UN PRINCIPIO DI INVARIANZA PER CATENE MARKOVIANE DI ELEMENTI ALEATORI (*)

di

RODOLFO DE DOMINICIS (**)

INTRODUZIONE

Nel 1951 Donsker [3] enunciò un teorema del limite centrale funzionale per successioni di variabili aleatorie (v.a.) che egli stesso chiamò «principio di invarianza».

Da allora molti autori hanno scritto sullo stesso argomento e significativi sono i lavori di Billingsley [2], [4] Garling [5], Kuelbs [6], Hoffmann-Jørgensen [7].

In particolare in [6] e [7] sono dimostrati teoremi del limite centrale funzionale per successioni di elementi aleatori (v.a. in spazi lineari topologici).

Nella presente nota si dimostra un principio di invarianza per una vasta famiglia di catene markoviane (CM), introdotta e studiata dallo stesso autore in [1]; tali CM godono della proprietà di non essere «φ-mixing» nel senso di Billingsley [2] e sono tali che le v.a. della catena sono a valori in $D[0, 1]$.

1) PRELIMINARI

Sia Q un nucleo markoviano sullo spazio misurabile (K, Γ). Consideriamo lo spazio Ω, munito della σ-algebra prodotto $\mathcal{J}$ e su di esso il processo canonico $(\xi_n)_{n \geq 0}$.

Per ogni misura di probabilità μ su (K, Γ), indichiamo con P_μ l'unica legge su $(\Omega, \mathcal{J})$ rispetto alla quale $(\xi_n)_{n \geq 0}$ sia una CM ammettente Q come nucleo di transizione e μ come legge iniziale.

(*) Lavoro effettuato nell'ambito del G.N.I.M. del C.N.R.

(**) Istituto di Matematica - Facoltà di Economia dell'Università, Via Partenope 36, 80121 Napoli - Italia

Sia ora H una sottoalgebra dell'algebra B di tutte le funzioni limitate e misurabili su (K, Γ); supponiamo che H sia munita di norma che ne faccia un'algebra normata; denoteremo questa norma con $\|\cdot\|$ per distinguerla dalla norma uniforme che indicheremo con $|\cdot|$.

Per il seguito supporremo che

(A) H sia stabile rispetto all'operatore $T: B \to B$;

$$Tf = \int_K f(x)\, Q(\cdot, dx) \tag{1}$$

(B) $\|T^n f\| \leqslant K_f,\ \forall f \in H$ e $n \geqslant 0$ (2)

dove $T^n f = \int_K f(x)\, Q^n(\cdot, dx)$ e K_f è un parametro positivo che dipende da f.

(C) esistano una legge di probabilità Q^∞ su (K, Γ) ed una successione $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ di numeri reali positivi, soddisfacente alla condizione

$$\exists\, \alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2+\alpha}\, \varepsilon_n < +\infty \tag{3}$$

tali che

$$|T^n f - T^\infty f| \leqslant \varepsilon_n\, \|f\| \tag{4}$$

essendo

$$T^\infty f = \int_K f(x)\, Q^\infty(dx).$$

Sia poi, per ogni $f \in H$, $f_n = f \circ \xi_n$, $n \geqslant 0$.

Se indichiamo con P_∞ la probabilità su $(\Omega, \mathcal{J})$ corrispondente alla distribuzione iniziale Q^∞ ed al nucleo $Q(.,.)$ sia $\mathbf{E}_\infty$ l'operatore di speranza matematica calcolato rispetto alla probabilità P_∞.

Poniamo inoltre per definizione:

$$\sigma^2 = \mathbf{E}_\infty(f_1^2) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{i+1}) \tag{5}$$

avendo supposto, per semplicità, ma senza perdita di generalità, che

$$\mathbf{E}_\infty(f_1) = \int f_1\, dP_\infty = 0 \tag{5'}$$

Poniamo ora $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ $(n \geqslant 0)$, $S_0 = 0$ e definiamo un elemento aleatorio di $D(0, 1]$, come segue:

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \omega \in \Omega \tag{6}$$

dove σ è la costante definita dalla (5) e dove con $D(0, 1]$ si è indicato (come di consueto, cfr. Billingsley [2]) lo spazio delle funzioni x su $[0, 1]$ che sono continue dalla destra ed hanno limiti sinistri tali che

(i) per $0 \leqslant t < 1$, $x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s)$ esiste e $x(t+) = x(t)$.
(ii) per $0 < t \leqslant 1$, $x(t-) = \lim_{0 \uparrow t} x(s)$ esiste.

