EXTENSIONES FINITOGENERADAS Y PROYECTIVAS DE UN ALGEBRA m-CONVEXA

por

JOAN VERDERA MELENCHÓN

0. INTRODUCCIÓN. En [13] estudiamos extensiones de un álgebra de Banach conmutativa y unitaria A, finitamente generadas y proyectivas como módulos sobre A. Uno de los propósitos de este trabajo es estudiar la situación más general que se presenta cuando se supone sólo que A sea un álgebra localmente multiplicativamente convexa.

Antes de establecer nuestros convenios sobre terminología y notación resumiremos brevemente el contenido de cada sección.

Sea A un álgebra m-convexa conmutativa y unitaria sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos y sea B una A-álgebra fiel, finitogenerada y proyectiva como A-módulo. En la sección 1 demostramos que es posible dotar a B de una topología m-convexa naturalmente asociada a la A. En las siguientes secciones se supone la conmutatividad de B. Designemos por π a la dual, entre los espacios de caracteres contínuos de B y A, de la inclusión de A en B. En la sección 2 describimos la estructura de π. En particular resulta que el conjunto de puntos en los que π no es un homeomorfismo local es un cerrado sin interior. En la sección 3 presentamos una condición de tipo algebraico que es necesaria y suficiente para la existencia de una subálgebra inercial de B. Por medio de esta condición demostramos el siguiente teorema de existencia para subálgebras inerciales: si A es completa y π un homeomorfismo local, entonces B contiene una subálgebra inercial. Finalmente, en la sección 4, se demuestra un teorema cuyo interés, a nuestro parecer, reside en el hecho de que proporciona un método para construir clases relativamente amplias de límites inductivos estrictos y numerables de álgebras de Fréchet cuya topología límite inductivo no es m-convexa.

Procedemos ahora a aclarar nuestra terminología y notación. Nuestros anillos son asociativos y tienen un elemento unidad 1 y, salvo que se especifique lo contrario, son conmutativos. Utilizaremos la terminología usual sobre álgebras y módulos sobre anillos conmutativos tal como aparece, por ejemplo, en [2], donde también se encontrará información sobre la teoría de las álgebras (algebráicamente) separables y una exposición del concepto de rango de un módulo finitogenerado y proyectivo.

Una seminorma p sobre un álgebra compleja A se dice que es una seminorma de álgebra si $p(ab) \leqslant p(a)\ p(b)$, $a, b \in A$ y $p(1) = 1$. Por álgebra m-convexa (o multiplicativamente localmente convexa) entendemos un álgebra compleja A dotada de una topología de Hausdorff localmente convexa que puede definirse por medio de una familia filtrante superiormente $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de seminormas de álgebra. Para abreviar, llamaremos a una tal familia una m-base. Para cada $\lambda \in \Lambda$ el conjunto $p_\lambda^{-1}(0)$ es un ideal cerrado de A y $A/p_\lambda^{-1}(0)$ es un álgebra normada respecto de la norma $\|\bar{x}\| = p_\lambda(x)$, donde la barra indica clase en $A/p_\lambda^{-1}(0)$. Sea A_λ la completación de esta álgebra normada. Si M_A denota el conjunto de caracteres contínuos de A (por un carácter de un álgebra compleja A entendemos un morfismo no nulo de $\mathbf{C}$-álgebras de A en $\mathbf{C}$), dotado de la topología de Gelfand, entonces M_{A_λ} se identifica, para cada $\lambda \in \Lambda$, a un subconjunto compacto de M_A. Además $M_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{A_\lambda}$. Supondremos siempre dotado a M_A de la topología generada por la familia de compactos $(M_{A_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$. Esta topología, llamada k-topología por ciertos autores, es más fina que la de Gelfand y no depende de la m-base $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sino sólo de la topología de A. $\hat{f}$ es la transformada de Gelfand de $f \in A$. La referencia clásica para las álgebras m-convexas es [11].

Sea A un álgebra compleja, $\varnothing$ un carácter de A y $\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in A[x]$ un polinomio. Escribiremos

$$\alpha_\varnothing(x) = \sum_{i=0}^{n} \varnothing(\alpha_i)\, x^i \in \mathbf{C}[x],$$

$$Z(\alpha_\varnothing) = \{\lambda \in \mathbf{C} / \alpha_\varnothing(\lambda) = 0\},$$

y denotaremos por $M(\lambda, \alpha_\varnothing)$ a la multiplicidad de λ como raíz de $\alpha_\varnothing(x)$. Escribiremos «$\otimes$» en lugar de «$\otimes_A$».

1. Topología en B. Sea A un álgebra compleja, M un A-módulo finitogenerado y proyectivo, $(m_i, u_i)_{1 \leq i \leq n}$ $((m_i, u_i) \in M \times Hom_A(M, A)$ $\forall i)$ una base dual para M ([1], pág. 4) y p una seminorma en A. Escribiremos:

$$\bar{p}(m) = \sum_{i=1}^{n} p(u_i(m)) \ \forall \ m \in M.$$

Es claro que $\bar{p}$ es una seminorma en M.

Definición. Si A es un álgebra m-convexa, la topología proyectiva de M, que denotaremos por $\tau(M)$, es la menos fina que hace contínuas las aplicaciones de $Hom_A(M, A)$.

