SOBRE LA DUALIDAD ENTRE EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET Y LA INTEGRAL DE GEODESICAS QUE CORTAN A UNA CURVA SOBRE UNA SUPERFICIE

por

E. VIDAL ABASCAL

0. Establecemos a continuación la integral de geodésicas como un invariante integral absoluto del conjunto de geodésicas que cortan a una curva, simplificando una demostración dada anteriormente [3]*. También señalamos la casi-dualidad existente entre el teorema de Gauss-Bonnet y la integral de geodésicas. Como ejemplo consideramos dos círculos de distancia en coordenadas polares geodésicas y dos métricas casi-duales, la fórmula relativa a la integral de geodésicas en una, expresa el teorema de Gauss-Bonnet en la otra métrica. En un trabajo anterior establecíamos esta casi-dualidad con coordenadas geodésicas paralelas a una curva C pero la validez de las coordenadas no permite extender los resultados a todo el interior de C.

La integral de geodésicas relaciona una medida lineal de puntos, la longitud, con la integral doble de geodésicas. El teorema de Gauss-Bonnet, relaciona la medida lineal de geodésicas tangentes, esto es $\int_C \varkappa_g \, ds$, con una integral doble de puntos. En la integral de geodésicas no aparece nada análogo a la curvatura K, porque los ángulos que forman las tangentes en cada punto de la superficie varían en todos de 0 a π, si este ángulo variase de un punto a otro, tendría que aparecer una función de punto $\bar{K}$ para medir las geodésicas. La dualidad será completa en un espacio de Finsler conveniente.

* Los números entre corchetes se refieren a la bibliografía dada al final.

1. *Invariante integral relativo del tubo de geodésicas tangentes a una curva dada.*

PROPOSICION 1.

Sea una curva cerrada C, de clase $\geqslant 3$ *sobre una superficie. Consideremos sobre ella coordenadas curvilíneas tal que C esté representada por* $v^1 = 0$, *sobre ella* v^2 *la longitud del arco, sean* $v^2 =$ *const. las geodésicas tangentes a C, siendo sobre ellas* v^1 *la longitud del arco.*

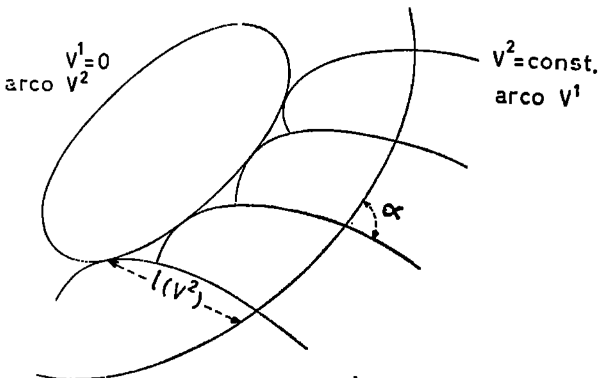

Fig. 1

Si tomamos sobre las geodésicas a partir de su punto de tangencia con C una distancia variable l (función de v^2*), se encuentra una curva E, verificándose*

$$\int_E \cos\alpha\, ds = U_C(v_0^2, v_1^2) + l\Big|_{v_0^2}^{v_1^2}$$

siendo α *el ángulo que forma E con las geodésicas* $v^2 =$ *const. y* $U_C(v_0^2, v_1^2)$ *la longitud de C entre los puntos que corresponden a* $v^2 = v_0^2$ *y* $v^2 = v_1^2$.

Demostración:

Por ser v^2 el arco sobre $v^1 = 0 \Rightarrow g_{22}(0, v^2) = 1$, $g_{11} = 1$, pues sobre $v^2 =$ const., v^1 es el arco.

Supongamos $v^2 = c$, geodésicas que hacen el ángulo $\beta(0, v^2)$ con C.

