EINE NEUE CHARAKTERISIERUNG BORNOLOGISCHER UND VERWANDTER RÄUME

von

ROLAND BEHRENS

Von Köthe [1], Théorème 1, bzw. [2], § 28.5.(4) stammt die folgende Charakterisierung der bornologischen Räume:

«Ein Raum $E[\mathcal{T}]$ ist genau dann bornologisch, wenn $\mathcal{T}$ die Mackey-Topologie ist und der Dualraum E', versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den lokalen Nullfolgen von $E[\mathcal{T}]$, vollständig ist.»

Mit diesem Satz sind die bornologischen Räume dual charakterisiert. Im folgenden wird im wesentlichen eine Charakterisierung der bornologischen Räume über Räume linearer Abbildungen gegeben, die insofern von Vorteil ist, als auf die Bedingung, daß $\mathcal{T}$ die Mackey-Topologie ist, verzichtet werden kann. Eine im Lemma (3) bewiesene Eigenschaft der bornologischen Räume $E[\mathcal{T}]$, nämlich die feinste derjenigen lokalkonvexen Topologien $\mathcal{T}'$ zu tragen, die auf der gesättigten Hülle der lokalen Nullfolgen von $E[\mathcal{T}]$ $\mathcal{T}$ induzieren, wird zur Definition der $\mathcal{M}$-lokaltopologischen Räume herangezogen. Die Charakterisierung über Räume linearer Abbildunge besitzt dann nicht nur im Fall der bornologischen, sondern allgemeiner im Fall der $\mathcal{M}$-lokaltopologischen Räume Gültigkeit.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung möchte ich Herrn N. Adasch herzlich danken.

Die nicht definierten Begriffe sind Köthe [2] entnommen.

DEFINITION 1: Sei $E[\mathcal{T}]$ ein lokalkonvexer Raum. Mit $\mathcal{M}$ werde ein gesättigtes totales System beschränkter Mengen von $E[\mathcal{T}]$ bezeichnet. In $\mathcal{M}$ wird ein Fundamentalsystem ausgezeichnet, das aus absolutkonvexen abgeschlossenen Mengen M_α, α aus einer Indexmenge I, besteht. Die Indexmenge I wird vermöge $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow M_\alpha \subset M_\beta$ zu einer gerichteten Menge. Dieses Fundamentalsystem $\{M_\alpha | \alpha \in I\}$ werde wieder mit $\mathcal{M}$ bezeichnet.

Definition 2: Sei $E[\mathcal{T}]$ ein lokalkonvexer Raum. Die feinste derjenigen lokalkonvexen Topologien, die auf den $M_\alpha \in \mathcal{M}$ $\mathcal{T}$ induzieren, werde mit $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ bezeichnet. Gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mathcal{M}}$, so werde $E[\mathcal{T}]$ $\mathcal{M}$-lokaltopologisch genannt. Eine lineare Abbildung $A: E[\mathcal{T}] \to F$ heiße *$\mathcal{M}$-lokalstetig*, wenn ihre Einschränkungen auf die M_α, $\alpha \in I$, für die von $\mathcal{T}$ herrührende Relativtopologie stetig sind.

(1) (Garling [1], 2. proposition 1) *Eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ wird durch Mengen der Form*

$$V = \Gamma_{\alpha \in I} M_\alpha \cap U_\alpha,$$

U_α beliebige absolutkonvexe abgeschlossene $\mathcal{T}$-Nullumgebung, gebildet.

(2) *Ein Raum $E[\mathcal{T}]$ ist genau dann $\mathcal{M}$-lokaltopologisch, wenn jedes $\mathcal{M}$-lokalstetige $A: E[\mathcal{T}] \to F$ (F sei ein beliebiger Banachraum) $\mathcal{T}$-stetig ist.*

Beweis: Sei V eine absolutkonvexe $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$-Nullumgebung, $N := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n} V$, $F_1 := \frac{E}{N}$, normiert durch das Minkowski-Funktional von $V + N$, $F := \widetilde{F}_1$ und K der kanonische Quotientenhomomorphismus von $E[\mathcal{T}]$ nach F. Man zeigt leicht, daß K $\mathcal{M}$-lokalstetig ist, nach Voraussetzung ist K also $\mathcal{T}$-stetig. Deshalb ist V eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung. Die Umkehrung ist trivial.