La siguiente proposición contiene propiedades elementales de la topología proyectiva y no será demostrada.

1.1. Proposición. Sea A un álgebra m-convexa, M, N y P A-módulos finitogenerados y proyectivos.

1) Si $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una m-base de A, entonces $(\bar{p}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ define $\tau(M)$.
2) $u \in Hom_A(M, N) \Rightarrow u$ es contínua.
3) $M = N \oplus P \Rightarrow \tau(M)/N = \tau(N)$.
4) $M = A x \ldots x A \Rightarrow \tau(M)$ es la topología producto.
5) A completa $\Rightarrow \tau(M)$ completa.

Veamos, ahora, un resultado básico:

1.2. Teorema. Sea A un álgebra compleja, B una A-álgebra (no necesariamente conmutativa) fiel, finitogenerada y proyectiva y p una seminorma de álgebra en A. Existe una seminorma de álgebra q en B que extiende a p. Si p es una norma, q se puede tomar norma.

Demostración. Las hipótesis sobre B aseguran que existe $u_0 \in Hom_A(B, A)$ tal que $u_0(1) = 1$ ([12], Corolario 1.4, pág. 2). Sea $M = Ker\, u_0$ y $(b_i, u_i)_{1 \leq i \leq n}$ una base dual para M, $(b_i, u_i) \in M \times Hom_A(M, A)$ $\forall i$. $\forall t > 0$ definamos:

$$q_t(b) = p(u_0(b)) + t\bar{p}(b - u_0(b)) \qquad \forall \ b \in B.$$

q_t es una seminorma en B que extiende a p y que verifica:

$$q_t(ab) \leqslant p(a)\, q_t(b) \qquad \forall\, (a, b) \in A \times B.$$

Si $m,\ m' \in M$ y $K(t) = \max\limits_{1 \leq i, j \leq n} (q_t(b_i\, b_j))$:

$$\begin{aligned} q_t(m\, m') &= q_t\left(\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(m)\, b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(m')\, b_j\right)\right) = \\ &= q_t\left(\sum_{i,j} u_i(m)\, u_j(m')\, b_i\, b_j\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i,j} p(u_i(m)\, u_j(m'))\, q_t(b_i\, b_j) \leqslant \\ &\leqslant K(t)\, \bar{p}(m)\, \bar{p}(m'). \end{aligned}$$

Extendamos los u_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, a B imponiendo que sean cero en A y escribamos $b_0 = 1$. Como $(b_i, u_i)_{0 \leq i \leq n}$ es una base dual para B:

$$b_i\, b_j = u_0(b_i\, b_j) + \sum_{k=1}^{n} u_k(b_i\, b_j)\, b_k \qquad \forall\, i, j$$

$$q_t(b_i\, b_j) = p(u_0(b_i\, b_j)) + t \sum_{k=1}^{n} p(u_k(b_i\, b_j)) \qquad \forall\, i, j \tag{1}$$

Si $b,\ b' \in B$ y escribimos $m = b - u_0(b)$ y $m' = b' - u_0(b')$:

$$\begin{aligned} & q_t(b\, b') = q_t((u_0(b) + m)\ (u_0(b') + m')) = \\ & = q_t(u_0(b)\ \ u_0(b') + u_0(b)\ m' + u_0(b')\ \ m + m\ \ m') \leqslant \\ & \leqslant q_t(u_0(b)\ \ u_0(b')) + q_t(u_0(b)\, m') + q_t(u_0(b')\, m) + q_t(m\, m') \leqslant \\ & \leqslant p(u_0(b) u_0(b')) + p(u_0(b)) q_t(m') + p(u_0(b')) q_t(m) + K(t)\, \bar{p}(m)\, \bar{p}(m'). \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} q_t(b)\ q_t(b') &= \\ &= p(u_0(b))\ p(u_0(b')) + t\ p(u_0(b'))\ \bar{p}(m) + \\ &+\ t\ p(u_0(b))\ \bar{p}(m') + t^2\, \bar{p}(m)\ \bar{p}(m'). \end{aligned}$$

Ahora, observando que si $m \in M$ es $q_t(m) = t\, \bar{p}(m)$:

$$q_t(b\, b') \leqslant q_t(b)\ \ q_t(b') + (K(t) - t^2)\ \ \bar{p}(m)\ \ \bar{p}(m').$$

Teniendo en cuenta que $K(t) = q_t(b_i b_j)$, para ciertos i, j y recordando (1):

$$K(t) - t^2 \leqslant N + Nt - t^2$$

donde $N = \underset{i,j,k}{máx} \ (p(u_k(b_i b_j)) \ )$

Si t es grande $K(t) - t^2$ es negativo y entonces:

$$q_t(b\,b') \leqslant q_t(b) \; q_t(b') \qquad \forall b,\ b' \in B$$

1.3. Teorema. Sea A un álgebra m-convexa y B un A-álgebra (no necesariamente conmutativa) fiel, finitogenerada y proyectiva. La topología proyectiva de B es m-convexa. Si A es normable (resp. completa) B es normable (resp. completa).

