SOBRE CIERTAS CLASES DE CONJUNTOS EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

por

M. Valdivia

SUMMARY

In this paper we obtain some classes of separated locally convex spaces which are $\mathcal{M}$-spaces. We give also some results on compact convex sets and new characterizations of weak compactness.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos. En lo sucesivo, salvo que se diga otra cosa, la palabra «espacio» significará «espacio vectorial topológico, localmente convexo y de Hausdorff». Dado el par dual $\langle E, F\rangle$, denotamos por $\sigma(E, F)$ y $\mu(E, F)$ las topologías débil y de Mackey, respectivamente, sobre E. Dado el espacio E, E^* es su dual algebraico y E' su dual topológico. Suponemos que E está sumergido, mediante la inyección canónica, en el dual algebraico E'^* de E'. Si A es un subconjunto cerrado, acotado y absolutamente convexo de E, E_A es el espacio normado sobre la envoltura lineal de A, que tiene A como bola unidad cerrada.

Sea ω el primer ordinal de cardinal no numerable y sea Ω el conjunto de todos los ordinales menores que ω. Representamos $E'[\sigma(E', E)]$ por E'_0. Dado el elemento α de Ω, $0 < \alpha$, supongamos que hemos construido E'_β para cada $\beta < \alpha$. Ponemos E'_α para el subespacio de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ formado por las clausuras en $E^*[\sigma(E^*, E)]$ de los subconjuntos acotados separables contenidos en $\bigcup \{E'_\beta : \beta < \alpha\}$. Sea $S(E')$ el subespacio de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ que coincide con $\bigcup \{E'_\beta : : \beta \leqslant \omega\}$. Si A es un subconjunto acotado separable de $S(E')$, sea B un subconjunto denso numerable de A. Podemos hallar un elemento α de Ω de manera que B esté contenido en E'_α. Entonces, la clausura de A en $E^*[\sigma(E^*, E)]$ está contenida en $E'_{\alpha+1}$, lo que nos indica que $S(E')$ es el menor subespacio de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ que contiene a

E' y en el que cada subconjunto acotado separable es relativamente compacto. Representamos por $\mathcal{A}_1$ la familia de todos los conjuntos absolutamente convexos, separables y compactos de $S(E')$. Sea $\mathcal{A}_2$ la familia de todos los conjuntos absolutamente convexos y compactos de $E'[\sigma(E', E)]$. Ponemos:

$$\mathcal{A} = \{A_1 + A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

Denotamos por $\lambda(E, S(E'))$ la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre cada elemento de $\mathcal{A}$. En el espacio E, decimos que el conjunto M es hiperacotado si cada función real y continua sobre $E[\sigma(E, E')]$ está acotada en M. En [5] hemos demostrado el siguiente teorema: a) Si *M es un conjunto hiperacotado en un espacio casi-completo E, entonces M es débil, relativamente compacto.* Una ligera modificación en la prueba dada del resultado anterior nos permite obtener la Proposición 1.

Proposición 1. Si M es un conjunto hiperacotado en un espacio E, entonces M es débil, relativamente compacto en la casi-complección de $E[\mu(E, E')]$.

Para la demostración del Teorema 1, necesitaremos el siguiente resultado, [5]: b) *Si M es un conjunto hiperacotado en el espacio E, cada elemento de la clausura M^* de M en E'^* es continua sobre cada subespacio separable de E' $[\sigma(E', E)]$.*

Teorema 1. Sea M un conjunto débilmente cerrado e hiperacotado en un espacio E. Si $E[\lambda(E, S(E'))]$ es completo, entonces M es $\sigma(E, E')$-compacto.

