SOBRE ANILLOS DE POLINOMIOS QUE SON ANILLOS DE BEZOUT

por

PERE MENAL

En este artículo, A denota un anillo (asociativo) unitario. Se dice que A es un anillo de *Bézout* (por la derecha) si cada ideal por la derecha finitamente generado es principal. Diremos que una matriz M, no necesariamente cuadrada, con coeficientes en A admite *reducción diagonal* si existen matrices invertibles P y Q con coeficientes en A de manera que PMQ sea una matriz diagonal (entendiendo que una matriz (a_{ij}), no necesariamente cuadrada, es diagonal si $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$). Si todas las matrices con coeficientes en A admiten reducción diagonal diremos que A admite reducción diagonal. Si cada matriz 1×2 con coeficientes en A admite reducción diagonal se dice que A es un anillo de *Hermite* (por la derecha), análogamente A es un anillo de Hermite por la izquierda si toda matriz 2×1 admite reducción diagonal. En particular, si A admite reducción diagonal entonces A es un anillo de Hermite por la izquierda y por la derecha.

El problema que tratamos en la primera parte de este trabajo es el determinar condiciones sobre A a fin de que el anillo de polinomios $A[X]$ satisfaga propiedades tales como: ser de Bézout, de Hermite o admitir reducción diagonal. En este sentido se demuestra que si los cocientes primitivos de A son anillos artinianos entonces $A[X]$ es un anillo de Bézout si y sólo si A es un anillo regular (en el sentido de von Neumann) y, en este caso, $A[X]$ admite reducción diagonal.

A continuación se dan ejemplos de anillos regulares cuyos cocientes primitivos no son siempre artinianos y tales que su anillo de polinomios no es de Bézout.

Usando técnicas de Goursaud [3] y Goursaud-Pascaud [4] probamos que si A es auto-inyectivo entonces $A[X]$ es un anillo de Hermite si y sólo si A es regular con índice (de nilpotencia) acotado.

Finalmente, ofrecemos una aplicación a los anillos generados por unidades y terminamos con un resultado, de carácter elemental, que contesta a una pregunta formulada por Henriksen [6].

1. Anillos que admiten reducción diagonal

La definición de anillo que admite reducción diagonal («elementary divisor ring») es debida a Kaplansky [7]. Señalemos, sin embargo, que en [7] se dice que una matriz M admite reducción diagonal si existen matrices invertibles P y Q tales que (1) $PMQ = \operatorname{diag}(d_1, d_2 \ldots)$ y (2) $Ad_{i+1}A \subseteq Ad_i \cap d_iA$. Obsérvese que nosotros no exigimos la condición (2). Por otra parte, Henriksen [5] define anillo que admite reducción diagonal (usa el término «elementary divisor ring») como aquel en que toda matriz cuadrada M satisface (1); en otras palabras, las matrices cuadradas admiten reducción diagonal. En [5], (último párrafo de la p. 140), se da un ejemplo incorrecto al suponer que si las matrices cuadradas con coeficientes en A admiten reducción diagonal, entonces cualquier matriz con coeficientes en A admite reducción diagonal. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1. *Existe un anillo A en que toda matriz cuadrada admite reducción diagonal, aúnque existen matrices con coeficientes en A que no admiten reducción diagonal.*

Sea $A \neq 0$ un anillo que no sea cuerpo y que satisfaga la propiedad siguiente: dado $x \in A - \{0\}$ existen $y, z \in A$ tales que $yxz = 1$. Por ejemplo, si A es un cociente simple del anillo de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión infinita numerable. Puesto que A no es un cuerpo, elegimos un elemento no nulo $a \in A$ que no tiene inverso por la derecha. Por hipótesis, existen elementos $b, c \in A$ tales que $bac = 1$ y puesto que $acb \neq 1$ de nuevo existen $d, e \in A$ tales que $d(acb - 1)e = 1$. Consideremos ahora la matriz $M = (ac, (acb - 1)e)$. Demostraremos que M no admite reducción diagonal, en caso contrario sea $Q = \begin{pmatrix} * & x \\ * & y \end{pmatrix}$ una matriz con coeficientes en A, invertible, y tal que MQ sea una matriz diagonal. Claramente se tiene que $acx + (acb - 1)ey = 0$, multiplicando esta relación por b (a la izquierda) se obtiene $x = 0$; análogamente multiplicando por