Demostración. Sea $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una m-base de A. $\forall\ \lambda \in \Lambda$ consideremos una extensión de p_λ a B, digamos q_λ, relativa a cierto $t_\lambda > 0$ tal que q_λ sea una seminorma de álgebra. La familia $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ no es necesariamente filtrante superiormente debido a la arbitrariedad del t_λ que determina la submultiplicatividad de q_λ. Sea τ la topología m-convexa definida en B mediante la familia de seminormas de álgebra que se obtiene de $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tomando supremos finitos. Es fácil comprobar que, conservando la notación de 1.2:

$$q_\lambda(b) \leqslant máx \ (1, t_\lambda) \sum_{k=0}^{n} p_\lambda(u_k(b)) \qquad \forall b \in B$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_\lambda(u_k(b)) \leqslant máx \ (1, \ t_\lambda^{-1}) \ q_\lambda(b) \qquad \forall b \in B$$

Luego $\tau = \tau(B)$ y hemos terminado.

Nota. 1.3 contiene el resultado principal de [9]. El autor ha demostrado en [15] un resultado análogo cuando A es un álgebra Pseudo-Banach.

2. Estructura de M_B. En esta sección A indicará un álgebra m-convexa y B una extensión finitogenerada y proyectiva de A; π será, en todo el trabajo, la dual espectral de la inclusión de A en B, esto es, $\pi : M_B \to M_A$, $\pi(\psi) = \psi/A \ \ \forall\ \psi \in M_B$. Si $\alpha(x)$ es un polinomio mónico en $A[x]$, indicaremos por A_α a la extensión $A[x]/_{(\alpha(x))}$,

que es libre de dimensión el grado de $\alpha(x)$, y por π_α a la proyección de M_{A_α} en M_A. Resulta que M_{A_α} es homeomorfo a $\{(\varnothing, \lambda) \in M_A \times \times \mathbf{C} / \varnothing \in M_A, \lambda \in Z(\alpha_\varnothing)\}$, ([7], 4.3, pág. 56). Razonando como en la sección 1 de [6] obtenemos el siguiente

2.1. LEMA. Para cada $\varnothing \in M_A$, si $Z(\alpha_\varnothing) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k(\varnothing)}\}$, $k(\varnothing) = = card\ Z(\alpha_\varnothing)$, entonces existen M-entornos V_i de $(\varnothing, \lambda_i)$, dos a dos disjuntos, tales que:

1) $\pi_\alpha(V_i) = \pi_\alpha(V_1) \qquad \forall i$

2) $\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(V_1)) = \bigcup_{i=1}^{k(\varnothing)} V_i$

3) $\pi_\alpha(V_1)$ puede tomarse incluido en un entorno prefijado de $\varnothing$.

Definición. Sea $\psi \in M_B$, $\varnothing = \pi(\psi)$ y $m_\varnothing = ker\ \varnothing$. $B/_{m_\varnothing B}$ es un álgebra de dimensión finita sobre $\mathbf{C}$ y su espectro es naturalmente homeomorfo a $\pi^{-1}(\varnothing)$. Si e es el idempotente de $B/_{m_\varnothing B}$ tal que el soporte de $\hat{e}$ es $\{\psi\}$, definimos la multiplicidad $m(\psi)$ de ψ como la dimensión compleja de $e(B/_{m_\varnothing B})$.

2.2. LEMA. Supongamos que B tenga rango definido sobre A y sea n. Entonces para cada $b \in B$ existen un polinomio mónico $\alpha(x)$ en $A[x]$, de grado n, y una aplicación contínua

$$f^* : M_B \to M_{A_\alpha}$$

que conmuta con las proyecciones, tales que:

1) $\alpha(b) = 0$

2) $Z(\alpha_\varnothing) = \hat{b}(\pi^{-1}(\varnothing)), \qquad \forall \varnothing \in M_A$

3) f^* es exhaustiva.

4) $M(\psi(b), \alpha_{\pi(\psi)}) = \sum m(\theta), \qquad \forall \psi \in M_B$,

donde la suma se extiende sobre los $\theta \in M_B$ que cumplen $f^*(\theta) = f^*(\psi)$.

Demostración. Aplicar los argumentos de [13] teniendo en cuenta que si ψ es un carácter de B, $\psi \in M_B$ si y sólo si $\pi(\psi) \in M_A$.

Ahora podemos dar una descripción completa de la estructura de π .

2.3. Teorema. Si W es un abierto de M_A, $\varnothing \in W$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m$ son los puntos distintos de $\pi^{-1}(\varnothing)$, entonces existen entornos V_i de ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, dos a dos disjuntos y un entorno U de $\varnothing$ tales que:

3) $\pi(V_i) = U \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant m$

2) $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{1=i}^{m} V_i$

3) $\sum\limits_{\psi \in \pi^{-1}(\omega) \cap V_i} m(\psi) = m(\psi_i) \quad , \quad \omega \in U \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant m$

4) $U \subset W$

Además π es una aplicación abierta.

Demostración. Notemos que no restringe la generalidad el suponer que B tiene rango definido sobre A. En efecto, por [2, 4.11, p. 31], se pueden encontrar idempotentes $e_1, \ldots, e_p$ de A, con $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$ y $e_1 + \ldots + e_p = 1$, tales que $e_i B$ es una extensión finitogenerada y proyectiva de $e_i A$ con *rango definido*. Supongamos, por tanto, que el rango de B sobre A es n.

