mathcal{U}_a$  à l'échelle  $(x, v)$ : celui-ci devient alors un «canard» du champ  $\mathcal{V}_a$  (pour lequel la courbe lente est constituée, pour  $a \simeq 1$ , l'hyperbole  $H$ ) (fig. 18). Notons que l'image d'un canard du plan de Liénard, longeant  $C$  entre des points d'abscisse  $x_0$  et  $x_1$ , est un canard du plan des phases longeant  $\mathcal{H}_a$  également entre des points d'abscisse  $x_0$  et  $x_1$ . En effet, dès qu'une solution de  $\mathcal{V}_a$  quitte le halo de  $\mathcal{H}_a$  (nécessairement pour  $|x'| \ll 1$ ), elle atteint une vitesse infiniment grande en un temps infiniment court,  $x$  ne se déplaçant qu'infiniment peu. Le point représentatif dans le plan de Liénard a alors repris sa course quasi horizontale.

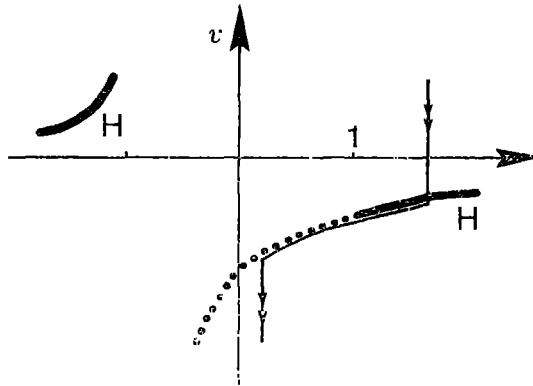


Figure 18. — Un canard de  $\mathcal{V}_a$ . En gras, les points attractifs et en pointillés, les points répulsifs de la courbe lente  $H$ .

Cette «conservation» des canards par  $\varepsilon$ -grossissement autour des courbes lentes est une de leurs propriétés remarquables.

Les canards des figures 16 et 17 sautent vers la gauche lorsqu'ils cessent de longer la partie répulsive  $C^0$  de  $C$ . Evidemment il peut aussi se présenter le cas où un canard cesse de longer  $C^0$

pour sauter vers la droite (figure 19). Lorsqu'un canard est en outre un cycle, on parlera de *canard avec tête* dans le premier cas, et de *canard sans tête* dans le second cas. Compte tenu de ces remarques, et moyennant cette terminologie, nous avons donc la

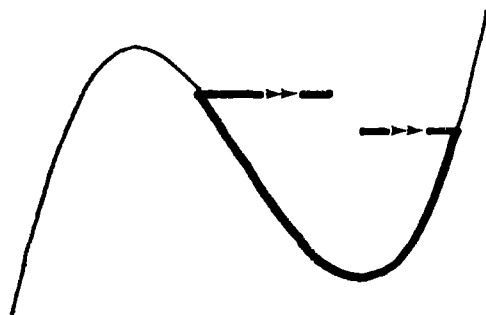
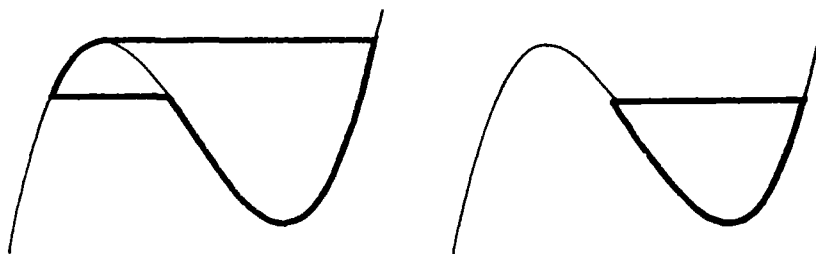


Figure 19

PROPOSITION 1. *Lorsque  $a \simeq 1$ , un cycle de  $\mathcal{U}_a$  est, soit un grand-cycle, soit un canard avec ou sans tête, soit un cycle infiniment petit.*



canard avec tête

canard sans tête

Figure 20

## 2. Existence des canards.

Le problème essentiel, à présent, est de montrer l'existence de canards. Bien que celle-ci soit évidente, le cycle ne pouvant disparaître sans qu'il existe des cycles de (chaque) taille inférieure (cf. théorème 3), c'est cette question d'existence qui avait motivé l'étude

sur ordinateur mentionnée dans l'introduction, et qui avait échoué(7)... Nous montrerons, en fait, l'existence de cycles-canards, et de ce fait, il nous faut introduire un peu de vocabulaire:

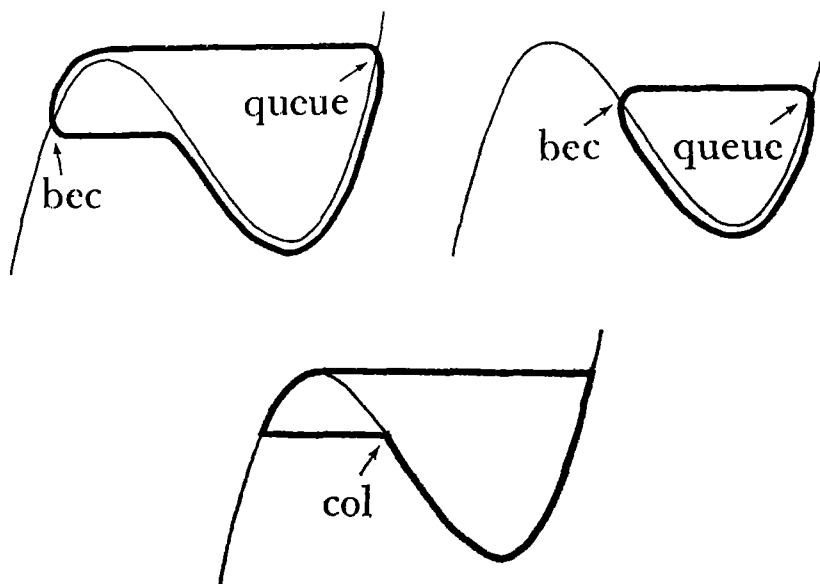


Figure 21. — Morphologie des canards

*Terminologie:* on appellera *bec* et *queue* d'un cycle canard les deux points d'intersection de ce cycle avec la cubique  $C$ , d'abscisses respectivement inférieure et supérieure à  $a$ .

On appellera *col* d'un canard avec tête le point anguleux de son ombre qui appartient à  $C_0$ .

Remarquons que *bec* et *queue* d'un cycle canard appartiennent au cycle, mais sont, en général, non standard, alors que le *col* d'un canard avec tête est standard, mais n'appartient pas au cycle. Par extension, on appellera *col* d'un canard sans tête l'ombre de son bec.

**THEOREME 3.** *Pour tout  $x$  tel que  $-2 \ll x \ll -1$ , il existe  $a \simeq 1$  tel que  $\mathcal{U}_a$  admette un cycle-canard dont l'abscisse du bec soit égale à  $x$ .*

(7) On trouvera l'explication de cet échec dans la troisième partie.



*Preuve:* notons  $C_a$  la demi-cubique constituée des points de  $C$  d'abscisse  $x \leq a$ . Elle est transverse au champ  $\mathcal{U}_a$ , puisque celui-ci est vertical sur  $C$ , sauf un point d'abscisse  $a$  (point singulier). Comme toute solution de  $\mathcal{U}_a$  issue de  $C_a$ , recoupe  $C_a$ , nous pouvons considérer l'application de premier retour  $P_a: C_a \rightarrow C_a; (x, F(x)) \mapsto (p_a(x), F(p_a(x)))$ .

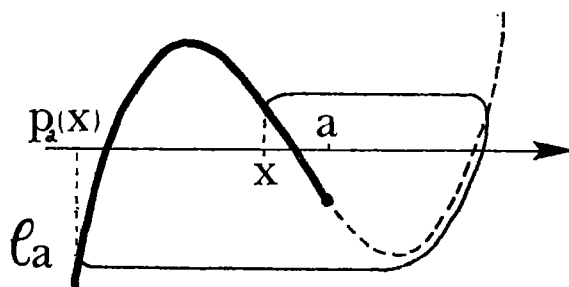


Figure 22

Elle est continue et caractérise entièrement le portrait de phase de  $\mathcal{U}_a$ . En particulier les cycles de  $\mathcal{U}_a$  correspondent aux points fixes de  $P_a$  distincts du point singulier  $(a, F(a))$ , ou, ce qui revient au même, aux zéros de  $q_a(x) = p_a(x) - x$ . En particulier, si  $x$  est un zéro de  $q_{a_0}$  tel que  $-2 \leq x \leq +1$ , ceci entraîne que  $\mathcal{U}_{a_0}$  admet un cycle de canard dont l'abscisse du bec est égale à  $x$ .

Traduisons les propriétés que nous connaissons de  $\mathcal{U}_a$  en propriétés de  $q_a$ . Comme  $(a, F(a))$  est un point singulier de  $\mathcal{U}_a$ , on a, pour tout  $a$ ,  $q_a(a) = 0$ . Le théorème 1 s'exprime par le fait que si  $|a| \leq 1$ , alors  $q_a$  admet (en dehors de  $a$ ) un unique zéro, qui est équivalent à  $-2$ . Par le principe de permanence, cette dernière propriété est donc encore vraie pour un  $a_1 \simeq 1$ , plus petit que 1.

De façon semblable, le théorème 2 montre qu'il existe un  $a_2 \simeq 1$ , plus grand que 1, tel que  $q_{a_2}$  n'admette pas d'autre point fixe que  $a_2$ . Enfin la nature de la stabilité du point singulier (cf. III) entraîne que pour  $a < 1$ ,  $q'_a(a) > 0$  et que pour  $a > 1$ ,  $q'_a(a) < 0$ . À présent, comme  $q_a$  dépend continûment de  $a$ , il apparaît qu'il existe, pour tout  $x$  tel que  $-2 \leq x \leq 1$ , un  $a$  compris entre  $a_1$  et  $a_2$  (donc  $a \simeq 1$ ) tel que  $q_a(x) = 0$

C.Q.F.D.

Le théorème suivant est capital pour la compréhension des rôles respectifs de la bifurcation de Hopf et des canards.