d se obtiene $y = 0$. Dado que Q es invertible no puede tener una columna de ceros. Veamos ahora que toda matriz cuadrada M con coeficientes en A admite reducción diagonal. Supondremos que M es una matriz 2×2 (para matrices $n \times n$ el resultado se obtiene por inducción). Si $M = 0$, no hay nada que demostrar; supongamos, pues, que $M \neq 0$. Multiplicando M, si es necesario, por matrices invertibles 2×2 podemos suponer que M es de la forma $\begin{pmatrix} * & a \\ * & * \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$. Entonces existen $b, c \in A$ tales que $bac = 1$ y, en consecuencia, las matrices

$$P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 - acb & ac \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 1 - cba & c \end{pmatrix}$$

son invertibles y PMQ es de la forma

$$\begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix};$$

ahora por transformaciones elementales PMQ se reduce a una matriz diagonal. (De hecho se puede probar que las matrices cuadradas con coeficientes en $A[X]$ admiten reducción diagonal).

Digamos también que Goodearl ha demostrado (comunicación privada) que sobre un anillo regular auto-inyectivo por la derecha toda matriz cuadrada admite reducción diagonal.

Recordemos que A se dice que es *directamente finito* si $a, b \in A$, $ab = 1$ implican $ba = 1$.

El siguiente lema es consecuencia del Lema 1 de [8] pero aquí daremos una demostración algo más sencilla.

Lemma 1.1. *Sea A un anillo directamente finito y supongamos que $A[X]$ es un anillo de Bézout. Entonces A es regular.*

Demostración: Sea $a \in A$ y considérese el ideal por la derecha $I = aA[X] + (1 - X)\,A[X]$. Por hipótesis existe $p \in I$ tal que $a = pq$, $1 - X = pt$ (donde $q, t \in A[X]$). Dado que A es directamente finito, vemos que p no es divisor de cero por la izquierda. Por otra parte se tiene que $a(1 - X) = (1 - X)\,a$, luego $p(q(1 - X) - t\,a) = 0$. Por tanto $q(1 - X) = ta$, de esta relación se ve fácilmente que $q \in A[X]\,a$. Aplicando el homomorfismo $^{-} : A[X] \to A$ dado por $\bar{X} = 1$,

$\bar{x} = x(x \in A)$ vemos que $a = \bar{p}\,\bar{q} \in aAa$. Esto prueba que A es regular.

Observemos que la condición de ser A directamente finito no puede omitirse en el Lemma 1.1. En efecto, sea A un anillo no regular y tal que $A \oplus A \simeq A$, como A-modulos; entonces tensorializando con $A[X]$ vemos que todo $A[X]$-modulo finitamente generado es cíclico y, así, $A[X]$ es un anillo de Bézout.

Dado que un anillo neotheriano por la derecha es directamente finito y que un anillo neotheriano por la derecha regular es artiniano semisimple tenemos demostrado:

Corolario 1.2. *$A[X]$ es principal si y sólo si A es artiniano semisimple.*

El anillo de matrices $n \times n$ con coeficientes en A se denotará mediante $M_n(A)$.

Sea $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función. Supongamos que para cada matriz $n \times m, M,$ con coeficientes en $A[X]$ de grado $\leq p$ existen matrices invertibles $P \in M_n(A[X]), Q \in M_m(A[X])$ tales que los grados de P, Q, P^{-1} y Q^{-1} son inferiores a $f(n, m, p)$ y PMQ es diagonal; diremos entonces que $A[X]$ admite una *f-reducción diagonal.*

El lema siguiente proporciona ejemplos de anillos de polinomios que admiten f-reducción diagonal.

Lema 1.3. (1) *Existe una función f tal que para todo cuerpo K el anillo $K[X]$ admite f-reducción diagonal.*

(2) *Sea $q \in \mathbf{N}$. Entonces existe una función f tal que para todo cuerpo K y para cada entero t, $1 \leq t \leq q$, $M_t(K)[X]$ admite una f- reducción diagonal.*

La demostración del Lema 1.3 es directa, aunque tediosa, utilizando el algoritmo euclídeo de $K[X]$.

Veremos en lo que sigue que si A es directamente finito, entonces $A[X]$ admite una f-reducción diagonal si y sólo si A es un anillo regular con índice (de nilpotencia) acotado. Grosso modo: exigir una f-reducción diagonal implica, pues, una cota para los grados de nilpotencia y de ahí que se podría pensar que sí únicamente se exige reducción diagonal entonces no debería haber restricción para los grados de nilpotencia; aúnque veremos que este no es el caso.