(3) *$E[\mathcal{T}]$ sei ein lokalkonvexer Raum. $\mathcal{M}\mathcal{P}$ sei die gesättigte Hülle der lokalen Nullfolgen von $E[\mathcal{T}]$, und $\mathcal{T}^\times$ bezeichne die zu $\mathcal{T}$ assoziierte bornologische Topologie.*

Dann gilt $\mathcal{T}^\times = \mathcal{T}^{\mathcal{M}\mathcal{P}}$.

Beweis: $\mathcal{T}^\times \leqslant \mathcal{T}^{\mathcal{M}\mathcal{P}}$: Köthe bewies implizit in [2], § 28.5.(4), daß auf den absolutkonvexen abgeschlossenen Hüllen der lokalen Nullfolgen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}^\times$ übereinstimmen. Da $\mathcal{T}^{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ definitionsgemäß die feinste lokalkonvexe Topologie ist, die auf den lokalen Nullfolgen mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt, folgt dieser Teil der Behauptung.

$\mathcal{T}^{\mathcal{M}\mathcal{P}} \leqslant \mathcal{T}^\times$: Da eine $\mathcal{T}^{\mathcal{M}\mathcal{P}}$-Nullumgebung V mit den lokalen Nullfolgen auch alle beschränkten Mengen absorbiert, ist V eine $\mathcal{T}^\times$-Nullumgebung.

Nach dem Satz von Grothendieck über die Vervollständigung von Dualräumen ist der Dualraum von $E[\mathcal{T}^{\mathcal{M}}]$ $\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}^{\mathcal{M}}(E)}]$, wobei $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(E)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den M_α, $\alpha \in I$, ist. Mackey-Räume mit vollständigem Dualraum $E'[\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(E)]$ sind deshalb $\mathcal{M}$-lokaltopologisch. Damit ist das Analogon zu dem Satz von Köthe im Falle der $\mathcal{M}$-lokaltopologischen Räume bewiesen, Bevor $\mathcal{M}$-lokaltopologische Räume über Räume linearer Abbildungen charakterisiert werden, sollen sie im Falle $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ sei das System der präkompakten Teilmengen von $E[\mathcal{T}]$) dual so charakterisiert werden, daß auf die Bedingung der Mackey-Topologie verzichtet werden kann.

Hierzu benötigt man ein Lemma

(4) a) *Auf den M_α fallen $\mathcal{T}_S(\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}])$ und $\mathcal{T}_S(E')$ zusammen.*

b) *Gilt zusätzlich $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$, so fallen $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^\mathcal{M}$, $\mathcal{T}_S(E')$ und $\mathcal{T}_S(\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}])$ auf den M_α zusammen.*

Beweis: a) Seien M_α und eine endliche Teilmenge $T \subset \widetilde{E}'$ beliebig vorgegeben. Es genügt zu zeigen, daß es eine $\mathcal{T}_S(E')$-Nullumgebung U gibt mit $U \cap M_\alpha \subset (\Gamma T)^\circ$. Da E' in $\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}]$ dicht ist, gibt es eine endliche Menge $S \subset E'$ mit $T \subset S + \frac{1}{2} M_\alpha^\bullet$ ($M_\alpha^\bullet$ sei die in $\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}]$ gebildete Polare von M_α). Daraus folgt $(\Gamma T)^\circ \supset \frac{1}{2}(\Gamma S)^\circ \cap$ $\cap M_\alpha$. Als U ist also $\frac{1}{2}(\Gamma S)^\circ$ geeignet.

b) Da die M_α nach Voraussetzung $\mathcal{T}$-präkompakt sind, fallen auf ihnen nach Köthe [2], § 28.5.(2) $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_S(E')$ zusammen. Definitionsgemäß fallen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}^\mathcal{M}$ auf den M_α zusammen. Mit a) folgt nun die Behauptung.

Nun die duale Charakterisierung:

(5) *Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$.*

$\mathcal{T}^\mathcal{M}$ ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Mengen von $\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}]$.

Beweis: Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Mengen von $\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}]$ werde mit $\mathcal{T}_1$ bezeichnet.