Demostración. Sea $\{L_i : i \in I\}$ la familia de todos los subespacios separables de $E'[\sigma(E', E)]$. Si $\bar{L}_i$ es la clausura de L_i en $E^* (\sigma(E^*, E)]$, ponemos

$$L = \cup \{\bar{L}_i : i \in I\}.$$

Suponemos que el espacio vectorial L está dotado de la topología $\sigma(L, E)$. Si z es un elemento de la clausura M^* de M en $E'^*[\sigma(E'^*, E')]$, se tiene, de acuerdo con el resultado b), que la restricción z_i de z a L_i es continua y, por tanto z_i se extiende a una función lineal y débilmente continua $\bar{z}_i$ sobre $\bar{L}_i$. Es inmediato que existe una función lineal $\bar{z}$ sobre L cuya restricción a cada $\bar{L}_i$ coincide con $\bar{z}_i$. Si z^* es la restricción de $\bar{z}$ a $S(E')$ es obvio que z^* es continua sobre cada elemento de $\mathcal{A}_1$. Por otra parte, de acuerdo con la Proposición 1, z^* es continua sobre cada elemento de $\mathcal{A}_2$.

Si $A_1 \in \mathcal{A}_1$ y $A_2 \in \mathcal{A}_2$, veamos que z^* es continua sobre $A_1 + A_2$. Supongamos que existe un elemento u en $A_1 + A_2$ en el cual la restricción de z^* a $A_1 + A_2$ no es continua. Puesto que $A_1 + A_2$ es compacto, podemos hallar una red

$$\{u_j : j \in J, \geqslant\}$$

en $A_1 + A_2$, convergente a u, de manera que existe el límite finito de

$$\{\langle u_j, z^* \rangle : j \in J, \geqslant\}$$

y es distinto de $\langle u, z^* \rangle$. Ponemos

$$u_j = u_j^{(1)} + u_j^{(2)}, \quad u_j^{(1)} \in A_1, \quad u_j^{(2)} \in A_2.$$

Por la compacidad de A_1 y A_2, podemos extraer de la red dada una sub-red, que seguimos representando con la misma notación, de manera que

$$\{u_j^{(1)} : j \in J, \geqslant\} \quad \text{y} \quad \{u_j^{(2)} : j \in J, \geqslant\}$$

convergen en A_1 y A_2 a u_1 y u_2, respectivamente. Es obvio que $u = u_1 + u_2$. Entonces, por la continuidad de z^* en A_1 y en A_2, se tiene que

$$\langle u, z^* \rangle = \langle u_1, z^* \rangle + \langle u_2, z^* \rangle = \lim \{\langle u_j^{(1)}, z^* \rangle : j \in J, \geqslant\} + \\ + \lim \{\langle u_j^{(2)}, z^* \rangle : j \in J, \geqslant\} = \lim \{\langle u_j, z^* \rangle : j \in J, \geqslant\} \neq \langle u, z^* \rangle,$$

lo cual es una contradicción. Podemos asegurar, pues, que z^* es continua en $A_1 + A_2$. Por un resultado de Collins-Pták, [2] p. 271, z^* pertenece a $E[\lambda(E, S(E'))]$, de aquí que z, restricción de z^* a E', pertenezca a E, luego M es $\sigma(E, E')$-compacto. c.q.d.

Sea X un espacio topológico completamente regular. Sea $C(X)$ el espacio vectorial de las funciones reales y continuas sobre X, con la topología compacta abierta. Se dice que X es un $\mathcal{M}$-espacio si cada subconjunto cerrado P de X, sobre el cual cada elemento de $C(X)$ esté acotado, es compacto. L. Nachbin [3] y T. Shirota [4] han demostrado el siguiente teorema: c) *El espacio $C(X)$ es tonelado si, y sólo si, X es un* $\mathcal{M}$-espacio.

Teorema 2. Si E es un espacio tal que $E[\lambda(E, S(E'))]$ es completo, entonces $C(E[\sigma(E, E')])$ es tonelado.

Demostración. Si M es un conjunto hiperacotado y débilmente cerrado de E, entonces M es $\sigma(E, E')$-compacto, de acuerdo con el teorema anterior, lo que es equivalente a decir que $E[\sigma(E, E')]$ es un $\mathcal{M}$-espacio y, por el resultado c), $C(E[\sigma(E, E')])$ es un espacio tonelado. c.q.d.