Nella sezione seguente dimostreremo preliminarmente un teorema del limite centrale per la CM $(\xi_n)_{n \geq 0}$, per tale dimostrazione ci serviremo di opportune stime dell'errore introdotte da Sapogov in [8].

Successivamente nella sezione 3) proveremo il risultato principale del lavoro e cioè un teorema del limite centrale funzionale (principio di invarianza) per la catena di elementi aleatori (X_n), prima descritta.

2) Un teorema del limite centrale per CM non φ-mixing

In questo numero faremo vedere che, assegnata una funzione $f \in B$, se $|T_G^n - T_G^\infty| \leqslant \varepsilon_n$, $\forall\, g \in \{f, f\, T^n f\}$, dove $T^0 f = f$ e $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ soddisfa la condizione (3), vale il teorema del limite centrale per la successione $(f_n)_{n \geq 0} = (f \circ \xi_n)_{n \geq 0}$ se $\sigma^2 \neq 0$. In particolare dimostreremo il seguente.

Teorema 1: Nell'ipotesi che siano verificate le (1), (2), (3), (4) : — *i*) la serie in (5) è assolutamente convergente e si verifica che $\sigma^2 \geqslant 0$. — ii) se in più $\sigma^2 \neq 0$, allora $\exists\, C > 0$ e $\nu > 0$:

$$\left| P_\mu \left(\sum_{K=1}^{n} f_K / \sigma \sqrt{n} < a \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-z^2/2}\, dZ \right| \leqslant C n^{-\nu} \tag{7}$$

$\forall\, a \in \mathbf{R}$ e per ogni distribuzione iniziale μ.

Per la dimostrazione della parte i) del teorema 1 ci serviremo del seguente.

Lemma 1: Se sono verificate le (1), (3), (4), allora

$$T^{\infty}\, T^k f = T^{\infty} f \tag{8}$$

$\forall\, f \in H$ e $k \geqslant 0$.

Dimostrazione: Dalla (3) si ha : $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Dalle (1) e (4) viene che:

$$|T^{\infty} f - T^{\infty}\, T^k f| \leqslant |T^{\infty} f - T^{n+k} f| + |T^n (T^k f) - T^{\infty} (T^k f)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_{n+k} \cdot ||f|| + \varepsilon_n\; ||T^k f||, \;\; \forall\, n \geqslant 0$$

Passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene la (8).

Notiamo ora esplicitamente che la (4) con la (5′) si semplifica nella

$$|T^n f| \leqslant \varepsilon_n \cdot ||f|| \tag{4'}$$

Siano poi $S_\delta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\delta\, \varepsilon_n$ e $R_{\delta,\, m} = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n^\delta\, \varepsilon_n$,

dalla (3) risulta che

$$S_\delta < +\infty, \; \lim_{m \to \infty} R_{\delta,\, m} = 0 \;\; \forall\, \delta \in [0, 2 + \alpha] \tag{9}$$

Siamo ora in grado di dimostrare la parte (i) del teorema 1:
Dim. parte i) del teor. 1:
A norma del lemma 1 si ha:

$$\mathbf{E}_{\infty}(f_i f_j) = T^{\infty}\, T^i (f\, T^{j-i+1} f) = \mathbf{E}_{\infty}(f_1 f_{j-i+1}), \;\; \forall\, i, j \geqslant 0 : i < j.$$

D'ora in avanti per semplicità supporremo che la misura μ sia concentrata in $x \in K$ ed indicheremo con $\mathbf{E}_x$ la speranza matematica calcolata rispetto alla probabilità P_x.

Avremo:

$$|\mathbf{E}_x(f_i f_j) - \mathbf{E}_{\infty}(f_i f_j)| = \left| \int_K f(x')\, Q^i\,(x, dx') \int_K f(x'') \cdot Q^{j-i}\,(x, dx'') - \right.$$
$$\left. - \int_K f(x')\, Q^{\infty}\,(dx') \int_K f(x'')\, Q^{j-i}\,(x, dx'') \right| =$$
$$= \left| \int_K \left[f(x) \int_K f(x'')\, Q^{j-i}\,(x', dx'') \right] \left[Q^i(x, dx') - Q^{\infty}\,(dx') \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,|f|\,\sup_{x'\in K}\left|\int f(x'')\,Q^{j-i}\,(x',dx'')\right| \leqslant 2\,|f|\cdot\|f\|\cdot\varepsilon_{j-i} \tag{10}$$

(l'ultima disuguaglianza è conseguenza della (4')).