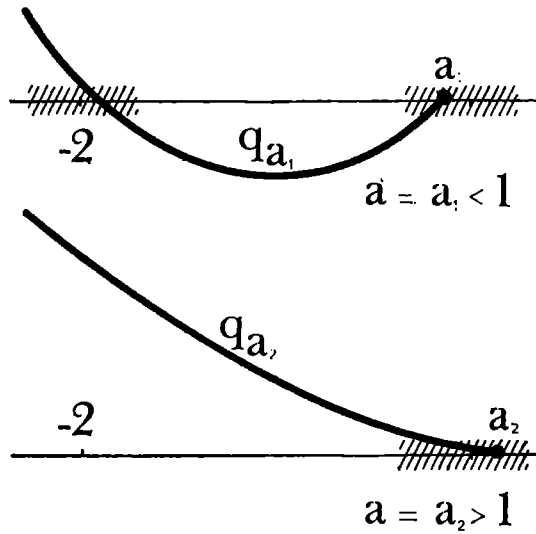


Figure 23

THEOREME 4. (8) Si  $\mathcal{U}_a$  admet un canard pour  $a \simeq 1$ , alors

$$a = 1 - \epsilon/8 + \epsilon \eta, \text{ avec } \eta \simeq 0.$$

*Preuve:* on raisonne dans le plan des phases. Soit  $A$  le point d'abscisse  $a$  de  $H$ , et  $D_a$  la droite verticale passant par  $A$  (fig. 24). Soit  $\Delta$

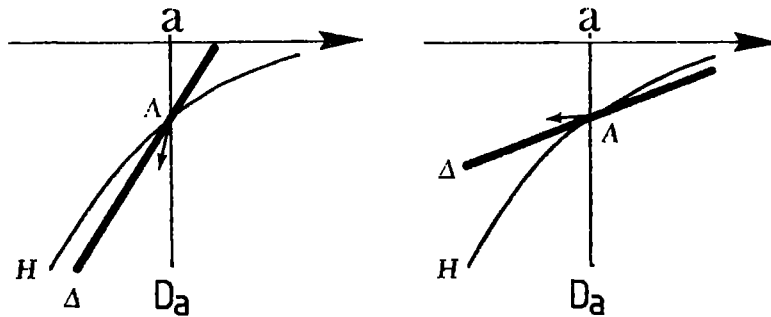


Figure 24

(8) C'est J.L. CALLOT qui avait conjecturé ce résultat en observant qu'à cette condition seulement le champ  $\mathcal{U}_a$  est quasi tangent à  $H$  au point d'abscisse 1.

le point la bissectrice (intérieure) de la tangente à  $H$  au point  $A$  et de la droite tangente au champ au point  $A$ .

LEMME. Si  $(1 - a)/c \approx 1/8$ ,  $\Delta$  n'est pas quasitangente à  $H$  et est transverse au champ sur un segment  $\sigma$  non infiniment petit centré au point  $A$ .

Le théorème découle immédiatement de ce lemme. En effet, comme nous l'avons vu, à un canard de  $\mathcal{U}_a$  correspond, dans le plan des phases, un canard de  $\mathcal{V}_a$  (fig. 18). Si un canard existait pour  $(1 - a)/c \approx 1/8$ , il couperait le segment  $\sigma$  (qui n'est pas quasi-tangent à  $H$ ), ce qui est impossible compte tenu de la direction du champ sur  $\sigma$  (fig. 25).

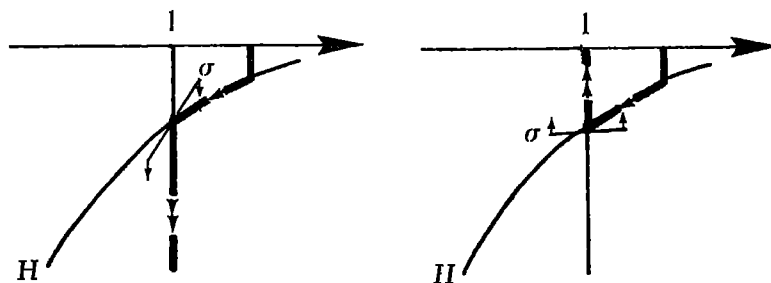


Figure 25

*Preuve du lemme.* Désignons par  $p(x, v)$  la pente du champ  $\mathcal{V}_a$  au point  $(x, v)$  ( $v \neq 0$ ), par  $p_H(x)$  la pente du champ au point de  $H$  d'abscisse  $x$ , et par  $t(x)$  la pente de la tangente à  $H$  en ce même point. On a  $p_H(x) = (1 - x)/(1 - a)/\epsilon$  et  $t(x) = -1/(1 - x)^2$ .

Considérons par exemple le cas où  $(1 - a)/\epsilon \geq 1/8$ . On a donc  $p_H(a) \geq t(a)$  :  $\Delta$  n'est donc pas quasi-tangente à  $H$ . Reste à montrer que  $\Delta$  est transverse au champ sur tout un intervalle non-infiniment petit centré en  $A$ . Par le lemme de Robinson, il suffit d'établir cette transversalité en tout point de  $\Delta$  contenu dans  $h(D_a)$ . Soit  $d$  la pente de  $\Delta$ ; comme  $t(a)$  est fini,  $d$  est fini et  $p_H(a) \geq d$ . On en déduit facilement que si  $x \approx a$  ( $\approx 1$ ),  $p_H(x) \geq d$ . Comme  $\partial p / \partial v = (x - a)/\epsilon v^2$ , on voit que sur  $\Delta \cap h(D_a)$   $p(x, v) \geq p_H(x) \geq d$ . Le cas où  $(1 - a)/\epsilon \ll 1/8$  se traite de façon semblable.