Teorema 3. Sea A un subconjunto débilmente cerrado en un espacio E de manera que cumplen las siguientes condiciones:

1. *$E[\lambda(E, S(E'))]$ es completo.*
2. *En $C(E[\sigma(E, E')])$, dada una sucesión cualquiera (f_n), acotada y creciente, que converge a f puntualmente, la convergencia es uniforme en A.*

Entonces A es $\sigma(E, E')$-compacto.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1, basta demostrar que A es hiperacotado en E. Supongamos que no es así. Entonces existe una función real y continua g sobre E $[\sigma(E, E')]$ que no está acotada en A. Tomamos $x_1 \in A$ y para cada entero positivo $n > 1$, $x_n \in A$, de manera que

$$|g(x_n)| > |g(x_{n-1})| + 1.$$

Si

$$A_n = \left\{x \in E : |g(x) - g(x_n)| < \frac{1}{2}\right\}, \quad n = 1,2, \ldots,$$

los conjuntos de la sucesión (A_n) son abiertos, disjuntos dos a dos y forman en $E[\sigma(E, E')]$ una familia localmente finita. Sea g_n un elemento de $C(E[\sigma(E, E')])$ tal que

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant 1, \quad x \in E,$$
$$g_n(x_n) = 1, \; g_n(x) = 0, \; x \notin A_n.$$

Si

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} g_p(x), \; f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} g_p(x), \; x \in E, \; n = 1,2, \ldots,$$

en $C(E[\sigma(E, E')])$, la sucesión (f_n) es acotada, creciente y converge puntualmente a f. Por otra parte, es inmediato que dicha sucesión no converge uniformemente a f en A. c.q.d.

Teorema 4. Sea A un subconjunto débilmente cerrado en un espacio E, de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

1. *$E[\lambda(E, S(E'))]$ es completo.*

2. *En* $C(E[\sigma(E, E')])$, *dada una sucesión cualquiera* (f_n) *acotada y equicontinua en* A, *se puede extraer de ella una subsucesión que es uniformemente de Cauchy en* A.

Entonces A *es* $[\sigma(E, E')]$*-compacto.*

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 3. La misma sucesión, construida allí, está acotada en E y es equicontinua en A. Sin embargo, no se puede extraer de ella ninguna subsucesión uniformemente de Cauchy en A. Luego A es $\sigma(E, E')$-compacto.
c.q.d.

Representamos ahora el dual topológico E' del espacio E, por $E^{(0)}$. Dado el elemento α de Ω, $o < \alpha$, supongamos que hemos construido $E^{(\beta)}$, $\beta < \alpha$. Ponemos $E^{(\alpha)}$ para el subespacio de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ formado por los límites de las sucesiones de Cauchy contenidas en $\cup \{E^{(\beta)} : \beta < \alpha\}$. Sea $T(E')$ el subespacio de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ que coincide con $\cup \{E^{(\beta)} : \beta < \omega\}$. Entonces $T(E')$ es el mínimo subespacio de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ que contiene E' y que es sucesionalmente completo. Sea $\mathcal{B}_1$ la familia de todos los conjuntos absolutamente convexos, cerrados, acotados y metrizables para la uniformidad canónica de $T(E')$. Ponemos

$$\mathcal{B} = \{B_1 + A_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

Denotamos por $\varrho(E, T(E'))$ la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre cada elemento de $\mathcal{B}$.

Nota 1. En el espacio E, sea D un subconjunto acotado, cerrado y absolutamente convexo, tal que E_D es un espacio de Banach. Entonces D es un subconjunto acotado de $E[\sigma(E, T(E'))]$. En efecto, aplicando el método de inducción transfinita, sea α un elemento de Ω, $\alpha > 0$, tal que D es $\sigma(E, E^{(\beta)})$-acotado, $\beta < \alpha$, (esto se cumple, evidentemente para $\alpha = 0$). Si v pertenece a $E^{(\alpha)}$, existe una sucesión (v_n) en $\cup (E^{(\beta)} : \beta < \alpha\}$ que converge a v en $E^*[\sigma(E^*, E)]$. El conjunto polar M en E de

$$\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$$

es un tonel en $E[\sigma(E, \cup \{E^{(\beta)}, \beta < \alpha\})]$ y, por tanto, $M \cap E_D$ es un tonel en E_D, de aquí que M absorba D y, por consiguiente, la forma lineal v está acotada en D. Resulta, pues, que D es un acotado de $E[\sigma(E, T(E')]$.