D'altra parte per $i < j$, si ha:

$$\left|\mathbf{E}_x\,(f_i f_j)\right| = \left|\mathbf{E}_x f_i\cdot\mathbf{E}_x\left[f_j\,|\,\xi_i\right]\right| \leqslant |f|\cdot\sup_{x'\in K}\left|\int_K f(x'')\cdot Q^{j-i}\,(x',dx'')\right| \leqslant$$
$$\leqslant |f|\cdot\|f\|\cdot\varepsilon_{j-i} \tag{11}$$

Inoltre vale la seguente:

$$\left|\mathbf{E}_\infty(f_1 f_{h+1})\right| \leqslant \left|\int_K f(x')\left[\int_K f(x'')\,Q^h\,(x',dx'')\right]Q^\infty\,(dx')\right| \leqslant$$
$$\leqslant |f|\cdot\|f\|\cdot\varepsilon_h \tag{12}$$

Dal fatto che $S_\delta < \infty$, per $\delta = 0$, viene che la serie (5') è assolutamente convergente.

Non è difficile ora verificare che $\sigma^2 \geqslant 0$, infatti

$$\mathbf{E}_\infty(f_k)^2 = T^\infty\,T^k f^2 = T^\infty f^2 = \mathbf{E}^\infty\,(f_1^2)$$

e

$$\mathbf{E}_\infty(f_i f_j) = T^\infty\,T^i(f\,T^{j-1+i}\,f) = T^\infty(f\,T^{j-1+i}f) = \mathbf{E}_\infty(f_1\,f_{j-i+1}).$$

Per cui

$$\mathbf{E}_\infty\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\right)^2 = n\cdot\mathbf{E}_\infty\,(f_1^2) + 2\sum_{h=1}^{n-1}(n-h)\cdot\mathbf{E}_\infty(f_1 f_{h+1}) =$$
$$= n\cdot(\sigma^2 - 2\sum_{h\geq n}\mathbf{E}_\infty(f_1 f_{g+1})) - 2\sum_{h=1}^{n-1}\frac{h\cdot\mathbf{E}_\infty(f_1 f_{h+1})}{n} =$$
$$= n\,(\sigma^2 + w_n)\,,$$

dove $|w_n| \leqslant 6\cdot|f|\cdot\|f\|\cdot R_{0,n} + (2/n)\cdot|f|\cdot\|f\|\cdot S_1 = o(1)$.

e quindi l'asserto.

Per la dimostrazione della parte (ii) del teorema 1 premettiamo i seguenti lemmi:

Lemma 2: Nell'ipotesi che valgano le (1), (2), (3), (4), (5'), si verifica che

$$|\mathbf{E}_x(f_j f_t) - \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{t-j+1})| \leqslant K_f \cdot ||f|| \cdot \varepsilon_j, \tag{13}$$

$\forall j, t \mid \in N^* : j < t.$

Dimostrazione: Per la (1) e dato che H è un'algebra, si ha:

$$|\mathbf{E}_x(f_j f_t) - \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{t-j+1})| = \Bigg| \int_K f(x')\, Q^j(x, dx') \cdot$$

$$\cdot \int_K f(x'')\, Q^{t-j+1}(x', dx'') - \int_K f(x')\, Q\,(dx') \int_K f(x'')\, Q^{t-j+1}(x', dx'') \Bigg| =$$

$$= \left| \int_K \hat{f}(x')\, Q^j(x, dx') - \int_K \hat{f}(x')\, Q^\infty(dx') \right| \leqslant ||\hat{f}|| \cdot \varepsilon_j,$$

dove $\hat{f}(x') = f(x') \int_K f(x'\cdot)\, Q^{t-j}(x', dx'') \in H$

Dalla (2) deriva poi che

$$||\hat{f}|| \leqslant ||f|| \cdot ||T^{t-j} f|| \leqslant k_f \cdot ||f||.$$

Di qui risulta immediatamente la (13).
Lemma 3: Se sono verificate le (1), (2), (3), (4), (5′), si ha;

$$\left| \frac{1}{n} \cdot D_x^2(F_{m.n}) - \sigma^2 \right| \leqslant r_n \tag{14}$$

dove $F_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{m+n} f_i$; $F_n = F_{0,n}$; $r_n = 0(1)$.

Dimostrazione: Sarà sufficiente dimostrare la disuguaglianza (14) nel caso $m = 0$, essendo analogo il caso $m > 0$.