*Remarque:* du fait de la position de  $\sigma$  par rapport à  $H$  (fig. 25), on voit que si  $(1 - a)/\epsilon \gg 1/8$ ,  $\mathcal{U}_a$  admet un grand cycle, alors que si  $(1 - a)/\epsilon \ll 1/8$ ,  $\mathcal{U}_a$  admet un cycle infiniment petit ou pas de cycle du tout.

### 3. Unicité des canards.

**THEOREME 5.** *Si  $a \simeq 1$ , le champ  $\mathcal{U}_a$  admet au plus un grand-cycle ou un cycle canard.*

*Preuve:* le principe de la démonstration est le même que dans le cas  $|a| \ll 1$ : il consiste à montrer que tout grand-cycle ou cycle-canard est asymptotiquement stable; ceci s'obtient en montrant que l'exposant caractéristique (non nul)  $E$  d'un tel cycle est strictement négatif. Le théorème découlera donc du lemme suivant:

**LEMME.** *Si  $a \simeq 1$  et si  $\Gamma$  est un grand-cycle ou un cycle-canard, alors  $-\epsilon E$  est équivalent à l'aire arithmétique  $\mathcal{A}$  de la surface limitée par  $\Gamma$ .*

$$\begin{aligned} \text{Preuve: } \quad -\epsilon E &= -\epsilon \oint_{\Gamma} \operatorname{div} \mathcal{U}_a \, dt = \oint_{\Gamma} (x^2 - 1) \, dt = \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{x^2 - 1}{a - x} \, du \simeq (*) = \oint_{\Gamma} (x + 1) \, du = \mathcal{A}. \end{aligned}$$

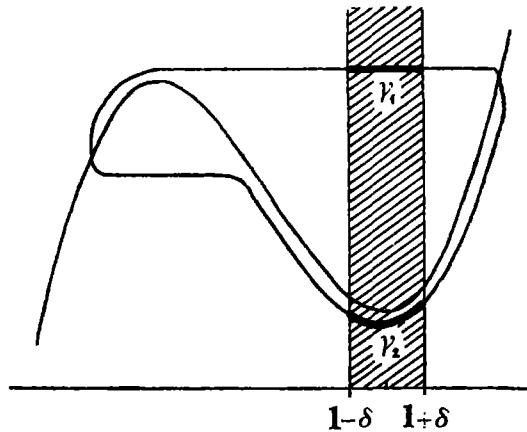


Figure 26

L'équivalence (\*) se justifie comme suit: come  $a \simeq 1$ , on a  $(x^2 - 1) / (a - x) \simeq -(1 + x)$ , tant que  $x \neq 1$ . Par le principe de permanence, cette nouvelle équivalence s'étend aux  $x$  tels que  $|x - 1| > \delta$ ,  $\delta$  infiniment petit. Reste la contribution due à l'intégration le long des deux segments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\Gamma$  constitués des points d'abscisse  $x$  telle que  $|1 - x| \leq \delta$  (fig. 26). Or, comme nous l'avons observé, lorsque  $x \simeq 1$ , la vitesse  $v = \dot{x}$  est infiniment grande (sur  $\gamma_1$ ) ou équivalente à  $-1 / (1 + x) \simeq -1/2$  (sur  $\gamma_2$ ). Les segments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont donc parcourus en un temps infiniment petit et donc

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2}^1 (x^2 - 1) dt \simeq 0 \simeq - \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (x + 1) du.$$

#### 4. Période des cycles.

**THEOREME 6.** Soit  $\Gamma$  un cycle de  $\mathcal{U}_a$  et  $T$  sa période.

Si  $|a| \ll 1$ ,  $\Gamma$  est un grand cycle et

$$T \simeq 3 \cdot (a^2 - 1) \log [(4 - a^2) / (1 - a^2)],$$

Si  $a \simeq 1$  et si  $\Gamma$  est un grand cycle,  $T \simeq 3$

Si  $\Gamma$  est un canard avec tête,  $T \simeq 9/2 \cdot [1 + o(x_b - x_c)] [1 + o(x_b + x_c)/2]$

Si  $\Gamma$  est un canard sans tête,  $T \simeq o(x_q - x_c) [1 + o(x_q + x_c)/2]$

Si  $\Gamma$  est un cycle infiniment petit,  $T \simeq 0$

( $x_b$ ,  $x_c$  et  $x_q$  désignent respectivement les abscisses du bec, du col et de la queue du canard).