Sea B un subconjunto compacto de $E[\sigma(E, E')]$. Representamos por $K(B)$ el espacio vectorial de las funciones definidas y continuas en B que toman sus valores en K, con la topología de la convergencia uniforme. Sea A la envoltura absolutamente convexa cerrada de B en $E'^*[\sigma(E'^*, E')]$. Fijemos un punto x de A. Si z es un punto de la envoltura absolutamente convexa de B, entonces

$$z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p, \ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K,$$
$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_p| \leqslant 1, \ x_1, x_2, \dots, x_p \in B,$$

y, por tanto, si $x' \in E'$ y ε es un número positivo tal que

$$|\langle u, x' \rangle| < \varepsilon, \text{ para cada } u \in B$$

se tiene que

$$|\langle z, x' \rangle| \leqslant |\alpha_1| \cdot |\langle x_1, x' \rangle| + |\alpha_2| \cdot |\langle x_2, x' \rangle| + \dots + |\alpha_n| \cdot |\langle x_n, x' \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|) \ \varepsilon \leqslant \varepsilon,$$

y puesto que x' es continua en $E'^*[\sigma(E'^*, E')]$, resulta que $|\langle x, x' \rangle| \leqslant \varepsilon$ luego podemos considerar x como una forma lineal continua sobre el subespacio L de $K(B)$ formado por las restricciones de los elementos de E' a B. Podemos extender x a una forma lineal continua $\bar{x}$ sobre $K(B)$, de aquí que, aplicando el teorema de representación de Riesz, exista una medida de Radon compleja μ sobre B, de manera que, para cada $f \in K(B)$, se verifique

$$\bar{x}(f) = \int_B f \, d\mu$$

Proposición 2. Si $E_{A \cap E}$ es un espacio de Banach y v es un elemento cualquiera de $T(E')$, la restricción g de v a B es μ-integrable.

Demostración. Si v pertenece a $E^{(0)}$, entonces g es continua en B y, por tanto, es μ-integrable. Supongamos que α es un elemento de Ω, $\alpha > 0$, tal que la restricción de cada elemento de

$$\cup \{E^{(\beta)} : \beta < \alpha\}$$

a B es μ-integrable. Si v pertenece ahora a $E^{(\alpha)}$, existe una sucesión (v_n) en

$$\cup \{E^{(\beta)} : \beta < \alpha\}$$

que converge a v en $E^*[\sigma(E^*, E)]$. Si g_n es la restricción de v_n a B, la sucesión (g_n) converge a g puntualmente y, puesto que g_n es μ-integrable, $n = 1, 2, \ldots$, resulta que g es μ-medible. Finalmente, g está acotada en B, luego g es μ-integrable. c.q.d.

Nota 2. Se puede considerar x como un elemento x^* del dual algebraico de $T(E')$, poniendo para cada $x' \in T(E')$,

$$\langle x^*, x' \rangle = \int_B f \, d\mu ,$$

en donde f es la restricción de x' a B.

Proposición 3. Si $E_{A \cap E}$ es un espacio de Banach, el elemento x^* pertenece a la compleción de $E[\varrho(E, T(E'))]$.

Demostración. Sea (x'_n) una sucesión de $T(E')$ que converge a x'. Sean f_n y f las restricciones de x'_n y x' a B, respectivamente, $n = 1, 2, \ldots$ Se tiene que f_n y f son funciones μ-integrables y uniformemente acotadas en B, de aquí que se aplique el teorema de la convergencia acotada de Lebesgue. Luego

$$\lim_{n \to \infty} \langle x^*, x'_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \int_B f_n \, d\mu = \int_B f \, d\mu = \langle x^*, x' \rangle ,$$

lo que expresa que x^* es continua sobre los elementos de $\mathfrak{B}_1$. Por otra parte, es conocido que x pertenece a la compleción de $E[\mu(E, E')]$, [2], p. 325. Razonando igual que en la prueba del Teorema 1, se obtiene que x^* es continua sobre los elementos de $\mathfrak{B}$. Por tanto, x^* pertenece a la compleción de $E[\varrho(E, T(E')]$. c.q.d.