Dal fatto che

$$\frac{1}{n} \cdot |\, \mathbf{E}_x(F_n)|^2 \leqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{E}_x(f_i)|^2 \right) \leqslant \frac{1}{n} ||f|| \cdot S_0^2 \tag{15}$$

sarà suffiente verificare che

$$\left| \frac{1}{n} \mathbf{E}_x(F_n^2) - \sigma^2 \right| \leqslant s_n, \text{dove } s_n = 0(1). \tag{16}$$

Possiamo scrivere:

$$|\mathbf{E}_x(F_n^2) - n\sigma^2| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} [\mathbf{E}_x(f_j^2) - \mathbf{E}_\infty(f_1^2)] + \right.$$

$$\left. + 2 \left| \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_x \left(f_j \cdot \sum_{t=j+1}^{n} f_t \right) - n \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1}) \right| \leqslant \right.$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \mathbf{E}_x(f_j^2) - \mathbf{E}_\infty(f_1^2) \right| + 2 \left| \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_x \left(f_j \cdot \sum_{t \geq j+1} f_t \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_x \left(f_j \cdot \sum_{t=j+1}^{n} f_t \right) \right| + 2 \left| \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_x \left(f_j \cdot \sum_{t \geq j+1} f_t \right) - \right.$$

$$\left. - (n-1) \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1}) \right| + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \left| \mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1}) \right| .$$

D'altra parte dalla (4) viene che

$$\sum_{j=1}^{n} | \mathbf{E}_x(f_j^2) - \mathbf{E}_\infty(f_1^2) | \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|f^2\| \cdot \varepsilon_j \leqslant \|f\|^2 \cdot S_0 . \tag{17}$$

Inoltre dalla (12) si ottiene

$$\sum_{h=1}^{\infty} |\mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1})| \leqslant \cdot |f| \cdot \|f\| \cdot S_0$$

e dalla (11) si ottiene

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_x \left(f_j \cdot \sum_{t \geq j+1} f_t \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_x \left(f_j \cdot \sum_{t=j+1}^{n} f_t \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{t \geq n+1} |\mathbf{E}_x \cdot (f_j f_t)| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{t \geq n+1} |f| \cdot \|f\| \cdot \varepsilon_{t-j} \leqslant$$

$$|f| \cdot \|f\| \cdot S_1 \tag{19}$$

Infine in base alle (10) e (13) si ottiene che

$$\left| \mathbf{E}_x \left(f_j \sum_{t \geq j+1} f_t \right) - \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1}) \right| \leqslant \left| \sum_{t=j+1}^{j+q} \mathbf{E}_x (f_j f_t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{h=1}^{q} \mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1}) \right| + \left| \sum_{t > j+q+1} \mathbf{E}_x (f_j f_t) - \sum_{h > q+1} \mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=j+1}^{j+q} K_f \cdot \|f\| \cdot \varepsilon_j + 2 \cdot |f| \cdot \|f\| \cdot \sum_{l=1} \varepsilon_q + l \leqslant K_f \cdot \|f\| \cdot q \cdot \varepsilon_j + + 2\,|f| \cdot \|f\| \cdot R_{0,q+1} \leqslant K_f^1 (q \cdot \varepsilon_j + R_{0,q+1}),\ \forall\, q \geqslant 0,$$

dove $K_f^1 = \|f\| \cdot \max\ (K_f,\ 2\,|f|,\ 1)$.

Da cui

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_x \left(f_j \cdot \sum_{t \geq j+1} f_t \right) - (n-1) \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{E}_\infty (f_1 f_{h+1}) \right| \leqslant \leqslant K_f^1\, [q\, S_0 + (n-1)\, R_{0,q+1}] \tag{20}$$

Introducendo le stime (17), (18), (19), (20) nella (16), si ha:

$$|\mathbf{E}_x(F_n^2) - n\,\sigma^2| \leqslant \|f\|^2 \cdot S_0 + \partial\,|f| \cdot \|f\|\, S_0 + 2\,|f| \cdot \|f\| \cdot S_1 + + 2\,K_f^1\, [q\,S_0 + (n-1)\, R_{0,q+1}] \leqslant K_f^1\, [(2q+3)\, S_0 + + S_1 + 2\,(n-1)\, R_{0,p+1} + \|f\|\, S_0],\ \forall\ q \geqslant 0.$$

Posto $q = [n^{1/2}]$, si ottiene l'asserto.

Lemma 4: (Sapogov [8]) Sia $(\varrho_n,\, n \geqslant 0)$ una successione di v.a. dotate di $\mathbf{E}|\varrho_n|^3$.