Si S es un subconjunto de A entonces $\mathfrak{r}(S)$ significará el anulador por la derecha de S. El resultado que sigue es una versión generalizada del Lema VI. 3. 7 de [3].

Lema 1.4. *Sea* $a \in A$ *tal que* $a^n = 0$ *y* $a^{n-1} \neq 0$. *Supongamos que* $\mathfrak{r}(a^{n-1}) = eA$ *para cierto idempotente* e. *Entonces el polinomio* $p = e + aX$ *satisface las siguientes propiedades:* (1) $(1 - e)p = 0$, (2) $\mathfrak{r}(p)$ *está generado por un polinomio de grado* $n - 1$ *y no contiene polinomios de grado inferior, salvo el cero.*

Demostración: (1) es obvio.

(2) Es fácil demostrar que: (a) $\mathfrak{r}(a^{n-1}) \cap \mathfrak{r}(e) = 0$,
(b) $\mathfrak{r}(a^k) \subseteq \mathfrak{r}(a^k e)$ si $k \geq 1$.

Sea $q \in A[X]$ tal que $(e + aX)q = 0$. Entonces $e(1 + aX)q = 0$, es decir $(1 + aX)q \in (1 - e)A[X]$. Puesto que $(1 + aX)^{-1} = 1 - aX + \dots + (-1)^{n-1} a^{n-1} X^{n-1}$ tenemos que $q \in (1 - aX + \dots + (-1)^{n-1} a^{n-1} X^{n-1})(1 - e)A[X]$ y así $\mathfrak{r}(p)$ está generado por un polinomio de grado $n - 1$. Supongamos ahora que $(e + aX)(a_0 + \dots + a_m X^m) = 0$, se deduce fácilmente de (b) que $a^{m+1} a_0 = ea_0 = 0$. Si $m < n - 1$ entonces sigue de (a) que $a_0 = 0$, lo que completa la demostración.

Proposición 1.5 (a) *Sea* A *un anillo regular de índice* $\leq n$, *entonces* $A[X]$ *admite una* f*-reducción diagonal.*

Si A *es directamente finito el recíproco es cierto.*

(b) *Sea* A *un anillo regular cuyos cocientes primitivos son artinianos. Entonces* $A[X]$ *admite reducción diagonal.*

Demostración: (a) Sea $\bar{A}$ un cociente primitivo de A. Dado que en un anillo regular con índice acotado los cocientes primitivos son artinianos [2], (Teorema 7.9), $\bar{A} \cong M_N(K)$ donde $N \leq n$ y K es un cuerpo. Se sigue del Lema 1.3 (b) que $\bar{A}[X]$ admite una f-reducción diagonal para una función fija f. Demostraremos ahora que $A[X]$ admite una f-reducción diagonal. Procedemos por contradicción, supongamos que existe una matriz $t \times m$, M, con coeficientes en $A[X]$ y de grado p tal que:

(*) para cualesquiera matrices P, $P^{-1} \in M_t(A[X])$; Q, $Q^{-1} \in M_m(A[X])$ de grado $\leq f(t, m, p)$ la matriz PMQ no es diagonal.

Sea $C = \{I$ ideal de $A : \bar{M} \in R/I[X]$ satisface (*)$\}$. Por hipótesis C es no vacio. Sea $\{J_i\}$ una cadena de C (consideramos C ordenado por inclusión) y consideremos $J = \cup J_i$. Si $J \notin C$ entonces existen matrices P, Q, R, S con coeficientes en $A[X]$ y de grado $\leq f(t, m, p)$

tales que $PR - I_t$, $RP - I_t \in M_t(J[X])$, $QS - I_m$, $SQ - I_m \in M_m(J[X])$ y $PMQ - D$ es una matriz $t \times m$ con coeficientes en $J[X]$, donde D es una cierta matriz diagonal e I_t, I_m denotan las identidades de $M_t(A[X])$ y $M_m(A[X])$ respectivamente. Dado que cada matriz posee sólo un número finito de componentes existe un i tal que $\overline{M} \in A/J_i[X]$ no satisface (*) lo cual es contradictorio, así $J \in C$. Aplicando el Lema de Zorn podemos elegir un maximal de C, digamosle J. Dado que los cocientes primitivos de A admiten f-reducción diagonal, A/J no es primitivo y entonces por un teorema de Levitzki [2, Teorema 6.6] A/J contiene un idempotente central no trivial. Por lo tanto A/J se descompone en producto de dos anillos S y T no triviales. Del carácter maximal de J vemos que $\overline{M}$ no satisface (*) ni en $S[X]$ ni en $T[X]$. Por tanto M no satisface (*) en $A/J[X]$ lo cual contradice la elección de J.