*Preuve:* comme nous l'avons vu, les portions d'un cycle  $\Gamma$  qui ne longent pas la courbe lente sont parcourues en un temps infiniment

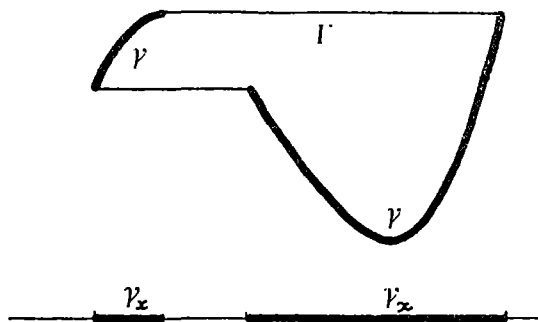


Figure 27

court. Il existe donc un «sous-arc»  $\gamma$  de  $\Gamma$  tel que  $\gamma$  et  $\Gamma \cap h(C)$  aient même ombre (en gras sur la figure 27), tel que les intégrales curvilignes  $\oint_{\Gamma} dl (-T)$  et  $\oint_{\gamma} dt$  soient équivalentes, et tel que l'on ait, sur  $\gamma$ ,  $\dot{x}(=v) \simeq (a-x)/(x^2-1)$  si  $a \ll 1$  et  $\dot{x} \simeq -1/(1+x)$  si  $a \simeq 1$ . Comme  $\dot{x}$  est alors non nul, on peut substituer le paramètre  $x$  au paramètre  $t$ ; notons  $\gamma_x$  l'image «orientée» de l'arc paramétré  $\gamma$  par la projection canonique sur l'axe des  $x$ . A présent:

$$\begin{aligned} \text{Si } |a| \ll 1, \quad T &\simeq \oint_{\gamma} dl = \oint_{\gamma_x} \frac{dx}{\dot{x}} \simeq \oint_{\gamma_x} \frac{x^2-1}{a-x} dx \simeq \\ &\simeq \int_{-2}^1 \frac{x^2-1}{a-x} dx + \int_2^1 \frac{x^2-1}{a-x} dx. \end{aligned}$$

De manière semblable, si  $a \simeq 1$ ,  $T \simeq - \oint_{\gamma_x} (1+x) dx$ , donc

$$\begin{aligned} \text{si } \Gamma \text{ est un grand-cycle ou un canard avec tête, } T &\simeq \int_{x_e}^2 (1+x) dx - \\ &- \int_{0_{x_0}}^{-1} (1+x) dx, \text{ et si } \Gamma \text{ est un canard sans tête ou un cycle infini-} \\ \text{ment petit, } T &\simeq \int_{0_{x_1}}^{0_{x_2}} (1+x) dx. \end{aligned}$$

Les résultats annoncés découlent alors d'intégrations élémentaires.

### V. *Généricité des canards et conclusion.*

Il conviendrait, pour finir cette présentation des canards, de montrer en quoi ceux-ci ne sont pas exceptionnels, mais qu'au contraire, génériquement, ils accompagnent certaines bifurcations classiques, telles que la bifurcation de Hopf (du moins dans le contexte des perturbations singulières, qui constituent leur biotope). Par essence même, cette question suppose une étude de caractère général et dépasse l'objectif que nous nous sommes fixés, de présenter les canards sur un exemple. Nous nous bornerons donc à évoquer cette question au travers de remarques sur des champs du type

$$\mathcal{W}_a \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\epsilon} (u - f(x, a)) \\ \dot{u} = -x \end{cases}$$

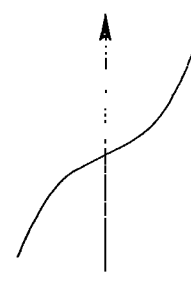
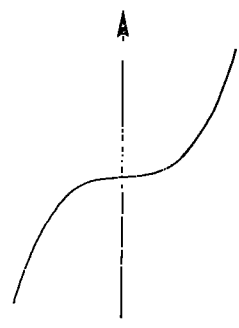
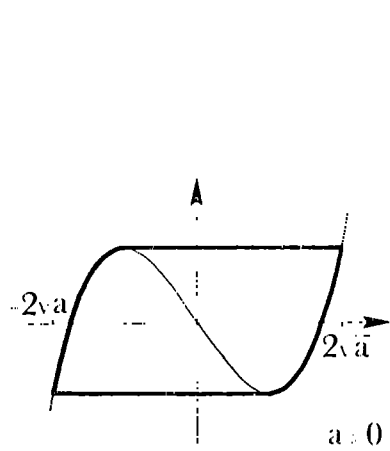


Figure 28

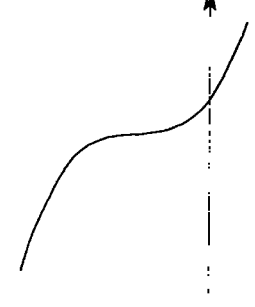
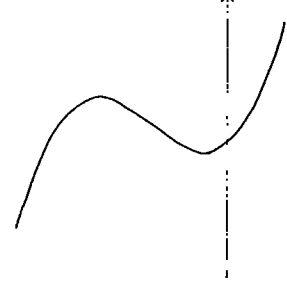
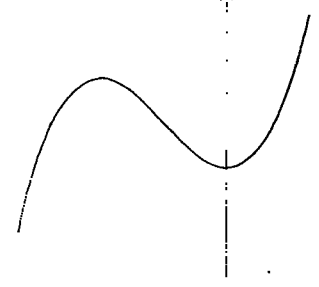
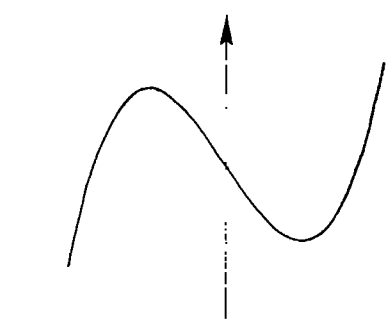


Figure 29

où  $f$  est un polynôme standard de degré trois en  $x$ . L'étude de  $\mathcal{U}_a$  correspond, après changement de variable, au cas où  $f(x, a) = F(x - a)$ . Considérons à présent le cas où  $f(x, a) = x^3 - 3ax + 1$ . On voit facilement (fig. 28) que lorsque  $a > 0$ ,  $\mathcal{W}_a$  admet un cycle dont l'amplitude «en  $x$ » est équivalente à  $4\sqrt{a}$  et diminue donc graduellement avec  $a$ . Lorsque  $a = 0$  il y a bifurcation de Hopf; pour  $a \leq 0$  il n'y a plus de cycle. Nous avons donc là un exemple de bifurcation de Hopf sans «à-coup», et sans canards.