Sea $b \in B$ tal que $\hat{b}$ separe los puntos de $\pi^{-1}(\varnothing)$ y sean $\alpha(x)$ y f^* un polinomio y una aplicación dados por el lema 2.2. Debido al lema 2.1, existen M-entornos V_i^* de los puntos $f^*(\psi_i)$, dos a dos disjuntos, y un entorno U de $\varnothing$ tales que

$$\pi_\alpha(V_i^*) = U \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant m \quad , \quad \pi_\alpha^{-1}(U) = \bigcup_i V_i^*$$

y $U \subset W$. Si escribimos $V_i = f^{*-1}(V_i^*)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, resulta que las condiciones 1) 2) y 4) del Teorema se satisfacen obviamente. Para demostrar 3) consideremos $\omega \in U$ y fijemos $i \in \{1,2, \ldots, m\}$. Recurriendo a la definición de M-entorno obtenemos:

$$m(\psi_i) = M(\psi_i(b), \alpha_\varnothing) = \sum_\lambda M(\lambda, \alpha_\omega) \tag{2}$$

donde la suma se extiende al conjunto $\{\theta(b) / \theta \in V_i \cap \pi^{-1}(\omega)\}$. Pero por el lema 2.2. para cada $\theta \in V_i \cap \pi^{-1}(\omega)$:

$$M(\theta(b), \alpha_\omega) = \sum_\psi m(\psi) \tag{3}$$

donde la suma es sobre el conjunto $\{\psi / f^*(\psi) = f^*(\theta)\}$. (2) y (3) demuestran (4).

Falta demostrar que π es abierta. Sabemos que esto es cierto si A es Banach [13, Teorema 1]. Para el caso general consideremos una m-base $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de A cerrada por supremos finitos (esto es, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \Lambda$, entonces $\sup_{1 \le i \le p} p_{\lambda_i} = p_\lambda$ para cierto $\lambda \in \Lambda$). Construyamos una m-base $(q_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'}$ de B a partir de $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ aplicando el teorema 1. a cada p_λ y luego tomando supremos finitos. Entonces $\forall \lambda' \in \Lambda'$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$q_{\lambda'}(b) = p_\lambda(u_0(b)) + t_\lambda \sum_{j=1}^{n} p_\lambda(u_j(b)), \qquad b \in B,$$

donde el significado de t_λ y de las u_j es como en el teorema 1. Si $q_{\lambda'}(b) = 0$ para algún $b \in B$, entonces $u_j(b) \in p_\lambda^{-1}(0)$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por tanto $b = \sum_{j=0}^{n} u_j(b)\, b_j \in p_\lambda^{-1}(0)\, B$, y de aquí $q_{\lambda'}^{-1}(0) = p_\lambda^{-1}(0)\, B$. Ahora resulta que $B/_{q_{\lambda'}^{-1}(0)}$ es una extensión finitogenerada y proyectiva de $A/_{p_\lambda^{-1}(0)}$. Es fácil comprobar que la norma $\|\bar{b}\| = q_{\lambda'}(b)$, $b \in B$, proporciona la topología proyectiva en $B/_{q_{\lambda'}^{-1}(0)}$ relativa a la topología en $A/_{p_\lambda^{-1}(0)}$ dada por la restricción de $\|\ \|$ a $A/_{p_\lambda^{-1}(0)}$.

La relación

$$\bar{b} = \sum_{j=0}^{n} \bar{u}_j(\bar{b})\, \bar{b}_j, \qquad b \in B,$$

donde las barras tienen el significado obvio, extiende a la completación $B_{\lambda'}$ de $B/_{q_{\lambda'}^{-1}(0)}$ que resulta, por tanto, ser una extensión finitogenerada y proyectiva de A_λ. Sea π_λ la dual espectral de la inclusión de A_λ en $B_{\lambda'}$. Observando que $M_{B_{\lambda'}} = \pi^{-1}(M_{A_\lambda})$, obtenemos, si V es un abierto de M_B:

$$\pi(V) \cap M_{A_\lambda} = \pi(V \cap \pi^{-1}(M_{A_\lambda})) = \pi_\lambda(V \cap M_{B_{\lambda'}}).$$

Entonces, como π_λ es abierta, $\pi(V) \cap M_{A_\lambda}$ es abierto en M_{A_λ}. Luego π es abierta.

Definición. Un punto ψ de M_B es singular si y sólo si π no es homeomorfismo local en ψ.

2.4. COROLARIO. Si S es el conjunto de puntos singulares de M_B, S y $\pi(S)$ son cerrados sin interior.

Demostración. Como π es abierta es suficiente demostrar que $\pi(S)$ tiene interior vacío. Consideremos $\varnothing_0 \in \pi(S)$ y sea W un entorno abierto de $\varnothing_0$. Escribamos $k(\varnothing) =$ cardinal $\pi^{-1}(\varnothing)$ y $\pi^{-1}(\varnothing) = \{\varnothing_1, \ldots, \ldots, \varnothing_{k(\varnothing)}\}$ para $\varnothing \in M_A$. Sea $\varnothing \in W$ tal que $k(\varnothing) = \max\limits_{w \in W} k(\omega)$. Consideremos entornos V_i de $\varnothing_i$ y U de $\varnothing$ dados por el Teorema 2.3. Entonces:

$$\text{cardinal } (\pi^{-1}(\theta) \cap V_i) \geqslant 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k(\theta), \qquad \theta \in U \qquad (4)$$

La definición de $\varnothing$ nos dice que, de hecho, vale el signo igual en (4). Por lo tanto π/V_i es un homeomorfismo sobre U para cada i, o sea $\varnothing \notin \pi(S)$.