Supongamos ahora que $A[X]$ admite una f-reducción diagonal y que A es directamente finito. Sea $a \in A$ un elemento de índice n, dado que A es regular (Lema 1.1) $\mathfrak{r}(a^{n-1})$ está generado por un idempotente $e \neq 1$. Consideremos el polinomio $e + aX$ y sea $U = \begin{pmatrix} * & p \\ * & q \end{pmatrix}$ una matriz invertible tal que $(1 - e, e + aX)\, U = (*, 0)$. Entonces se tiene que $(1 - e)\, p + (e + aX)\, q = 0$ y ya que $ea = a$ obtenemos $(e + aX)\, q = 0$. Ahora se deduce del Lema 1.4 que o bien $a = 0$ ó el grado de q es $\geq n - 1$. Si el índice de A no está acotado podemos tomar n suficientemente grande de manera que al admitir $A[X]$ f-reducción diagonal necesariamente sea $q = 0$; pero entonces p posee un inverso por la izquierda y dado que A es directamente finito, p es una unidad lo cual implica $1 - e = 0$, que es una contradicción.

La demostración de (b) sigue de manera similar a la demostración de la primera parte de (a).

Teorema 1.6 *Sea A un anillo cuyos cocientes primitivos sean artinianos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es regular*
(2) *$A[X]$ admite reducción diagonal*
(3) *$A[X]$ es un anillo de Bézout.*

Demostración: Se deduce de la Proposición 1.5(b) que (1) $\Rightarrow$ (2). Es trivial que (2) $\Rightarrow$ (3). Dado que A es directamente finito se deduce del Lema 1.1 que (3) $\Rightarrow$ (1).

Es interesante notar, en relación con el teorema anterior, que Goursaud [3, Proposición VI. 3.6] demuestra que en las condiciones del Teorema 1.6 el anillo $A[X]$ es semihereditario. En particular estos resultados aseguran que la intersección y la suma de dos ideales principales por la derecha de $A[X]$ es también principal.

Proposición 1.7 *Sean* A_i $(i = 1,2, \ldots)$ *anillos directamente finitos tales que el índice de nilpotencia de cada* A_i *es o bien no acotado o bien menor que el índice de nilpotencia de algún* $A_j, j > i$. *Si* $A = \prod_{i \geq 1} A_i$ *entonces* $A[X]$ *no es de Bézout.*

Demostración: Supongamos que $A[X]$ fuese un anillo de Bézout. Dado que A es directamente finito se sigue del Lema 1.1 que A es regular. Sin pérdida de generalidad podemos suponer, utilizando el Lema 1.4, que existen idempotentes $e_i \in A_i$ y nilpotentes $a_i \in A_i$ tales que el anulador por la derecha de $e_i + a_i X$ en $A_i[X]$ está generado por un polinomio de grado i y no posee polinomios de grado inferior salvo el 0. Definimos $e = (e_i) \in A$, $a = (a_i) \in A$ y consideramos el polinomio $b(X) = e + aX \in A[X]$. Ya que $(1 - e) A[X] + b(X) A[X]$ es principal se tienen relaciones de la forma $b(X) = c(X) d(X)$, $1 - e = c(X) f(X)$ y $(1 - e) p(X) + b(X) q(X) = c(X)$; puesto que $eb(X) = b(X)$ se deduce que $b(X) q(X) f(X) = 0$ y $b(X) (q(X) d(X) - 1) = 0$. Si $h(X) \in A[X]$ denotamos por $h_i(X)$ la proyección de $h(X)$ en $A_i[X]$; entonces de las relaciones anteriores se tiene, para i suficientemente grande, que $q_i(X) f_i(X) = 0$ y $q_i(X) d_i(X) = 1$. Puesto que A_i es directamente finito debe ser $f_i(X) = 0$ y en consecuencia $1 - e_i = 0$, lo cual es contradictorio.