Proposición 4. En E $[\sigma(E, E')]$ sea $\{x_j : j \in J, \geqslant\}$ una red que converge a x. Si dicha red es de Cauchy en E $[\lambda(E, S(E'))]$, entonces converge a x en este último espacio.

Demostración. Es obvio que $\{x_j : j \in J \geqslant\}$ converge a x uniformemente sobre cada acotado separable de $E'[\sigma(E' E)]$.

Sea α un elemento de Ω, $\alpha > 0$, y supongamos que la red dada converge a x uniformemente sobre cada acotado separable de $\cup \{E_\beta' : \beta < \alpha\}$. Si u es un elemento cualquiera de E_α', existe un acotado separable A en $\cup \{E_\beta' : \beta < \alpha\}$ tal que u está en su $\sigma(E_\alpha', E)$-clausura. Dado un $\varepsilon > 0$, existe un índice $j_0 \in J$ de manera que

$$|\langle x_h - x_k, x' \rangle| \leqslant \varepsilon, \ h, k \in J, \ h, k \geqslant j_0, \ x' \in A,$$

de aquí que

$$|\langle x_j - x, x' \rangle| \leqslant \varepsilon, \ j \in J, \ j \geqslant j_0, \ x' \in A,$$

y, consecuentemente,

$$|\langle x_j - x, u\rangle| \leqslant \varepsilon, j \in J, j \geqslant j_0,$$

de aquí que la red dada converja a x para la topología $\sigma(E, E'_\alpha)$. Puesto que dicha red es de Cauchy para la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre cada acotado separable de E'_α, se tiene que converge a x para dicha topología. Podemos afirmar, pues, que $\{x_j : j \in J \geqslant\}$ converge a x uniformemente sobre cada elemento de $\mathcal{A}_1$. Es obvio que también converge a x sobre cada elemento de $\mathcal{A}_2$. Podemos afirmar, pues, que la proposición es cierta. c.q.d.

Teorema 5. Sea M un conjunto hiperacotado en un espacio E y sea P la envoltura absolutamente convexa cerrada de M, de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

1. *$E[\varrho(E, T(E'))]$ es completo.*
2. *E_p es un espacio de Banach.*

Entonces P es $\sigma(E, E')$-compacto.

Demostración. Sea B la clausura de M en E_σ. Si $\{x_j : j \in J, \geqslant\}$ es una red de Cauchy en $E[\lambda(E, S(E')]$ es inmediato que también es de Cauchy en $E[\varrho(E, T(E'))]$ y, por consiguiente, converge en este espacio a un elemento x, de aquí que dicha red converge a x en $E[\sigma(E, E')]$. Aplicamos la proposición anterior y obtenemos que $\{x_j : j \in J, \geqslant\}$ converge a x en $E[\lambda(E, S(E'))]$. Por tanto, $E[\lambda(E, S(E'))]$ es completo. Puesto que B es un subconjunto débilmente cerrado e hiperacotado de E, se obtiene, teniendo en cuenta el Teorema 1, que B es $\sigma(E, E')$-compacto. Finalmente, P es la envoltura absolutamente convexa cerrada de B en E, por lo que, de acuerdo con la Proposición 3, P es $\sigma(E, E')$-compacto. c.q.d.

Corolario 1.5. Sea M un conjunto hiperacotado en un espacio E y sea P la envoltura absolutamente convexa cerrada de M, de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

1. *E es sucesionalmente completo.*
2. *$E[\varrho(E, T(E'))]$ es completo.*

Entonces P es $\sigma(E, E')$-compacto.

Corolario 2.5. Sea M un conjunto débil, numerablemente compacto en un espacio E y sea P la envoltura absolutamente convexa cerrada de M, de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $E[\varrho(E, T(E'))]$ *es completo.*
2. E_P *es un espacio de Banach.*

Entonces P *es* $\sigma(E, E')$*-compacto.*

Decimos que un espacio E es de generación débilmente σ-compacta si existe una sucesión (A_n) de subconjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos en E, cuya unión es total en E. En [6] hemos demostrado el siguiente resultado: d) *Si* E *es un espacio de generación débilmente* σ*-compacta, cada conjunto (relativamente) numerablemente compacto de* $E'[\sigma(E', E)$ *es (relativamente) compacto en este espacio.* Necesitaremos el siguiente teorema de Schwartz y Dieudonné [1] y [2] p. 311: e) *Si el espacio* E *es de generación débilmente* σ*-compacta, cada subconjunto de* $E'[\sigma(E', E)]$ *numerablemente compacto es sucesionalmente compacto.*