Se poniamo $B_n = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \varrho_i\right)^2$; $\alpha =$ ess sup $|\mathbf{E}(\varrho|\varrho_{-1},\, ..\, \varrho_1) - \mathbf{E}(\varrho)|$ $\beta_i =$ ess sup $|\mathbf{E}(\varrho_i^2|\varrho_{i-1},\, ..\, \varrho_1) - \mathbf{E}(\varrho_i^2)|$; $\gamma_i = \mathbf{E}(|\varrho_i|)^3 < +\infty$ e se supponiamo che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i/B_n^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i/B_n + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i/B_n^{3/2} = \dfrac{1}{U_n}$ (21)

allora esiste una costante positiva C_1, tale che

$$\left| Px\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \varrho_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\varrho_i)}{B_n^{1/2}} \leqslant a \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-z\,2/2}\, dz \right| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt[8]{U_n}} \tag{22}$$

$\forall\ a \in \mathbf{R}$

Dimostrazione: Segue non difficilmente, considerando le funzioni caratteristiche della v.a. $y_n = \beta_n/\sqrt{B^*_n}$, dove $B^*_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\varrho_i^2)$ è praticamente coincidente con B_n per $U_n \to \infty$. (cfr. Bernstein [11] § 9).

Dimostrazione parte (ii) *del teorema* 1:

Per il seguito faremo le seguenti posizioni: $\forall\, n \geqslant 0$

$$\varrho_i = \sum_{j=1}^{n_1} f_{(i-1)(n_1+n_2)+j} \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant l_n$$

$$g_i = \sum_{j=1}^{n_2} f_{in_1} + (i-1)_{n_2+j} \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant l_n - 1$$

$$g_{l_n} = f_{(l_n-1)n_1+n_2+1} + \dots + f_n$$

$$F_n' = \sum_{i=1}^{l_n} \varrho_i \quad , \quad F_n'' = \sum_{i=1}^{l_n} g_i$$

dove $n_1 = [n^\beta]$, $n_2 = [n^\gamma]$, $l_n = \left[\dfrac{n}{n_1 + n_2}\right]$

$$\gamma = \frac{1}{2+\alpha} \quad , \quad \beta \in \left(\frac{1}{2+\alpha}, \frac{1}{2}\right)$$

si ha $l_n > n_1 > n_2$, $\qquad F_n = F_n' + F_n''$.

Vogliamo verificare che la successione $(\varrho_n)_{n \geq 0}$ soddisfa le ipotesi del lemma 4. Poniamo $B'_n = \sum_{i=1}^{l_n} \mathbf{E}_x(\varrho_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} \mathbf{E}_x\left(\varrho_i \sum_{j=i+1}^{l_n} \varrho_i\right)$. Per la condizione di markovianità, considerazioni simili a quelle che conducono alla (11), consentono di affermare che

$$|\mathbf{E}_x(\varrho_i\, \varrho_j)| \leqslant n_1\, |f| \cdot ||f|| + \sum_{t=1}^{n_1} \varepsilon_{(i-1)(n_1+n_2)+t-in_1-(i-1)n_2} \cdot$$

Risulta allora che

$$\left|\sum_{i=1}^{l_n-1} \mathbf{E}_x\left(\varrho_i \cdot \sum_{j=i+1}^{l_n} \varrho_j\right)\right| \leqslant {}_n \cdot n_1\, |f| \cdot ||f|| \cdot R_{0,n2+1} \to 0$$

dato che $l_n \cdot n_1\, R_1, n_2 = \dfrac{n_2{}^{2+\alpha}}{l_n \cdot n_1} \cdot n_2{}^{2+\alpha} \cdot R_0,\, n_2,\;\; n_2{}^{2+\alpha} \cdot R_0,\, n_2 \leqslant$

$\leqslant R_{2+\alpha, n_2} \to 0, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{l_n \cdot n_1}{n_2{}^{2+\alpha}} = 1.$

E' evidente a·lora che, per $n \to \infty$,

$$B_n' = \sum_{i=1}^{l_n} n_1\, (\sigma^2 + s'\, n_1) \tag{23}$$

conformemente al lemma 3.