Si $A \neq 0$ es un anillo de Hermite entonces es inmediato ver que A no puede contener dos elementos A-independientes (véase [5] pág. 140), esto hace suponer, en vistas del Lema 1.1, que los anillos A tales que $A[X]$ es un anillo de Hermite están cerca de ser regulares. A continuación vamos a ver que en ciertos casos A es directamente finito si se supone que es de Hermite; éste es el caso, por ejemplo, si A es auto-inyectivo por la derecha (izquierda) ya que entonces, como es conocido, A se descompone en producto de dos anillos A_1, A_2 tales que A_1 es directamente finito y $A_2 \oplus A_2 \cong A_2$ como A_2-módulos y, sí A_2 es un anillo de Hermite, $A_2 = 0$.

Proposición 1.8 (1) *Si* $x, y \in A$ *satisfacen* $xy = 1$, $A(1 - yx) A = A$, *entonces existe* $n \geq 1$ *tal que* A^{n+1} *está generado como* A*-módulo por* n *elementos.*

(2) *Si A es un anillo simple que no es directamente finito, entonces existe $n \geq 1$ tal que A^{n+1} está generado por n elementos.*

Demostración: (1) Por hipótesis existen elementos $a_i, b_i \in A$ tales que $a_1(yx - 1) b_1 + ... + a_n(yx - 1) b_n = 1$. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & \cdot & . & 0 \\ 0 & & \cdot & . x \\ a_1 & & ... & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} y & . & & 0 & (yx - 1) b_1 \\ & & \cdot & . & \vdots \\ 0 & & & \cdot y & (yx - 1) b_n \end{pmatrix}$$

A es una matriz $(n + 1) \times n$ y B es una matriz $n \times (n + 1)$. Entonces es claro que AB es una matriz unitriangular y, por tanto, invertible. En particular la matriz A posee una inversa por la derecha; en otras palabras A^{n+1} es isomorfo a un cociente de A^n.

(2) Es inmediato de (1).

Corolario 1.9 (1) *Si $A \neq 0$ es un anillo de Hermite y A^n está generado por m elementos, entonces $n \leq m$.*

(2) *Si A es un anillo de Hermite entonces todos los cocientes simples de A son anillos directamente finitos.*

Demostración: (1) Supongamos que A^n está generado por m elementos con $m < n$. Entonces existen matrices $M, n \times m$, y N, $m \times n$, tales que $MN = I_n$; consideremos las matrices $M' = (M, 0)$, $N' = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} \in M_n(A)$. Es claro que $M'N' = I_n$. Puesto que A es un anillo de Hermite existe $U \in A_n$ invertible y tal que $N'U$ es una matriz triangular (inferior) [7, Teorema 3.5]. Se ve fácilmente que las componentes de la n-ésima columna de $N'U$ son cero y lo mismo ocurre entonces con $M'N'U = U$, lo cual es imposible por ser U invertible.

(2) Sigue inmediatamente de Proposición 1.8(2) y del párrafo anterior.

Dada la estrecha relación entre los anillos auto-inyectivos y los anillos regulares [1], (Teorema 2.16, Corolario 2.31), vamos a considerar el caso de anillos de polinomios con coeficientes en un anillo auto-inyectivo A (es decir, A es inyectivo considerado como A-módulo por la derecha).

Teorema 1.10 *Sea A un anillo auto-inyectivo o auto-inyectivo por la izquierda. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *$A[X]$ admite reducción diagonal*