Considerando las ecuaciones diferenciales de las geodésicas:

$$\ddot{v}^r + \dot{v}^i \dot{v}^k \Gamma^r_{ik} = 0, \qquad (r = 1,2) \tag{2}$$

por ser $\dot{v}^2 = \ddot{v}^2 = 0$, de la segunda, se deduce:

$$\Gamma^2_{11} = 0$$

Es decir: $\Gamma^2_{11} = g^{21}|11, 1| + g^{22}|11, 2|$

$$-\frac{1}{2} g_{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial v^1} + g_{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v^2} \right) = 0, \text{ pero } g_{11} = 1,$$

por tanto

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0,$$

es decir: g_{12} sólo depende de v^2; $g_{12}(v^2)$.

Para el ángulo de dos curvas paramétricas v^1, v^2, se tiene:

$$\cos \beta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{122}}} \Rightarrow \cos \beta(v^1, v^2) = \frac{g_{12}(v^2)}{\sqrt{g_{22}(v^1, v^2)}},$$

pero $g_{22}(0, v^2) = 1$, se deduce:

$$g_{12}(v^2) = \cos \beta(0, v^2),$$

esta primera forma fundamental será:

$$\dot{x}^2 = \dot{v}^1 \dot{v}^2 + 2 \cos \beta(0, v^2) \dot{v}^1 \dot{v}^2 + g_{22}(v^1, v^2) \dot{v}^2 \dot{v}^2.$$

Si las curvas $v^2 = c$ son tangentes a C, se obtiene

$$ds^2 = (dv^1)^2 + 2dv^1 dv^2 + g_{22}(dv^2)^2$$

Considerando la curva $E \begin{cases} v^1 = 1(v^2) \\ v^2 \end{cases}$ y las geodésicas $\begin{cases} v^2 = c \\ v^1 \end{cases}$,

para E se tiene $\begin{cases} du^1 = 1'(v^2)\, dv^2 \\ du^2 = dv^2 \end{cases}$ y para las geodésicas $\begin{cases} d\bar{u}^1 = dv^1 \\ d\bar{u}^2 = 0 \end{cases}$, para el ángulo α de estas dos curvas se deduce

$$\cos\alpha = \frac{(1' + 1)\,dv^2}{ds_E}\,, \quad (ds_E = \text{arco de } E),$$

finalmente se obtiene:

$$\int_{\text{arco } E_1} \cos\alpha\; ds_E = \int_{v_0^2}^{v_1^2} (1' + 1)\,dv^2 = |1|_{v_0^2}^{v_1^2} + U_C(v_0^2, v_1^2)$$

arco E_1, parte de E comprendido entre las geodésicas correspondientes a v_0^2 y v_1^2.

COROLARIO 1.

Si C y E son cerrados

$$\int_E \cos\alpha\; ds_E = U_C \tag{3}$$

Se deduce: Cualquiera que sea la curva E cerrada, $\int_E \cos\alpha\; ds_E$ *es independiente de E y por tanto, es un invariante integral relativo.*

COROLARIO 2.

Si E es un arco ortogonal a las geodésicas $v^2 = c$, *se deduce:*

$$U_C(v_0^2, v_1^2) = l(v_0^2) - l(v_1^2)$$

que representa el teorema de curva envolvente.

2. *Medida de las geodésicas que cortan a una curva C sobre una supeficie.*

PROPOSICION 2.

Del invariante integral relativo $\int \cos\alpha\; ds_E$ *del tubo de geodésicas* *tangentes a una curva C sobre una superficie, se deduce el invariante integral absoluto*

$$\text{(4)} \qquad \iint_{G \cap C \neq 0} |sen\ \alpha|\ d\alpha\ ds,$$

que representa la medida de las geodésicas que cortan a C. Se toma valor absoluto de sen α por tratarse de una medida. La curva E fué obtenida tomando una semi-geodésica tangente, considerando la geodésica completa, se deduce:

$$\int_{2E} cos\ \alpha\ ds_E = \int_{2C} ds_C = 2\,L \qquad (sobre\ C,\ \alpha = 0)$$

por el teorema de Stokes:

$$\text{(5)} \quad \int_{2E} cos\ \alpha\ ds_E = \iint_{G \cap C \neq 0} |sen\ \alpha|\ d\alpha\ ds = \int_{2C} cos\ \alpha\ ds = 2\,L$$

PROPOSICION 3.