Proposición 5. Supongamos que existe en un espacio E *una topología* $\mathcal{T}$ *más fina que la inicial de manera que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $E[\mathcal{T}]$ *es* B_r*-completo.*
2. $E[\mathcal{T}]$ *es de generación débilmente* σ*-compacta.*
3. *Si* F *es el dual topológico de* $E[\mathcal{T}]$, $F[\sigma(F, E)]$ *es sucesionalmente completo.*

Entonces $T(E') = F$.

Demostración. Puesto que $F[\sigma(F, E)]$ es sucesionalmente completo, resulta que $T(E') \subset F$. Por otra parte, $E' \subset T(E')$, de aquí que $T(E')$ sea denso en $F[\sigma(F, E)]$. En $F[\sigma(F, E)]$, si A es un subconjunto cerrado y $\mathcal{T}$-equicontinuo, sea (u_n) una sucesión en $T(E') \cap A$. Se aplica e) y se obtiene una sucesión (z_n) de (u_n) que converge a z en A. Puesto que $T(E') \cap A$ es sucesionalmente completo, se tiene que $z \in (T(E')) \cap A$, de aquí que $T(E') \cap A$ sea débil, numerablemente compacto y, de acuerdo con el resultado d), $T(E') \cap A$ es compacto. Por ser $E[\mathcal{T}]$ B_r-completo, resulta, finalmente, que $T(E')$ coincide con F. c.q.d.

Teorema 6. Sea B *un subconjunto débilmente compacto en un espacio* E*. Sea* A *la envoltura absolutamente convexa y cerrada de* B*. Si* E_A *es un espacio de Banach de generación débilmente* σ*-compacta, entonces* A *es débilmente compacto.*

Demostración. Si F es la envoltura lineal de A, existe una topología $\mathcal{T}$ sobre F, más fina que la inicial, de manera que $F[\mathcal{T}]$ es igual a E_A, que cumple las condiciones de la proposición anterior. Entonces $T(F')$ coincide con el dual topológico de E_A y $\varrho(F, T(F'))$ es la topología de E_A, que es completa. Basta aplicar ahora el Teorema 5 para tener la conclusión. c.q.d.

Teorema 7. Sea B un conjunto débilmente compacto en un espacio E. Sea A la envoltura absolutamente convexa cerrada de B. Si el conjunto B es numerable, es condición necesaria y suficiente para que A sea débilmente compacto que E_A sea un espacio de Banach.

Demostración. Si A es débilmente compacto, entonces E_A es, obviamente, un espacio de Banach. Recíprocamente, supongamos que E_A sea un espacio de Banach. La envoltura lineal cerrada G de B en E_A es un espacio de Banach separable y $E_{A \cap G} = G$. Aplicamos el teorema anterior sustituyendo A por $A \cap G$ y obtenemos que $A \cap G$ es débilmente compacto y de aquí $A = A \cap G$. c.q.d.

Nota 3. En [2] p. 249 se demuestra el siguiente resultado: f) *Sea (x_n) una sucesión débilmente convergente al origen en un espacio sucesionalmente completo E. Si A es la envoltura absolutamente convexa cerrada de dicha sucesión, entoces A es débilmente compacto. Obsérvese que por ser E sucesionalmente completo, E_A es un espacio de Banach. Por otra parte, el conjunto* $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es numerable y débilmente compacto. *Por tanto,* f) *es un corolario de nuestro Teorema 7.*

Nota 4. El Teorema 7 no es válido en general si B no es numerable, ni incluso cuando B es metrizable, como prueba el siguiente ejemplo: Sea $\mathcal{P}_f([0, 1])$ al conjunto de las partes finitas del intervalo $[0, 1]$ que contienen a los extremos de dicho intervalo.