(2) *$A[X]$ es un anillo de Hermite*

(3) *A es regular con índice de nilpotencia acotado.*

Demostración: Trivialmente (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que $A[X]$ es un anillo de Hermite, dado que es auto-inyectivo (o auto-inyectivo por la izquierda) sabemos [1], (Teorema 10.16, Proposición 10.21), que A, módulo el radical de Jacobson, es producto de dos anillos A_1, A_2 de manera que A_1 es directamente finito y $A_2 \oplus A_2 \cong A_2$. Ya que A es de Hermite, $A_2 = 0$; así A es directamente finito. Aplicando el Lema 1.1 vemos que A es regular. Supongamos que A tiene índice infinito, entonces por un resultado de Goursaud [3], (Lema VI.3.8), existen idempotentes ortogonales e_n, $n \in \mathbf{N}$, tales que el índice de $e_n A e_n$ es $\varphi(n)$, donde φ es una función creciente, además se puede suponer que $I = \bigoplus e_n A$ es esencial en A. Supongamos que A es auto-inyectivo, utilizando el Lema 1.4, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen idempotentes $v_n \in A$ y nilpotentes $a_n \in A$ tales que el polinomio $v_n + a_n X \in e_n A e_n[X]$ tiene un anulador que no contiene polinomios de grado inferior a n salvo el 0. Dado que A es autoinyectivo, existen $v, a \in A$ tales que $ve_n = v_n$, $ae_n = a_n$; así $(v^2 - v) I = (va - v) I = 0$. Ya que A es regular se tiene que $v^2 = v$, $va = v$. Sea $J = (v + aX) A[X]$, en [4], (Teorema 12) o [3], (Teorema VI.3.9), se demuestra que un tal ideal J no es proyectivo (como $A[X]$-modulo). Vamos a llegar a contradicción demostrando que J es proyectivo. Sabemos que $A[X]$ es un anillo de Bézout, luego $(1 - v) A[X] + (v + aX) A[X] = p(X) A[X]$ para cierto polinomio $p(X)$; entonces se tiene que $(1 - v) A + vA = p(0)A$. Por lo tanto $p(0)$ tiene un inverso por la derecha y, dado que A es directamente finito, $p(X)$ no es divisor de cero en $A[X]$. Por otra parte es claro que $(1 - v) A[X] \cap (v + aX) A[X] = 0$; resulta, pues, que $(1 - v) A[X] \oplus (v + aX) A[X] = p(X) R[X] \cong R[X]$. Así $(v + aX) A[X]$ es proyectivo. Esto completa la demostración en el caso de ser A auto-inyectivo, si A es auto-inyectivo por la izquierda la demostración es similar.

(3) $\Rightarrow$ (1) Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.5(a).

(Es bien conocido que un anillo regular auto-inyectivo con índice de nilpotencia acotado es un producto directo finito de anillos de matrices sobre anillos regulares sin nilpotentes, y, en este caso también se deduce de [4], (Proposición VI. 3.2), que $A[X]$ es un anillo de Bézout).

2. Anillos generados por unidades

M. Henriksen [6] demuestra que si A es un anillo unitario y $n > 1$, entonces cada elemento de $M_n(A)$ es suma de tres unidades. Henriksen también da ejemplos de anillos A tales que no toda matriz 2×2 con coeficientes en A es suma de dos unidades. Así demuestra que si A es el anillo de polinomios en n indeterminadas sobre un cuerpo conmutativo, entonces $M_n(A)$ no es un $(S, 2)$-anillo ($(S, 2)$-anillo, con la notación de [6], significa que cada elemento es suma de dos unidades).

En esta sección vamos a caracterizar los anillos conmutativos A tales que $M_n(A[X])$ es un $(S, 2)$-anillo, sí $n > 1$.

Lema 2.1 *Sea A un anillo conmutativo reducido (es decir, sin nilpotentes). Supongamos que $M_n(A[X])$ es un $(S, 2)$-anillo, para un cierto $n > 1$, entonces A es regular.*

Demostración: Sea $a \in A$. Consideremos la matriz $M \in M_{n+1}(A[X])$ cuya primera fila es $(a^n X, a^{n-1} X^2, \ldots, aX^n, X^{n+1})$ y todas las demás componentes nulas. Por hipótesis M es suma de dos unidades, aplicando el Lema 5[6], resulta que existe una matriz invertible cuya primera columna es $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ y tal que

$1 + a^n X p_1 + \ldots + X^{n+1} p_{n+1}$ es invertible en $A[X]$, pero A es reducido luego

$$a^n p_1 + a^{n-1} X p_2 + \ldots + a X^{n-1} p_n + X^n p_{n+1} = 0, \tag{1}$$

ya que A es conmutativo se tiene que

$$p_1 A[X] + \ldots + p_{n+1} A[X] = A[X]. \tag{2}$$

Probaremos ahora, por inducción sobre n, que

$$p_1(0) \in \mathfrak{r}(a^n), p_2(0) \in aA + \mathfrak{r}(a^{n-1}), \ldots, p_{n+1}(0) \in aA. \tag{3}$$

Si $n = 1$, vemos por (1) que $ap_1 + Xp_2 = 0$ y el resultado es claro. Si $n > 1$, es claro de (1) que $p_1(0) \in \mathfrak{r}(a^n)$. Sí $p_1 = p_1(0) + Xq(X)$, entonces (1) se expresa en la forma

$$a^{n-1}(aq(X) + p_2) + \dots + X^{n-1}p_{n+1} = 0,$$

por inducción $aq(0) + p_2(0) \in \mathfrak{r}(a^{n-1}), \dots, p_{n+1}(0) \in aA$; el resultado sigue inmediatamente.