2.5. COROLARIO. Si B es separable como A-álgebra, entonces π es un homeomorfismo local y, por tanto, M_B un revestimiento con fibra finita de M_A con proyección π.

Demostración. Sea $\psi \in M_B$ y escribamos $\varnothing = \pi(\psi)$, $m_\varnothing = Ker\ \varnothing$. Entonces $B/_{m_\varnothing B}$ es $A/_{m_\varnothing} = \mathbf{C}$-separable [2, 7.1, p. 72]. Por consiguiente $B/_{m_\varnothing B}$ es, como $\mathbf{C}$-álgebra, $\mathbf{C}x \overset{n)}{\ldots} x\mathbf{C}$, $n = dim\, B/_{m_\varnothing B}$. La conclusión es $m(\psi) = 1\ \forall\ \psi \in M_B$. Entonces π es un homeomorfismo local.

Nota. 2.5 contiene el teorema 5 de [8].

3. EL TEOREMA PRINCIPAL DE WEDDERBURN. El teorema principal de Wedderburn afirma que si B es un álgebra de dimensión finita (no necesariamente conmutativa) sobre un cuerpo y $B/_{R(B)}$ ($R(A)$ es el radical de Jacobson de un anillo A) es separable, existe una subálgebra B_0 de B tal que $B = B_0 \oplus R(B)$ (suma directa de espacios vectoriales). En [3] se propone el siguiente problema: Si A es un anillo y B una A-álgebra finitogenerada (no necesariamente conmutativa) tal que $B/_{R(B)}$ es A-separable ¿qué condiciones garantizan la existencia de una subálgebra inercial de B (o sea, de una subálgebra B_0 de B, A-separable, tal que $B = B_0 + R(B)$)?.

El objeto de esta sección es profundizar en el estudio del problema expuesto con hipótesis de conmutatividad y proyectividad sobre B.

3.1. TEOREMA. Sea A un anillo y B una A-álgebra finitogenerada proyectiva tal que $B/_{R(B)}$ sea A-separable. Son equivalentes:

1) B contiene una subálgebra inercial.

2) $B \otimes B$ contiene un idempotente $e = \sum_i x_i \otimes y_i$ tal que:

   a) $\sum_i x_i y_i = 1$

   b) $\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i y_i \otimes x_i$ en $B \otimes B$

   c) $\sum_{i,j} x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j = \sum_{i,j} x_i \otimes x_j y_i \otimes y_j$ en $B \otimes B \otimes B$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Sea B_0 una subálgebra inercial de B, $e' = \sum_i x_i' \otimes y_i'$ el idempotente de separabilidad de B_0 ([2]), pág. 40) y φ la proyección natural de B_0 en $B/_{R(B)}$. Entonces:

$$x_i' \otimes (1 \otimes y_i' - y_i' \otimes 1)\; e' = 0 \qquad \forall\, i$$

por definición de idempotente de separabilidad. Sumando sobre i:

$$\sum_{i,j} x_i' \otimes x_j' \otimes y_i' y_j' = \sum_{i,j} x_i' \otimes x_j' y_i' \otimes y_j' .$$

También por definición de idempotente de separabilidad:

$$\sum_i x_i' y_i' = 1 .$$

Utilizando la unicidad de los idempotentes de separabilidad en el caso conmutativo:

$$\sum_i x_i' \otimes y_i' = \sum_i y_i' \otimes x_i' .$$

Escribiendo $e = (\varphi \otimes \varphi)\,(e')$, $x_i = \varphi(x_i')$ y $y_i = \varphi(y_i')$ $\forall\, i$ obtenemos lo deseado.

2) $\Rightarrow$ 1). Definamos $B_0 = \{b \in B \;/\; (b \otimes 1 - 1 \otimes b)\; e = 0\}$ y consideremos el A-morfismo $\varphi : B \to B \otimes B$ definido por:

$$\varphi(b) = (b \otimes 1 - 1 \otimes b)\, e \qquad \forall\, b \in B .$$

B_0 es una subálgebra de B y, por definición de B_0, la siguiente sucesión es exacta:

$$(0) \longrightarrow B_0 \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} B \otimes B. \qquad (5)$$

Tensorializando por B, que es A-plana, obtenemos que es exacta:

$$(0) \longrightarrow B \otimes B_0 \longrightarrow B \otimes B \xrightarrow{1 \otimes \varphi} B \otimes B \otimes B$$

$(1 \otimes \varphi)$ $(e) = 0$ por $c)$; luego $e \in B \otimes B_0$ y, por tanto, podemos suponer que $y_i \in B_0$ $\forall$ i. Sean $\mu : B \otimes B_0 \to B$ y $g : B \to B \otimes B_0$ las aplicaciones definidas por $\mu(b \otimes b') = b\, b'$ y $g(b) = (b \otimes 1)\ e$. μ y g son B_0-lineales (para g hay que utilizar la definición de B_0) y μ o $g = I_B$ por $a)$. Ahora podemos escribir la sucesión de implicaciones: B es un B_0-factor de $B \otimes B_0 \Rightarrow B$ es B_0-proyectiva $\Rightarrow B_0$ es un B_0-factor de B ([12], Corolario 1.4, pág. 2) $\Rightarrow B_0$ es A-proyectiva $\Rightarrow B_0$ es A-plana.