Dado

$$J = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}, \ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1,$$

definimos la función f_J de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, poniendo

$$f_J(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$$

$$f_J(x) = 1, \text{ si } x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$f_J(x) \text{ es lineal en } \left[x_i, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right] \text{ y en } \left[\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, x_{i+1}\right], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Es inmediato que la red $\{f_J : J \in \mathcal{P}_f([0, 1]), \subset\}$ converge puntualmente a la función nula. Si E es el espacio $C([0, 1])$ y μ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, la integral de Lebesgue en dicho intervalo es un elemento v de E'. Se tiene que

$$\int_{[0,\,1]} f_J \, d\mu = \frac{1}{2}, \text{ para } J \text{ en } \mathcal{P}_f([0, 1]).$$

Por otra parte, la red

$$\{f_J : J \in \mathcal{P}_f([0, 1]), \subset\},$$

está acotada en E y, por tanto, existe una sub-red

$$\{f_\lambda : \lambda \in L, \geqslant\}$$

que converge en la topología $\sigma(E'', E')$ a un elemento g de E''. En particular,

$$\{v(f_\lambda) : \lambda \in L, \geqslant\}$$

converge a $v(g)$. Pero $v(f_\lambda) = \frac{1}{2}$, para cada λ de L, luego $v(g) = \frac{1}{2}$. Si g estuviera en E, la red

$$\{f_\lambda : \lambda \in L, \geqslant\}$$

convergería a g en la topología $\sigma(E, E')$ y, por consiguiente,

$$\{f_\lambda : \lambda \in L, \geqslant\}$$

convergería a g puntualmente en $[0, 1]$, luego g sería la función nula y obtendríamos la contradicción.

$$\frac{1}{2} = v(g) = v(0) = 0.$$

Por tanto, g no está en E. Sea H el hiperplano de E', núcleo de g. H es $\sigma(E', E)$-denso en E' y, obviamente, $[0, 1]$ puede considerarse como un subconjunto de H. Sea A la envoltura absolutamente convexa y $\sigma(H, E)$-cerrada de $[0, 1]$ en H. Si U^0 es el conjunto polar en E' de la bola unidad cerrada U de E, entonces $U^0 \cap H = A$, de aquí que A no sea $\sigma(H, E)$-compacto. Sin embargo H_A es un subespacio cerrado de E'_{U° y, por tanto, es un espacio de Banach.

Nota 5. Decimos que un espacio tiene la propiedad de Krein, si dado un subconjunto A de el, débilmente compacto, su envoltura absolutamente convexa cerrada es débilmente compacta. Dado el espacio E, sea $U(E')$ el subespacio mínimo de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ que contiene E' y que es de Krein. Sea B un conjunto débil, numerablemente compacto de E y sea A la envoltura absolutamente convexa y cerrada de B, tal que E_A es un espacio de Banach. Puede demostrarse que $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E, U(E'))$ coinciden en B, utilizando la siguiente propiedad [6]: *Si M es un conjunto débilmente compacto de $E'[\sigma(E', E)]$ y z pertenece a la clausura de B en E'^*, entonces z es débilmente continua en la envoltura absolutamente convexa cerrada de M.*

Lo que acabamos de decir sobre el espacio $U(E')$ permite afinar muchos de los resultados expuestos en este artículo.

BIBLIOGRAFIA

1. DIEUDONNÉ, J. et L. SCHWARTZ: *La dualité dans les espaces (F) et (LF).* Ann. Inst. Fourier, *1*, 61-101 (1950).

2. KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces I.* Berlin-Heidelberg-New York. Springer. 1969.

3. NACHBIN, L.: *Topological vector spaces of continuous functions.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA *40*, 471-474 (1954).

4. SHIROTA, T.: *On locally convex vector spaces of continuous functions.* Proc. Jap. Acad. *30*, 294-298, (1954).

5. VALDIVIA, M.: *Some news results on weak compactness.* J. of Functional Analysis, *24*, 1-10, (1977).

6. VALDIVIA, M.: *Some criteria for weak compactness.* J. für d. reine und angew. Math. *255*, 165-169, (1972).

Prof. Manuel Valdivia

Facultad de Matemáticas
Dr. Moliner s/n.
Burjasot - VALENCIA