De (2) y (3) deducimos que $\mathfrak{r}(a^n) + aA = A$ y, dado que A es reducido, tenemos que $\mathfrak{r}(a) + aA = A$. Así $a \in aAa$, dado que a es un elemento arbitrario de A hemos demostrado que A es regular.

Proposición 2.2 *Sea A un anillo conmutativo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) $M_n(A[X])$ *es un* $(S, 2)$*-anillo, para todo* $n > 1$.

(2) $M_n(A[X])$ *es un* $(S, 2)$*-anillo, para cierto* $n > 1$.

(3) *Todo ideal primo de* A *es maximal.*

Demostración: Es claro que (1) implica (2). Supongamos que, para cierto $n > 1$, $M_n(A[X])$ es un $(S, 2)$-anillo. Sea N el nilradical de A, entonces $M_n(A/N)[X]$ es un $(S, 2)$-anillo. Se deduce del Lema 2.1 que A/N es regular, por lo tanto (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1) De la Proposición 1.5(a) resulta que $A/N[X]$ admite reducción diagonal, lo cual combinado con [6], (Teorema 11) permite deducir que $M_n(A/N[X])$ es un $(S, 2)$-anillo para todo $n > 1$. Sea $M \in M_n(A[X])$, entonces $M = U + V + Z$ es suma de dos unidades U, V y Z un elemento del radical de Jacobson de $M_n(A[X])$. Entonces $V + Z = V(1 + V^{-1}Z)$ es una unidad y, en consecuencia, M es suma de dos unidades.

El resultado que ofrecemos a continuación da una respuesta afirmativa a una pregunta de Henriksen [6], (pág. 192); en la demostración no se utilizan los resultados anteriores.

Proposición 2.3 *Si* $M_n(A)$ *es un* $(S, 2)$*-anillo, entonces* $M_{n+1}(A)$ *es un* $(S, 2)$*-anillo.*

Demostración: Sea $M \in M_{n+1}(A)$ supongamos que $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ es la primera fila de M. Por hipótesis, la matriz de $M_n(A)$ cuya primera fila es $(x_1, \dots, x_n)$ y todas las demás componentes nulas es suma de dos unidades. Entonces se deduce del Lema 4[6] que existe una matriz invertible $U \in M_n(A)$ tal que si $(a_1, \ldots, a_n)$ es la primera columna de U entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 1 + u$, donde u es una unidad de A. Sea $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(A)$, es claro que V es invertible y que la componente (1,1) de MV es $1 + u$. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_0 = 1 + u$. Escribamos M en la forma

$$\begin{pmatrix} 1+u & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \text{ donde } Y \in A^n,\ Z \in {}^nA,\ T \in M_n(A)$$

por hipótesis, $T = T_1 + T_2$ es suma de dos unidades T_1, T_2. Entonces es claro que las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ Z & T_2 \end{pmatrix}$$

son invertibles, de donde $M = M_1 + M_2$ es suma de dos unidades.

BIBLIOGRAFIA

[1] K.R. GOODEARL, *Ring Theory, Nonsingular Rings and Modules*, Dekker, New York, 1976.

[2] K.R. GOODEARL, *Von Neumann regular rings*, Pitman, London, 1979.

[3] J.M. GOURSAUD, *Sur les anneaux introduits par la notion de module projectif*. Tésis, Universidad de Poitiers, 1977.

[4] J.M. GOURSAUD y J.L. PASCAUD, *Anneaux semi-héréditaires*, C.R. Acad. Sc. Paris t. 284 (14 marzo 1977).

[5] M. HENRIKSEN, *On a class of regular rings that are elementary divisor rings*, Arch. Math. 34 (1973), 133-141.

[6] M. HENRIKSEN, *Two classes of Rings generated by their units*, J. of Algebra 31, 182-193 (1974).

[7] I. KAPLANSKY, *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math Soc. 66(1949) 464-491.

[8] P. MENAL, *Anneaux de groupe principaux à droite*, C.R. Acad. Sc. Paris t. 288 (18 junio 1979).

Pere Menal
Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Barcelona, Bellaterra, Espanya