Tensorizando (5) sobre A por B_0, resulta que es exacta:

$$(0) \longrightarrow B_0 \otimes B_0 \longrightarrow B_0 \otimes B \xrightarrow{1 \otimes \varphi} B_0 \otimes B \otimes B.$$

Por $b)$ $e \in B_0 \otimes B$; pero por $c)$ $(1 \otimes \varphi)$ $(e) = 0$. Luego $e \in B_0 \otimes B_0$. La conclusión es que B_0 es A-separable. Que $B_0 + R(B) = B$ resulta de [4], lema 6, pág. 7.

Nota. En la demostración precedente se han utilizado ideas de A. Magid (véase [10], pág. 91).

3.2. Teorema. Sea A un anillo y B una A-álgebra finitogenerada y proyectiva tal que $B/_{R(B)}$ sea A-separable. Si A tiene la propiedad de que, para cada A-álgebra finitogenerada y proyectiva C, cada idempotente de $C/_{R(C)}$ es imagen, por la proyección canónica, de un idempotente de C, entonces B contiene una subálgebra inercial.

Demostración. Sea p la proyección natural de $B \otimes B$ en $B/_{R(B)} \otimes R/_{R(B)}$ y e_0 el idempotente de separabilidad para $B/_{R(B)}$. Como $Ker\ p \subset R(B \otimes B)$ y $B \otimes B$ es A-finitogenerada y proyectiva, existe un idempotente e de $B \otimes B$ tal que $p(e) = e_0$. Escribamos: $e = \sum_i x_i \otimes y_i$; $x_i, y_i \in B$ $\quad \forall$ i.

La conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B\otimes B & \xrightarrow{p} & B/_{R(B)}\otimes B/_{R(B)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B/_{R(B)} \end{array}$$

donde las flechas verticales se definen $x\otimes y \to x\,y$ y la horizontal inferior es la proyección canónica, nos dice que $\sum_i x_i\,y_i$ es un idempotente de B que, módulo $R(B)$, es 1.
Entonces

$$\sum_i x_i y_i = 1 \tag{6}$$

Consideremos los morfismos de A-álgebras:

$$B\otimes B \xrightarrow{\varphi_1} B\otimes B\otimes B \qquad \varphi_1(x\otimes y) = x\otimes(1\otimes y)\,e$$

$$B\otimes B \xrightarrow{\varphi_2} B\otimes B\otimes B \qquad \varphi_2(x\otimes y) = x\otimes(y\otimes 1)\,e$$

Escribamos $u_i = \varphi_i(e)$, $i = 1{,}2$. Teniendo en cuenta la conmutatividad de:

$$\begin{array}{ccc} B\otimes B & \xrightarrow{\varphi_i} & B\otimes B\otimes B \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ B/_{R(B)}\otimes B/_{R(B)} & \xrightarrow{\varphi'_i} & B/_{R(B)}\otimes B/_{R(B)}\otimes B/_{R(B)} \end{array}$$

donde φ_i' se define como φ_i sustituyendo e por e_0, obtenemos:

$$q(u_1) = q(u_2)\ (B/_{R(B)} \text{ es } A\text{-separable}).$$

Como que los u_i son idempotentes y $Ker\ q \subset R(B\otimes B\otimes B)$: $u_1 = u_2$. De otro modo:

$$\sum_{i,j} x_i\otimes x_j\otimes\ y_i\,y_j = \sum_{i,j} x_i\otimes x_j\,y_i\otimes y_j \tag{7}$$

Razonando de forma semejante sobre el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \longrightarrow & B \otimes B \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ B/_{R(B)} \otimes B/_{R(B)} & \longrightarrow & B/_{R(B)} \otimes B/_{R(B)} \end{array}$$

donde las flechas horizontales se definen $x \otimes y \to y \otimes x$, concluimos que vale

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum y_i \otimes x_i \tag{8}$$

Ahora (6), (7) y (8) concluyen el razonamiento mediante una aplicación de 3.1.

3.3. Corolario. Sea A un álgebra m-convexa completa y B una extensión finitogenerada y proyectiva de A. Son equivalentes:

1) $B/_{R(B)}$ es A-separable.
2) B contiene una subálgebra inercial.
3) π es un homeomorfismo local.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Comprobemos que A verifica las hipótesis de 3.2. Sea C una A-álgebra finitogenerada y proyectiva y $Ann\ C$ el anulador de C. Como $Ann\ C$ es un ideal de A generado por un idempotente ([2], 1.9, pág. 7), $Ann\ C$ es cerrado y $A_0 = A/_{Ann\ C}$ es m-convexa completa. Sustituyendo A por A_0 puedo suponer que C es una extensión de A. Entonces 1.3 nos dice que existe en C una topología m-convexa completa y, por tanto, el teorema de idempotencia de Shilov nos garantiza que A verifica las hipótesis de 3.2.
2) $\Rightarrow$ 1). Una imagen homomorfa de un A-álgebra separable es A-separable ([2], 1.11, pág. 46).
1) $\Rightarrow$ 3). Hemos visto que 1) implica que A verifica las hipótesis de 3.2. La demostración de 3.2 nos dice que B cumple 2) de 3.1. De aquí deducíamos que B contiene una subálgebra inercial B_0 finitogenerada y proyectiva. Por [4], proposición 1, pág. 2, $M_{B_0} \simeq M_B$ y por 2.6 π es un homeomorfismo local.
3) $\Rightarrow$ 2). Sea $M_B \underset{M_A}{\times} M_B = \{(\varnothing, \psi) \in M_B \times M_B / \pi(\varnothing) = \pi(\psi)\}$ dotado de la topología inducida por $M_B \times M_B$. Los morfismos:

$$B \dashrightarrow B \otimes B \qquad\qquad B \longrightarrow B \otimes B$$
$$b \longrightarrow b \otimes 1 \qquad\qquad b \longrightarrow 1 \otimes b$$

inducen una aplicación contínua y biyectiva:

$$M_{B \otimes B} \xrightarrow{\varphi} M_B \underset{M_A}{\times} M_B .$$

Si $D = \{(\varnothing, \psi) \in M_B \underset{M_A}{\times} M_B / \ \varnothing = \psi\}$, D es un abierto y cerrado de $M_B \underset{M_A}{\times} M_B$ porque π es un homeomorfismo local. Luego $D_0 = \varphi^{-1}(D)$ es un abierto y cerrado de $M_{B \otimes B}$. Sea e el idempotente de $B \otimes B$ tal que $\hat{e} = \chi_{D_0}$, la función característica de D_0. Si $e = \sum_i x_i \otimes y_i$, $x_i, y_i \in B \ \forall\, i$, y para $x, y \in B$ designamos por $\hat{x} \times \hat{y}$ la función de $C(M_{B \otimes B})$ definida por:

$$(\hat{x} \times \hat{y}) \ (\varnothing, \psi) = \hat{x}(\varnothing)\, \hat{y}(\psi) \qquad (\varnothing, \psi) \in M_B \underset{M_A}{\times} M_B ,$$

resulta que

$$\hat{e} = \sum_i \hat{x}_i \times \hat{y}_i .$$

De aquí:

$$\sum_i \hat{x}_i \hat{y}_i = 1 \tag{9}$$

$$\sum_i \hat{x}_i \times \hat{y}_i = \sum \hat{y}_i \times \hat{x}_i \tag{10}$$

$$\sum_{i,j} \hat{x}_i \times \hat{y}_j \times \hat{y}_i \hat{y}_j = \sum_{i,j} \hat{x}_i \times \hat{x}_j \hat{y}_i \times \hat{y}_j \tag{11}$$

De (9), (10) y (11) deducimos, como en la demostración de 3.2, que:

$$\sum_i x_i y_i = 1$$

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i y_j \otimes x_i$$

$$\sum_{i,j} x_i \otimes y_j\, x_i \otimes y_j = \sum_{i,j} x_i \otimes x_j \otimes y_i\, y_j .$$

Aplicando 3.1 hemos terminado.

Nota. Es interesante comparar 3.2 con el teorema 2 de [5]. Los resultados de esta sección fueron anunciados, sin demostración, en [14].

5. Extensiones localmente separables. En Teoría de Galois de anillos conmutativos con unidad se utiliza la noción de extensión localmente separable ([2], pág. 102). Si A es un anillo, una extensión B de A se dice localmente separable cuando es unión de una familia de subálgebras finitogeneradas, proyectivas y separables. Nuestro interés reside en la siguiente situación: supongamos que A es un álgebra m-convexa y que B es una extensión de A tal que existe una familia numerable $(B_n)_{n\in N}$ de subálgebras de B que contienen A y verifican:

a) B_n es finitogenerada, proyectiva y separable como A-álgebra.

b) $B_n \subsetneqq B_{n+1} \quad \forall\, n \in N, \qquad B_0 = A$ y $B = \bigcup_{n\in N} B_n$.

Dotemos a cada B_n de la topología proyectiva y a B de la topología $\mathcal{T}$ límite inductivo respecto del sistema inductivo que forman las B_n y las inclusiones canónicas. El problema es si $\mathcal{T}$ es una topología m-convexa.

5.1 Lema. Sea A un álgebra compleja, M un A-módulo finitogenerado, proyectivo y fiel, $(m_i, f_i)_{1\leq i\leq n}$ una base dual para M ($(m_i, f_i) \in M \times Hom_A(M, A) \quad \forall\, i$) y p y q seminormas de álgebra en A. Definamos seminormas en M escribiendo:

$$\dot{p}(m) = K_p \sum_i p(f_i(m)) \qquad \forall\, m \in M \qquad (K_p > 0)$$

$$\dot{q}(m) = K_q \sum_i q(f_i(m)) \qquad \forall\, m \in M \qquad (K_q > 0).$$

Entonces, si $\dot{p}$ y $\dot{q}$ son equivalentes, p y q también lo son.