Siendo dG la densidad de geodésicas y n el número de intersecciones de cada geodésica con C, se deduce

$$\text{(6)} \qquad \int_{G \cap C \neq 0} n dG = 2\,L$$

Demostración:

Dado un invariante integral relativo correspondiente a un tubo lineal de geodésicas, su diferencial exterior representa un invariante integral absoluto, que es una medida, pues es invariante sobre un conjunto de dos dimensiones de geodésicas, sin necesidad de que sea cerrado y no depende del punto en que se cuente la geodésica. Por tanto

$$|\text{sen}\ \alpha|\ d\alpha\ ds$$

es un invariante integral absoluto que mide la densidad de geodésicas que cortan a C. Teniendo en cuenta que

$$\int_0^L ds \int_0^\pi |\text{sen } \alpha| \, d\alpha = 2\,L \tag{7}$$

siendo dG el elemento diferencial de la medida de geodésicas, como la geodésica G ha sido contada tantas veces como intersecciones tiene con C, siendo n este número, se obtiene:

$$\int_{G \cap C \neq 0} n dG = 2\,L \qquad \text{c.q.d.}$$

COROLARIO 3.

Para las curvas convexas

$$\int 2\,dG = 2\,L$$

es decir, en este caso

$$\int_{G \cap C \neq 0} dG = L$$

La medida de las geodésicas que cortan sobre una superficie a una curva C, convexa, es igual a su longitud.

3. Otra expresión de la integral de geodésicas.

TEOREMA

Dada una curva convexa cerrada de clase no inferior a tres, sobre una porción de superficie, en donde puedan definirse unas coordenadas polares ortogonales (u^1, u^2) y tal que cada geodésica que corta a C tiene una y sólo una línea paramétrica ortogonal $u^2 = const.$, la medida de las geodésicas que cortan a C está definida por

$$\iint_{\text{interior } E} d\theta \; du^1 = L$$

Siendo θ la variación del ángulo del vector tangente a las líneas paramétricas $u^1 = const.$, en el sentido de Levi-Civita, s_1 la longitud *del arco sobre las curvas $u^2 = const.$, L la longitud de C. La integración extendida al dominio: Int. E, de los puntos determinados por los puntos de intersección de cada geodésica que corte a C con la curva ortogonal $u^2 = const.$*

Demostración:

Teniendo en cuenta las coordenadas elegidas, se deduce: $ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$, siendo $\varkappa_{g_2}$ la curvatura geodésica de la curva $u^1 = $ const. y representado por ds_2 su arco y por ds_1 el arco de $u^2 = $ const., se deduce (Vid. [1] pág. 92):

$$\varkappa_{g_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \; ds_2 = g_{22}^{1/2} \, du^2, \; ds_1 = g_{11}^{1/2} \, du_1$$

Pero

$$\frac{d\theta}{ds_2} = \varkappa_{g_2}$$

o sea

$$d\theta = \varkappa_{g_2} \, ds_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{du^2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{22}^{1/2}}{\partial u^1} \, du^2$$

Por tanto

$$\text{(8)} \qquad \iint_{\text{Int. } E} d\theta \, ds_1 = \iint_{\text{Int. } E} \frac{\partial g_{22}^{1/2}}{\partial u^1} \, du^1 \, du^2 = \int_E g_{22}^{1/2} \, du^2$$

Siendo E el contorno que limita el dominio de integración considerado, o sea, determinado por los puntos de intersección de las curvas geodésicas tangentes a C con las curvas paramétricas $u^2 = $ const. ortogonales.