Cet exemple n'est cependant pas générique au sens suivant. Un de ses aspects essentiels réside dans le fait que, lors de la déformation de la courbe lente  $C_a = \{f(x, a) = 0\}$ , le point singulier, dont l'abscisse (0) est fixée de façon indépendante de  $f$  par la seconde équation, reste toujours compris entre les deux extrema de  $f$  bien que ceux-ci tendent l'un vers l'autre, lorsque  $a$  tend vers 0. Cette propriété du point singulier peut-être supprimée par une modification arbitrairement petite des coefficients du polynôme  $x^3 - 3ax + 1$ .

Si au contraire  $f$  est tel que les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $x = 0$  est un extremum (fig. 29 ii) sont distinctes des valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f$  est dégénéré (fig. 29 iv), cette propriété se conservera lors de petites modifications des coefficients du polynôme  $f$ . L'étude de  $\mathcal{U}_a$  que nous avons donnée suggère comment montrer que, dans ce cas, il y aura, pour  $a = a_0$ , une bifurcation de Hopf accompagnée de canards.

## CONCLUSION.

La présence de cycles canards dans le portrait de phase de  $\mathcal{U}_a$  ne constitue pas, à l'évidence, une bifurcation: que le cycle soit grand, canard, ou infiniment petit, il existe et c'est tout ce qui importe pour le portrait de phase. Ce dernier ne change donc pas tant que  $|a'| < 1$ .

Une chose cependant est remarquable en ce qui concerne les canards: alors que la taille de la «plage» des valeurs de  $a$  pour lesquelles  $\mathcal{U}_a$  admet un grand-cycle est non infiniment petite (théorème 1), que la taille de la «plage» correspondante pour les cycles infiniment petits («cycles de Hopf») est de l'ordre de  $\epsilon$  (théorème 4), celle correspondant aux canards est au plus de l'ordre de  $\epsilon^2$  (théorème 4) et en fait beaucoup plus petite encore (voir la troisième partie: «les canards ont la vie brève»). Tant et si bien que dans la pratique, tout



se passe comme si les canards n'existaient pas (voir l'étude numérique décrite dans l'introduction) et le changement quantitatif correspondant au passage d'un grand cycle à un cycle infiniment petit apparaît, toujours dans la pratique, comme une discontinuité, c'est-à-dire, un phénomène qualitatif. L'expérimentateur qui étudie un système régi par un champ de vecteurs admettant des canards pour certaines valeurs du paramètre observera donc bien un phénomène lorsqu'il modifiera les paramètres de son système, de manière à franchir les valeurs à canards.

Ce phénomène pourra même éventuellement éclipser<sup>(9)</sup> la bifurcation de Hopf. En effet, celle-ci constitue la transition d'un état avec cycle infiniment petit à un état stationnaire, et il se peut que ces deux situations soient, elles, expérimentalement indiscernables, laissant croire alors que la bifurcation a lieu pour les «valeurs à canards»  $\alpha = 1 - c/8$  ... Le terme de bifurcation étant, comme nous l'avons vu, impropre dans ce cas, nous parlerons d'«effet-canards», ou simplement de canards:

## L'EFFET-CANARDS

L'effet-canards peut s'observer dans les champs de vecteurs lent-rapide et se définit par l'existence de cycles-canards, tels que nous les avons décrits pour les champs lents-rapides du plan. Il se caractérise, par contre, par l'apparente absence de certains états intermédiaires à deux états observables, ces états «manquants» correspondant précisément aux cycles-canards, et laisse croire à une discontinuité ou une bifurcation.<sup>(10)</sup>

Il accompagne génériquement la bifurcation de Hopf<sup>(11)</sup> dont il est cependant distinct. Dans ce cas, il correspond à une brutale diminution de l'amplitude et de la période du cycle. Cette «chute» d'amplitude est précédée d'une augmentation de la période du cycle.

(9) Lohry a fait d'intéressantes observations à ce sujet [Lo] relatives à la réaction chimique oscillante de Belusov-Zhabotinsky.

(10) ces états intermédiaires se traduisent sur les appareils de mesure par des «parasites», séparant deux résultats très différents.

(11) On peut cependant le rencontrer dans d'autres circonstances (voir [Df 2; et [Dm 1]).

VI. *Annexe: Canards et freins qui broulent.*

Les perturbations singulières d'équations différentielles du second ordre sont souvent proposées comme modèle de système physiques présentant des oscillations de relaxation. Les études classiques de cette question évitent en général de considérer la transition du régime avec oscillations au régime avec état stationnaire. Comme nous l'avons vu, cette transition s'accompagne de canards. A titre d'exemple, examinons le cas d'un tel système: le frein de Prony. Pour une description détaillée de ce modèle, on pourra se reporter à [A V K], p. 690.