Es gilt $\mathcal{T}^\mathcal{M} \leqslant \mathcal{T}_1$: Sei V eine $\mathcal{T}^\mathcal{M}$-abgeschlossene $\mathcal{T}^\mathcal{M}$-Nullumgebung. Nach (4) b) induziert V auf den M_α $\mathcal{T}_S(\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}])$-Nullumgebungen, d.h. zu M_α gibt es eine endliche Menge $S_\alpha \subset \widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}]$ mit $(\Gamma S_\alpha)^\circ \cap M_\alpha \subset V$. Polarenbildung in $\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}]$ ergibt: $V^\bullet \subset$ $\subset \Gamma S_\alpha + M_\alpha^\bullet$. Deshalb ist $V^\bullet$ präkompakt in $\widetilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)}]$ und, da $\widetilde{E}'(\widetilde{\mathcal{T}_\mathcal{M}(E)})$ der Dualraum von $E[\mathcal{T}_\mathcal{M}]$ ist, auch kompakt. V ist deshalb auch eine $\mathcal{T}_1$-Nullumgebung.

Es gilt $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}^{\mathcal{M}}$: Sei H absolutkonvex und kompakt in $\tilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(E)}]$. Dann ist H präkompakt, H° induziert deshalb auf den M_α $\mathcal{T}_S(\tilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(E)}])$-Nullumgebungen und wegen (4) b) ist H° eine $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$-Nullumgebung. Damit folgt die Behauptung insgesamt.

Unter der Voraussetzung $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ ist ein Raum $E[\mathcal{T}]$ demnach genau dann $\mathcal{M}$-lokaltopologisch, wenn $E'[\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(E)]$ vollständig ist und jede in $E'[\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(E)]$ kompakte Menge $\mathcal{T}$-gleichstetig ist. Im Falle der bornologischen Räume ist dies gerade der Satz von Köthe, da eine absolutkonvexe schwach kompakte Teilmenge von E' in $E'[\mathcal{T}_{\mathcal{MP}}(E)]$ ($\mathcal{MP}$ bedeutet wieder das System der abgeschlossenen absolutkonvexen Hüllen der lokalen Nullfolgen von $E[\mathcal{T}]$) kompakt ist, denn schon jede beschränkte Teilmenge von $E'[\mathcal{T}_{\mathcal{MP}}(E)]$ ist dort präkompakt.

Der Beweis des folgenden Hauptergebnisses benutzt eine Idee, die auch schon bei Pfister [1] und Wilansky [1] eine wichtige Rolle spielt. Unter $L_{\mathcal{M}}\,(E[\mathcal{T}], F)$ werde dabei der Raum der linearen stetigen Abbildungen von $E[\mathcal{T}]$ in F, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen $M_\alpha \in \mathcal{M}$, verstanden.

(6) *$E[\mathcal{T}]$ ist $\mathcal{M}$-lokaltopologisch genau dann, wenn für jeden beliebigen Banachraum F $L_{\mathcal{M}}\,(E[\mathcal{T}], F)$ vollständig ist.*

Beweis: Sei die Bedingung erfüllt.

$V := \overline{\Gamma_{\alpha\in I} M_\alpha \cap U_\alpha}^{\mathcal{T}^{\mathcal{M}}}$ sei eine beliebige $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$-Nullumgebung. $V^\bullet$ sei wieder die in $\tilde{E}'[\widetilde{\mathcal{T}^{\mathcal{M}}(E)}]$ gebildete Polare, $F := B\,(V^\bullet)$ der mit der sup-Norm versehene Banachraum der beschränkten **K**-wertigen Funktionen auf $V^\bullet$. $T: E[\mathcal{T}] \to F$ sei definiert durch $T(x)\,(f) := f(x)$ für $x \in E$, $f \in V^\bullet$. Wegen $V^\bullet \subset U_\alpha^\circ + M_\alpha^\bullet$, $\alpha \in I$, läßt sich jedes $f \in V^\bullet$ darstellen als $f = f_\alpha + (f - f_\alpha)$, $f_\alpha \in U_\alpha^\circ$ und $f - f_\alpha \in M_\alpha^\bullet$. $T_\alpha : E[\mathcal{T}] \to$ $\to F$ sei definiert durch $T_\alpha(x)\,(f) := f_\alpha(x)$. T_α ist $\mathcal{T}$-stetig, da $||T_\alpha(U_\alpha)||_F \leqslant 1$, und T_α konvergiert gleichmäßig auf den M_α gegen T wegen $|(T - T_\alpha)\,(x)\,(f)| = |\langle x, f - f_\alpha\rangle| \leqslant 1$ für $x \in M_\alpha$ und $f \in V^\bullet$. Nach Voraussetzung ist T stetig, V also eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung.