Llamando ds_E al elemento de arco de la curva E y α al ángulo que forma en cada punto dicha curva E con las líneas paramétricas $u^1 = $ const. es el mismo que forma E con la geodésica tangente a C correspondiente a ese punto; pues $u^1 = $ const. es tangente también a esa geodésica en P, (Fig. 2), se deduce:

$$\cos \alpha = \frac{ds_2}{ds_E} = \frac{g_{22}^{1/2} \, du^2}{ds_E}$$

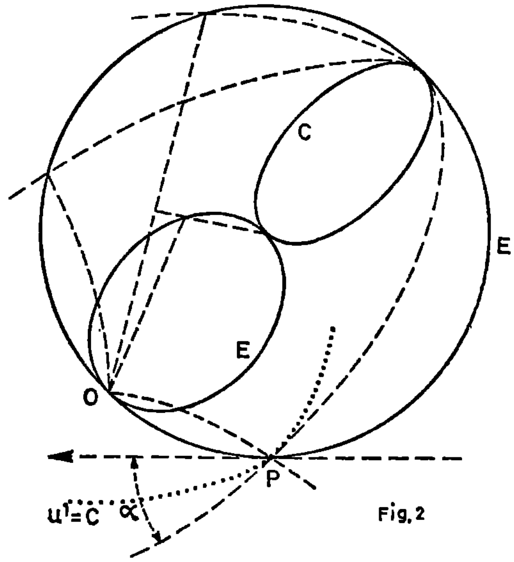

Fig. 2

Pero por la fórmula establecida (3), se tiene

$$\iint_{\text{Int. } E} d\theta \, ds_1 = \int_E g_{22}^{1/2} \, du^2 = \int_E \cos \alpha \, ds_E = L.$$

NOTA. Esta fórmula generaliza a las superficies la fórmula para la medida de rectas en el plano dada en coordenadas polares.

4. *La casi-dualidad entre la integral de geodésicas y el teorema de Gauss-Bonnet.*

Dada una superficie S, la medida de las geodésicas que cortan a una curva C, cerrada, que para mas simplicidad, supondremos convexa, puede expresarse siendo L la longitud de la curva C

$$\int_C ds = \iint_{G \cap C \neq 0} \dot{G} \tag{10}$$

$\dot{G}$ densidad de geodésicas, mide el conjunto de geodésicas sobre la superficie que cortan a C y es igual a la longitud de la curva si C es convexa. Esta fórmula relaciona una medida lineal de puntos con una integral doble de geodésicas.

El teorema de Gauss-Bonnet, para una curva sin puntos singulares, puede expresarse:

$$2\pi - \int_C \varkappa_g \, ds = \iint_{\mathrm{Int.}\, C} K \, d\sigma \tag{11}$$

$\varkappa_g$, curvatura geodésica, K curvatura total, $d\sigma$ elemento de área sobre la superficie. Pero $\int_C \varkappa_g \, ds$ es la medida lineal de las geodésicas tangentes a C, mide el ángulo entre la tangente al describir la curva y el vector tangente inicial que se desplaza paralelamente en el sentido de Levi-Civita. Por tanto esta fórmula relaciona la medida lineal de geodésicas tangentes con una integral doble de puntos*. La dualidad no es completa, pues los ángulos que en cada punto de la superficie hacen los vectores tangentes es constante e igual a π, mientras que la longitud de las geodésicas no es constante. Por esto aparece la función K en la fórmula de Gauss-Bonnet y no figura nada análogo en la fórmula de la integral de geodésicas.

Para poner de relieve esta casi-dualidad, vamos a considerar unas coordenadas polares geodésicas (u^1, u^2). $u^2 =$ const. las geodésicas y sobre ellas u^1 la longitud del arco. La primera forma fundamental será:

$$ds^2 = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2 \tag{12}$$

Consideremos una segunda métrica sobre otra superficie S', también en coordenadas polares, tal que sea:

$$dS^2 = (du^1)^2 + G_{22}(du^2)^2 \tag{13}$$

$$G_{22} = \left(\frac{\partial g_{22}^{1/2}}{\partial v^1} \right)^2 \tag{14}$$

PROPOSICION 4.

El teorema de la integral de geodésicas en esta segunda métrica (13) *relativo al círculo de distancia $u^1 = c$ en S' expresa el teorema de*

(*) Si existen puntos angulosos, en la expresión del teorema de Gauss-Bonnet aparece el término $\int_C \varkappa_g \, ds + \Sigma \alpha_i$, que tambien representa la medida de las tangentes a C.