D'altra parte

$$\alpha_i = \text{ess sup } |\mathbf{E}x[\mathbf{E}x(\varrho_i - \mathbf{E}x(\varrho_i) \mid \xi_1, .., \xi_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) \mid \varrho_1, .. \varrho_{i-1}].$$

Ma

$$|\mathbf{E}_x(\varrho_i - \mathbf{E}_x(\varrho_i) \mid \xi_{(i-1)n_1+(i-2)n_2})\Big| \leqslant \sum_{j=(i-1)(n_1+n_2)+1}^{in_1+(i-1)n_2} \Big|\mathbf{E}_x(f_j \mid \xi_{(i-1)+(i-2)n_2}) - \mathbf{E}_x(f_j$$

e $\quad |\mathbf{E}_x(f_j \mid \xi_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) - \mathbf{E}_x(f) \leqslant ||f|| \cdot (\varepsilon_{j-(i-1)n_1-(i-2)n_2} + \varepsilon_j).$

Quindi, essendo $\sum_{i=1}^{ln} \alpha_i \leqslant l_n \cdot ||f|| \cdot R_{0,n_1+2}$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{ln} \alpha_i \leqslant ||f|| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{ln}{n_2^{2+\alpha}} R_{2+n_2,+1} = 0 \tag{24}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\beta_i = \text{ess sup } |\mathbf{E}_x[\mathbf{E}_x(\varrho_i^2 - \mathbf{E}_x(\varrho_i^2) \mid \xi_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}, \dots, \xi_1) \mid \varrho_{i-1}, \dots, \varrho_1] \leqslant \\ \leqslant |\mathbf{E}_x(\varrho_i^2 - \mathbf{E}_y(\varrho_i^2) \mid \xi_{(i-1)n_1+(n_2)(i-2)})| \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=(i-1)(n_1+n_2)+1}^{in_1+(i-1)n_2} |\mathbf{E}_x(f_j^2 \mid \xi_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) - \\ - \mathbf{E}_x(f_j^2) + 2 \sum_{k=(i-1)(n_1+n_2)+1}^{in_1+(i-1)n_2-1} \sum_{e=k+1}^{in_1+(i-1)} |\mathbf{E}_x(f_k f_e) \mid \xi_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) - \\ - \mathbf{E}_x(f_k f_e)|;\end{aligned}$$

da cui banalmente viene che

$$\beta_i \leqslant ||f||^2 \cdot R_{0,n_2+1} + k_f \cdot ||f|| \cdot n_1 \cdot R_{0,n_2+1}.$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{ln} \beta_i}{B_n'} = 0 \tag{25}$$

se si pensa che valgono la (23) e le seguenti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{ln} n_1(\sigma_2 + s'_{n_1})}{n} = \sigma^2 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{l_n \cdot n_1 \cdot R_{0,n_2+1}}{n} = 0$$

Infine

$\gamma_i = \mathbf{E}_x(|\varrho_i|^3) \leqslant n_1 \cdot |f| \cdot \mathbf{E}_x(\varrho_i^2)$ e quindi

$$\exists\, n_1, n_2 \colon \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{l_n} \gamma_i}{(B_n'^{3/2})} = 0 \tag{26}$$

Dalle (24), (25), (26) si evince che

$$\exists\, \nu_1 > 0 \colon \frac{\sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i}{(B_n')^{1/2}} + \frac{\sum_{i=1}^{l_n} \beta_i}{B_n'} + \frac{\sum_{i=1}^{l_n} \gamma_i}{(B_n')^{3/2}} \leqslant \frac{n^{\nu_1}}{1}$$

e quindi, sulla base del lemma 4, si ha:

$$\left| P_x\left(\frac{F_n' - \mathbf{E}_x(F_n')}{(\beta' n)^{1/2}} \leqslant a\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-z^2/2}\, dz \right| \leqslant C_1\, n^{-\nu_1/8}. \tag{27}$$

Se si pone $B_n'' = E_x\left(\sum_{i=1}^{l_n} g_i\right)^2$, si ha:

$$\frac{F_n - \mathbf{E}_x(F_n)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{F_n' - \mathbf{E}_x(F_n')}{\sqrt{\cdot B_n'}} \cdot \frac{\sqrt{B_n'}}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{F_n'' - \mathbf{E}_x(F_n'')}{\sqrt{B_n''}} \frac{\sqrt{B_n''}}{\sigma\sqrt{n}}\,.$$