Le modèle considéré comporte trois composants: un arbre tournant avec une vitesse angulaire constante  $\Omega$ , des mâchoires de frein (schématisées par une couronne, fig. 30) pouvant tourner, en frottant,

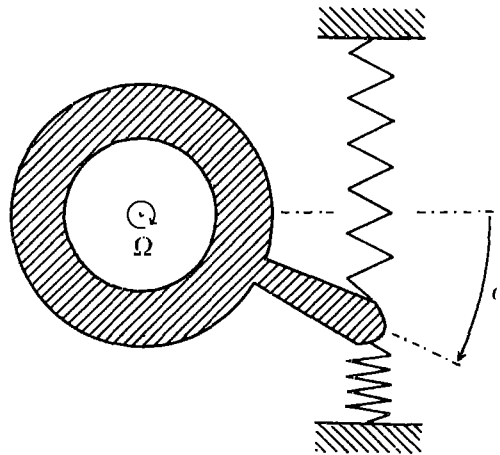


Figure 30

sur l'arbre, et enfin un ressort tendant à s'opposer au mouvement des mâchoires, représentant les diverses pièces fixant les mâchoires au châssis. Le mouvement des mâchoires, repéré par l'angle  $\varphi$ , est régi par l'équation

$$J \ddot{\varphi} = -k\varphi + M(\Omega - \omega) \quad (1)$$

où  $J$  est le moment d'inertie du frein,  $k$  est le coefficient d'élasticité du ressort, et  $M$  est la fonction exprimant le couple de friction re-

latif à la différence de vitesse angulaire  $\omega = \Omega - \dot{\varphi}$  de l'arbre et des mâchoires. Le graphe de  $M$  est indiqué sur la figure 31. On associe à (1) le champ de vecteurs

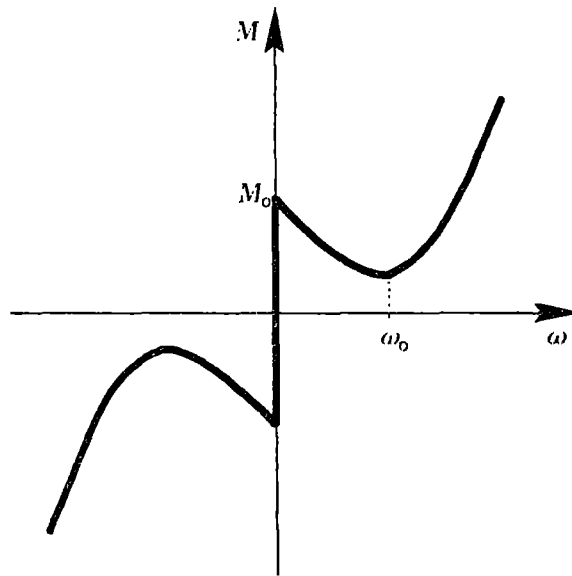


Figure 31. — La fonction  $M(\omega)$ . La non-uniformité de  $M$  en  $\omega = 0$  correspond au frein «bloqué»:  $M_0$  est la valeur maximale du couple de friction du frein au repos. Lorsque le frein se débloque, ce couple commence par diminuer lorsque la vitesse angulaire relative  $\omega$  augmente jusqu'à  $\omega_0$ , et là seulement il augmente.

$$\mathcal{W}_\Omega \begin{cases} \dot{\omega} = -\frac{1}{J} (-k\varphi + M(\omega)) \\ \dot{\varphi} = \Omega - \omega \end{cases}$$

On voit que si le moment d'inertie  $J$  est petit, le champ  $\mathcal{W}_\Omega$  est un champ lent-rapide, quasi-horizontale en dehors de la courbe lente  $\{k\varphi = M(\omega)\}$  (fig. 32). Le comportement des mâchoires, selon les valeurs de  $\Omega (> 0)$  est donc le suivant; si  $\Omega \gg \omega_0$ , le frein atteint un état stationnaire, caractérisé par  $\varphi \simeq \varphi_0$ , où le couple de friction  $M(\Omega)$  équilibre le couple  $k\varphi_0$  dû au ressort. Au contraire, si  $\Omega \ll \omega_0$ , les mâchoires oscillent avec un mouvement saccadé: le frein broute. À présent, comme nous l'avons vu, pour certains  $\Omega \simeq \omega_0$ , il y aura des «oscillations-canards» (fig. 33, iii).

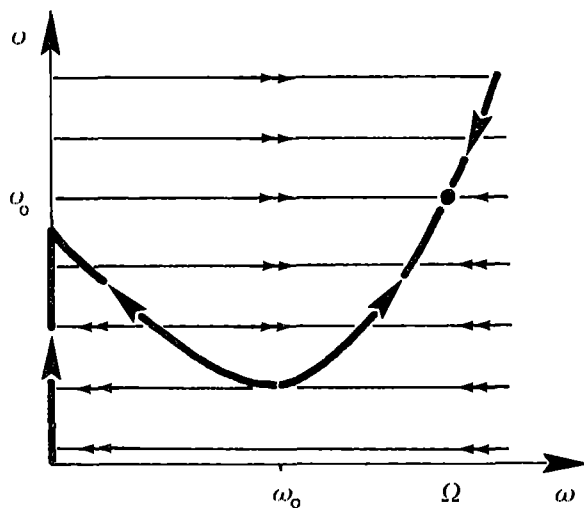


Figure 32. — C'est le comportement particulier de  $M$  pour  $|\omega| < \omega_0$  qui permet d'expliquer le phénomène de frein qui broute.