Gauss-Bonnet relativo a la primera métrica (12), *también respecto al círculo de distancia* $u^1 = c$ *en* S.

Demostración:

De la fórmula de la curvatura total en función de ${}^1g_{ik}$ (Vid. [1] pag. 80):

$$(15) \qquad \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, K = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{g_{11}} \left\{ {11 \atop 2} \right\}\right) - \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{g_{11}} \left\{ {12 \atop 2} \right\}\right)$$

teniendo en cuenta la expresión de la primera forma (12)

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = g^{22}\left[{11 \atop 2} \right] = 0$$

$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} = g^{2m}\left[{12 \atop \mathrm{m}} \right] = g^{22}\left[{12 \atop 2} \right] = \frac{1}{g_{22}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

Se deduce de (15)

$$\sqrt{g_{22}}\, K = -\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\sqrt{g_{22}}\,\frac{1}{g_{22}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial g_{22}^{1/2}}{\partial u^1}\right) = -\frac{\partial^2 g_{22}^{1/2}}{(\partial u^1)^2}$$

es decir:

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 g_{22}^{1/2}}{(\partial u^1)^2} + K g_{22}^{1/2} = 0 \rightarrow \frac{\partial G_{22}^{1/2}}{\partial u^1} + K g_{22}^{1/2} = 0$$

La expresión del teorema sobre la densidad de geodésicas en la métrica (13), respecto a la curva C', $v^1 = c$ se expresa:

$$(17) \qquad \int_C \sqrt{G_{22}}\, du^2 = \iint_{G \cap C \neq 0} \dot{G} = \iint_{\text{int. } C} \frac{\partial \sqrt{G_{22}}}{\partial u^1}\, du^1\, du^2$$

pero teniendo en cuenta el valor de G_{22} deducido de (16) se tiene

$$(18)\quad \oint_C \frac{\partial g_{22}^{1/2}}{\partial u^1}\, du^2 = \iint_{\text{Int. } C} \frac{\partial^2 g_{22}^{1/2}}{(\partial u^1)^2}\, du^1\, du^2 = -\iint_{\text{Int. } C} K\, g_{22}^{1/2}\, du^1\, du^2$$

esta expresión representa el teorema de Gauss-Bonnet, para la primera métrica, pues de la fórmula para $\varkappa_g$, se deduce (Vid. [1], pág. 93)

$$\varkappa_g = \frac{d\omega}{ds} + \frac{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}{g_{11}} \left(\dot{u}^1 \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \dot{u}^2 \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right)$$

para la primera forma (12), siendo C, $u^1 = c$

$$\varkappa_g = \frac{d\omega}{ds} + \sqrt{g_{22}} \left(\dot{u}^2 \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) = \frac{d\omega}{ds} + \sqrt{g_{22}}\, \frac{1}{2}\, \frac{du^2}{ds}\, \frac{1}{g_{22}}\, \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

$$\frac{d\omega}{ds} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\, \frac{1}{2}\, \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\, \frac{du^2}{ds} = \frac{d\omega}{ds} + \frac{\partial g_{22}^{1/2}}{\partial u^1}\, \frac{du^2}{ds}$$

$$\oint_C \frac{\partial g_{22}^{1/2}}{\partial u^1}\, du^2 = \oint_C \varkappa_g\, ds - \oint_C d\omega = \oint_C \varkappa_g\, ds - 2\pi$$

es decir (18) se puede escribir:

$$2\pi - \oint_C \varkappa_g\, ds = \iint_{\text{int. } C} K\, g_{22}^{1/2}\, du^1\, du^2 .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Bieberbach, *Differential geometrie*. G. Teubner, Berlin 1932.

[2] L. A. Santaló, *Introduction to Integral Geometry*. Act. Sc. et ind. n.º 1198. Hermann, Paris, 1953.

[3] E. Vidal Abascal, *Geometría integral sobre las superficies curvas*. Public. del Observ. de la Universidad n.º VII, Santiago de Compostela, 1950.

[4] E. Vidal-E. G. Rodeja, *Nota sobre curvas en superficies de curvatura constante*. Collectanea Math. V. 5, 1952. *p.* 1-9.