Sei nun umgekehrt $E[\mathcal{T}]$ $\mathcal{M}$-lokaltopologisch. F sei ein beliebiger Banachraum, und A_β, $\beta \in J$ (J Indexmenge), sei ein Cauchysystem stetiger linearer Abbildungen in $L_{\mathcal{M}}\,(E[\mathcal{T}], F)$. A_β konvergiert gleichmäßig auf den M_α gegen eine lineare Abbildung A, die – wie man leicht zeigt – $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$-stetig ist, nach Voraussetzung also stetig für die Topogie $\mathcal{T}$.

Es gilt insbesondere das folgende Korollar:

(7) *$E(\mathcal{T}]$ ist genau dann bornologisch, wenn $L_{\mathcal{M}\mathcal{P}}(E[\mathcal{T}], F)$ für jeden beliebigen Banachraum F vollständig ist.*

Ohne Beweis sei angemerkt, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, den Quotientenraumhomomorphismus K aus dem Beweis von (2) gleichmäßig auf den M_α durch $\mathcal{T}$-stetige Abbildungen zu approximieren. Die Approximierbarkeit von K stände im Widerspruch dazu, daß es Räume ohne Approximationseigenschaft gibt.

$\mathcal{M}$-lokaltopologische Räume sind für bestimmte Wahlen von $\mathcal{M}$ in der Literatur schon untersucht worden. Als Beispiele seien genannt:

$\mathcal{M} = C_\alpha$ (die absolutkonvexen kompakten Mengen von $E[\mathcal{T}]$)
$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{C_\alpha}$: $E[\mathcal{T}]$ ist ein *Kelley-Raum*
(Buchwalter [1]).

$\mathcal{M} = \mathcal{P}$ (die präkompakten Mengen von $E[\mathcal{T}]$)
$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mathcal{P}}$: $E[\mathcal{T}]$ ist ein *p-Raum*
(Dazord, Jourlin [1]).

$\mathcal{M} = \mathcal{B}$ (die beschränkten Mengen von $E[\mathcal{T}]$)
$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mathcal{B}}$: $E[\mathcal{T}]$ ist ***lokaltopologisch***, bzw. ein b-Raum
(Adasch [1], Adasch, Ernst [1], Noureddine [1]

LITERATURVERZEICHNIG

[1] ADASCH, N. *Über lokaltopotogische Vektorräume*. Proc. Symposium Funct. Analysis, Instabul (Silivri), 1973.

[1] ADASCH, N. und ERNST, B. *Lokaltopologische Vektorräume I*. Collectanea Math. XXV (1974), pp. 255-274.

[1] BUCHWALTER, H. *Topologies et compactologies*. Publ. du Dépt. de Math. Lyon, 6-2 (1969).

[1] DAZORD, J. und JOURLIN, M. *Sur quelques classes d'espaces localement convexes*. Publ. du Dépt. de Math. Lyon, 8-2 (1971), pp. 39-69.

[1] GARLING, D. J. H. *A generalized form of inductive - limit topology for vectorspaces*. Proc. London Math. Soc., 14 (1964), pp. 1-18.

[1] KÖTHE, G. *Une caractérisation des espaces bornologiques*. Centre Belge de recherches mathématiques (1961), pp. 39-45.

[2] KÖTHE, G. *Topologische lineare Räume I*. Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[1] NOUREDDINE, K. *Nouvelles classes d'espaces localement convexes*. Publ. de Dépt. de Math. Lyon, 10-3 (1973), pp. 105-123.

[1] PFISTER, H. *A new characterisation of barrelled spaces*. Proc. Amer. Soc. 65 (1977), pp. 103-104.

[1] WILANSKY, A. *On a characterisation of barrelled spaces*. Proc. Amer. Soc. 57 (1976), p. 375.

Dr. Roland Behrens

Fachbereich Mathematik
der J. W. Goethe Universität
Robert-Mayer-Str. 10
D-6000 Frankfurt
Bundesrepublik Deutschland