Se osserviamo che

$$D_x^2\left(\frac{F'' - \mathbf{E}_x(F_n'')}{\sqrt{F_n'' - [\mathbf{E}_x(F_n'')]^2}} \cdot \sqrt{\frac{B_n'' \cdot [\mathbf{E}_x(F_n'')]^2}{B_n''}} \cdot \frac{\sqrt{B_n''}}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \frac{B_n'' - [\mathbf{E}_x(F_n'')]^2}{B_n''} \cdot \frac{B_n''}{n\,\sigma^2} \cdot \frac{B_n''}{\sigma\, n^2} \to 0$$

allora calcoli analoghi a quelli fatti per B_n' portano a concludere che

$$B_n'' = \sum_{i=1}^{l_n} n_2(\sigma^2 + s_{n_2}'') \quad , \quad \text{per } n \to \infty.$$

In base alla (27) deduciamo quindi che esiste $\nu_2 > 0$ tale che:

$$P_x\left(\left|\frac{F_n'' - \mathbf{E}_x(F_n'')}{\sigma\sqrt{n}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2\, n^{-\nu_2}} \tag{28}$$

Dalle (27) e (28) non è difficile far vedere che $\exists\, C > 0$ e $\nu > 0$

$$\left| P_x\left(\frac{F_n - \mathbf{E}_x(F_n)}{\sigma\sqrt{n}} < a\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-z^2/2}\, dz \right| \leqslant C n^{-\nu} \tag{29}$$

$\forall\, a \in \mathbf{R}$ e $x \in K$.

Dalla (29) e dal fatto che

$$\left|\frac{1}{n}\mathbf{E}_x(F_n)\right| \leqslant \frac{1}{n}\, \|f\|\, S_0$$

risulta completata la dimostrazione del teorema.

Come si può notare, per la dimostrazione del teorema 1 non è stata adoperata alcuna condizione di φ-mixing.

3) Dimostrazione del teorema principale

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente terema del limite centrale funzionale:

Teorema 2: Nelle ipotesi del teorema 1 e se $\sigma^2 > 0$, allora

$$X_n \xrightarrow{DP_x} W \quad , \quad n \to \infty \tag{30}$$

uniformemente rispetto ad $x \in K$, dove W è la misura di Wiener su $[0, 1]$ ed il simbolo $\xrightarrow{DP_x}$ indica la convergenza in distribuzione rispetto alla probabilità P_x.

Dimostrazione: Supponiamo che siano verificate le ipotesi del teorema 1 per $\gamma = 2$ e $\alpha = 1$, vogliamo verificare che:

(a) $(X_n(t_1), X_n(T_2), \ldots, X_n(t_k)) \xrightarrow{DP_x} (W(t_1), \ldots, W(t_k))$

$\forall\, k \geqslant 0$ e $t_1 < t_2 < \ldots < t_k \in [0, 1]$; $n \to \infty$,

uniformemente per $x \in K$.

(b) $\mathbf{E}_x\{|X_n(t) - X_n(t_1)|^2 \cdot |X_n(t_2) - X_n(t)|^2\} \leqslant 4K^2(t_2 - t_1)^2$,

$\forall\, t \in [t_1, t_2]$

dove K è una costante positiva.

Per quanto attiene alla parte (a) del teorema, la (30) è evidente per $k = 1$, a norma del teorema 1 e della definizione di mistura browniana.

Per $k = 2$ (il caso $k > 2$ è analogo al caso $k = 2$) occorre verificare che

$$(X_n(s),\ X_n(t)) \xrightarrow{DP_x} (W(s),\ W(t)) \tag{31}$$

per ogni $s < t \in [0, 1]$.

In base al corollario 1 pag. 31 di Billingsley [2], è sufficiente dimostrare che

$$(X_n(s),\ X_n(t) - X_n(s)) \xrightarrow{DP_x} (W(s),\ W(t) - W(s)). \tag{32}$$

Dal fatto che $W(s)$ e $W(t) - W(s)$ sono indipendenti e distribuite $N(0, s)$ e $N(0, t - s)$ rispettivamente, verificare la (32) equivale a verificare la seguente

$$\left| P_x\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\, S_{[ns]} \leqslant a\,;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\,(S_{[nt]} - S_{[ns]}) \leqslant b\right\} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_{-\infty}^{a} e^{-z^2/2s}\, dz\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{b} e^{-z^2/2(t-s)}\, dz\right)\right| \to 0 \tag{33}$$

per $n \to \infty$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.

Per la proprietà di Markov ed in base al teorema 1, si ha che il primo membro della (33) è maggiorato dalla quantità $2C\, n^{-\nu}$ che tende a zero per $n \to \infty$, $s < t \in [0, 1]$.

La parte (a) del teorema del teorema è dunque dimostrata, essendo la convergenza uniforme rispetto ad $x \in K$.

Dimostriamo ora la parte (b).