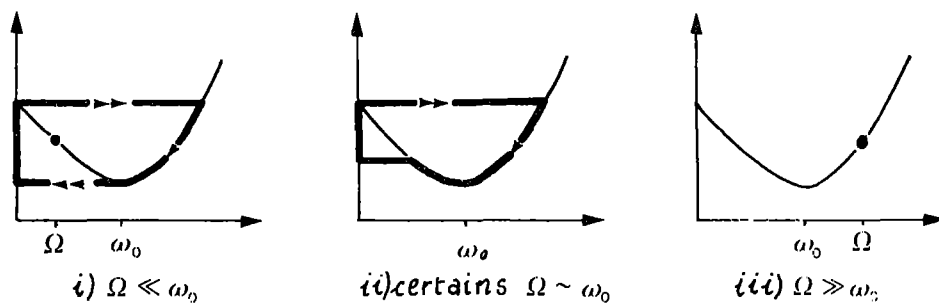


Figure 33

Selon ce modèle, il apparaît que lorsque la vitesse angulaire  $\Omega$  de l'arbre augmente, le frein devrait cesser de brouter suivant un effet-canard: on devrait observer une augmentation de la période des saccades jusqu'à une valeur finie, puis devrait intervenir une brutale disparition du mouvement saccadé. Par contre, l'amplitude des saccades devrait être indépendante de  $\Omega$ . Il serait intéressant de savoir si tel est bien ce qu'on observe dans la pratique; sinon le modèle serait à revoir...

## BIBLIOGRAPHIE

- [AVK] ANDRONOV A.A., VITT A.A. ET KHAIKIN S.P., *Theory of oscillators*, Pergamon Press (1966).
- [B] BENOIT F., *Canards volants*, A paraître.
- [CDD] CALLOT J.-L., DIENER F. ET DIENER M., *Le problème de la «chasse au canards*», C. R. Acad. Sc. Paris, 286, série A (1978), p. 1059 à 1061.
- [Df1] DIENER F., *Famille d'équations à cycle limite unique*, C. R. Acad. Sc. Paris, 289, série A (1979), p. 571 à 574, *Les équations  $ex'' + (x^2 - 1)x^{18} + x = a$* , *Collectanea Mathematica*, vol. XXIX, fasc. 3 (1978).
- [Df2] DIENER F., *Quelques exemples de bifurcations et leurs canards*, Publication IRMA, Strasbourg (1979).
- [Dm1] DIENER M., *Deux nouveaux phénomènes canard*, C. R. Acad. Sc. Paris, 290, série A (1980), *Nessie et les canards*, Publication IRMA, Strasbourg (1979).
- [Dm2] DIENER M., *Canards et bifurcation de Hopf*, A paraître.
- [H] HAAG M.J., *Etude asymptotique des oscillations de relaxation*, Ann. Ec. Norm., (3), LX, p. 35 à 111 (1943).
- [L] LIENARD A., *Etude des oscillations entretenues*, Revue Générale de l'Électricité, p. 901 (1928).
- [Lo] LOBRY C., *Une intervention de l'Analyse Non Standard en Mathématiques appliquées*, A paraître.
- [LG] LUTZ R. ET GOZE M., *Pratique commentée de la méthode non classique* A paraître.
- [LS] LAUGWITZ D. ET SCHIMMIDT C., *Kontinuum und Zahlen — Neuere mathematische Überlegungen zum Endlichen*, Darmstadt (1980).
- [MMcC] MARSDEN J.F. ET Mc CRACKEN M., *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer Verlag, New York (1976).
- [N] NELSON E., *Internal Set Theory*, Bull. Amer. Math. Soc., 83, n° 6 (1977), p. 1165 à 1198.
- [P] PONTRYAGIN L.S., *Asymptotic behaviour of the solutions of a differential equation with a small parameter in the high derivatives*, Amer. Math. Soc. Transl., série 2, 18 (1961), p. 295 à 319.

- [Re1] REEB G., *Séance-débat sur l'Analyse Non Standard*, Gazette des mathématiciens, n° 8 (1977), p. 8 à 14.
- [Re2] REEB G., *La Mathématique Non Standard vieille de soixante ans?*, Publication IRMA, Strasbourg (1979).
- [Ro] ROBINSON A., *Non standard analysis*, North Holland, Amsterdam (1966).
- [T] TROESCH A., *Etude macroscopique de systèmes différentiels*, Publication IRMA, Strasbourg (1980).
- [TU] TROESCH A. ET URLACHER F., *Analyse Non Standard et équation de Van der Pol*, Publication IRMA, Strasbourg (1977).
- [V] VOGEL T., *Théorie des systèmes évolutifs*, Gauthier-Villars, Paris (1965).
- [Z] ZEPHAN E.C., *Differential equations for heart beat and nerve impulse* Dynamical Systems, M. Peixoto Ed. Academic Press, New York (1973), p. 683 à 748.