Per il lemma 3 si ha:

$$\mathbf{E}_x\{|X_n(t) - X_n(t_1)|^2 \cdot |X_n(t_2) - X_n(t)|^2\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^4 n^2}\, \mathbf{E}_x\{|S_{[nt]} - S_{[nt_1]}|^2 \cdot |S_{[nt_2]} - S_{[nt]}|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{([n\,t_2] - [n\,t])\,(\sigma^2 + s_{[nt_2]-[nt]})\,([n\,t] - [n\,t_1])\,(\sigma^2 + s_{[nt]-[nt_1]})}{\sigma^4 n^2} \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \frac{([n t_2] - [n t])([n t] - [n t_1])}{n^2} \leqslant \left\{ \frac{[n t_2] - [n t_1]}{n} K \right\}^2$$

dove $K_2 = \sup\limits_{n \geq 0} \dfrac{(\sigma^2 + s_{[nt_2]-[nt]})(\sigma^2 + s_{[nt]-[nt_1]})}{\sigma^4}$

Se $t_2 - t_1 \geqslant 1/n$, allora

$$\frac{[n t_2] - [n t_1]}{n} \leqslant t_2 - t_1 + \frac{1}{n} \leqslant 2(t_2 - t_1)$$

e di qui segue l'asserto.

Se $t_2 - t_1 < 1/n$, dalla (6) segue banalmente l'asserto.

Corollario al teorema 2: Nelle ipotesi del teorema 2 e per ogni distribuzione iniziale μ della catena $(\xi_n)_{n\geq 0}$, si ha

$$X_n \xrightarrow{DP_\mu} W$$

per $n \to \infty$.

Dimostrazione: Per il seguito indicheremo con $\mathcal{D}[0, 1]$ la σ-algebra di Borel per la topologia di Skorohod (cfr. Billingsley [2]). Sia $A \in \mathcal{D}[0, 1]$, tale che $W(\partial A) = 0$ dove con ∂A si è indicata la frontiera di A.

Allora

$$|P_\mu \circ X_n^{-1}(A) - W(A)| \leqslant \int_k |P_x \circ X_n^{-1}(A) - W(A)| \, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in K} |P_x \circ X_n^{-1}(A) - W(A)| \to 0$$

per $n \to \infty$, conformemente al teorema 2, e l'asserto.

CONSIDERAZIONE FINALE

L'uniformità rispetto ad $x \in K$ della validità del teorema 2 insieme coi teoremi 15.4 e 15.6 di [2] ci fanno concludere che:

- se si indica con $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ la proiezione naturale da D in $\mathbf{R}^k$, si verifica che $X_n \circ \pi_{t_1,\dots,t_k} \xrightarrow{DP_x} W \circ \pi_{t_1,\dots,t_k}$ uniformemente per $x \in K$, $k \geqslant 0$, $t_1 < t_2 < \dots < t_k \in [0, 1]$.
- $\exists\ n_0 \geqslant 0$ tale che la famiglia di probabilità $(P_x \circ X_n^{-1})_{n \geq n_0}$, $x \in K$ è «tight».

BIBLIOGRAFIA

[1] R. De Dominicis. *Some limit theorems for Markov chains not necessarily fulfilling Doeblin's condition*, in corso di stampa su Ricerche di Matematica, (1980).

[2] P. Billingsley. *Convergence of probability measure*, J. Wiley New York 1968.

[3] M. Donsker. *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem. Am. Math. Soc. 6, (1951).

[4] P. Billinsgley. *The invariance principle for dependent random variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 83, (1956), 250-268.

[5] D. J. H. Garling. *Functional central limit theorems in Banach spaces*, in Lect. Notes in Math. n. 526, (1976), 85-88.

[6] J. Kuelbs. *The invariance principle for Banach space valued random variables*, J. Mult. An. 3, (1973), 161-172.

[7] J. Hoffmann-Jørgensen. *Probability in Banach spaces*, in Lect. Notes in Math. n. 598, (1977), 2-176.

[8] N. A. Sapogov. *Legge del logaritmo iterato per somme di variabili aleatorie dipendenti*, L. G. U. Uceinye Zap. Mat. 19, (1950), 160-179. (in russo).

[9] M. Iosifescu, R. Theodorescu. *Random processes and learning*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[10] P. Billingsley. *Probability and measure*, J. Wiley, NY, 1979.

[11] S. N. Bernstein, *Theory of probability*, «Nauka», Moscow, 1946 (in russo).

Rodolfo De Dominicis