Demostración. Supongamos que, para cierto $c > 0$:

$$\dot{p}(m) \leqslant c\, \dot{q}(m) \qquad \forall\, m \in M.$$

Las hipótesis sobre M garantizan la existencia de elementos $x_1, \ldots, x_n$ de M que verifican ([2], 1.9, pág. 7):

$$\sum_i f_i(x_i) = 1.$$

Consideremos la aplicación:

$$F : M \times M \times \overset{n)}{\ldots} \times M \longrightarrow A$$

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \sum_i f_i(y_i).$$

Definamos, para $s, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$e_j^s = (0, \ldots, 0, \; m_j, 0, \ldots, 0)$$

donde m_j está en la coordenada s-ésima.

$$\text{Si } \alpha = \underset{j,s}{máx}(p(F(e_j^s)) \;,\; q(f_j(x_s))) \;, \qquad \forall\, a \in A :$$

$$\begin{aligned}
p(a) &= p(a\, F(x_1, \ldots, x_n)) = p(F(a x_1, \ldots, a x_n)) = \\
&= p\Big(F\Big(\sum_j f_j(a x_1)\, m_j, \ldots, \sum_j f_j(a x_n)\, m_j\Big)\Big) = \\
&= p\Big(F\Big(\sum_j f_j(a x_1)\, e_j^1 + \ldots + \sum_j f_j(a x_n)\, e_j^n\Big)\Big) = \\
&= p\Big(\sum_j f_j(a x_1)\, F(e_j^1) + \ldots + \sum_j f_j(a x_n)\, F(e_j^n)\Big) \leqslant \\
&\leqslant \alpha\Big(\sum_j p(f_j(a x_1)) + \ldots + \sum_j p(f_j(a x_n)\Big) = \\
&= \alpha/_{K_p} (\dot{p}(a x_1) + \ldots + \dot{p}(a x_n)) \leqslant \\
&\leqslant \alpha\, c/_{K_p} (\dot{q}(a x_1) \ldots \dot{q}(a x_n)) = \\
&= \alpha \; c(K_{q/K_p})\Big(\sum_j q(f_j(a x_1)) + \ldots + \sum_j q(f_j(a x_n))\Big) \leqslant \\
&\leqslant \alpha^2\, c(K_{q/K_p})\Big(\sum_j q(a) + \ldots + \sum_j q(a)\Big) = \\
&= (\alpha n)^2\, c(K_{q/K_p})\, q(a).
\end{aligned}$$

5.2 Teorema. En la situación explicitada antes del Lema, si además A es metrizable resulta que:

$$\mathcal{T} \text{ es } m\text{-convexa} \Leftrightarrow A \text{ es normable.}$$

Demostración. La implicación recíproca resulta de un resultado general de Arosio ([1], proposición 12, pág. 349).

Supongamos que A no es normable. Consideremos una m-base para A, $(p_n)_{n\in N}$, tal que:

$$p_0 \leqslant p_1 \leqslant \dots \leqslant p_n \leqslant \dots$$

y p_n no es equivalente a p_{n+1} $\forall\, n \in N$.
$\forall\, n \in N - \{0\}$, B_n es B_{n-1} finitogenerada y proyectiva ([2], 2.4, pág. 94). Sea $u_n \in Hom_{B_{n-1}}(B_n, B_{n-1})$ con $u_n(1) = 1$ y $M_n = Ker\, u_n$.
Entonces $B_n = B_{n-1} \oplus M_n$ (suma directa de B_{n-1}-módulos).
Por tanto, $\forall\, n \in N - \{0\}$:
$B_n = A \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ (suma directa de A-módulos).
Pongamos $M_0 = A$ y $\forall\, n \in N - \{0\}$ escojamos una base dual para M_n como B_{n-1}-módulo finitogenerado y proyectivo: $(m_i^n, f_i^n)_{1 \leq i \leq \varrho_n}$

Demostremos la siguiente proposición:
(P) : existen una sucesión de seminormas de álgebra $(q_n)_{n\in N}$ en B y una sucesión doble de números reales estrictamente positivos $(K_n^m)_{\substack{n\geq 0\\ m\geq 1}}$, que verifican:

a) $q_{n/A} = p_n \quad \forall\, n \in N \quad$ y $q_0 \leqslant q_1 \leqslant \dots \leqslant q_n \leqslant \dots$

b) $\forall\, x \in B_m$, $m \geqslant 1$, si

$$x = x_0 + x_1 + \dots + x_m,\quad x_j \in M_j \text{ para } 0 \leqslant j \leqslant m,$$

entonces:

$$q_n(x) = p_n(x_0) + \sum_{j=1}^{m} K_n^j \sum_{i=1}^{\varrho_j} q_n(f_i^j(x_j)\ ) \tag{12}$$

Para demostrar (P) construimos cada q_n inductivamente. Pongamos $q_0 = p_0$ en A. Supongamos construida q_0 en B_m, $m \geqslant 1$, de modo que se cumpla (12) para $n = 0$. Apliquemos 1.2 tomando B_m comoálgebra base, B_{m+1} como extensión y q_0 como seminorma de álgebra en B_m existe un $K_0^{m+1} > 0$ tal que:

$$q'_0(x) = q_0(u_{m+1}(x)) + K_0^{m+1} \sum_{i=1}^{\varrho_{m+1}} q_0(f_i^{m+1}(x - u_{m+1}(x)))$$

es una seminorma de álgebra en B_{m+1}. Teniendo en cuenta que $x - u_{m+1}(x)$ es el elemento x_{m+1} de la descomposición de x que figura en b):

$$q'_0(x) = p_0(x_0) + \sum_{j=1}^{m+1} K_0{}^j \sum_{i=1}^{\varrho_j} q_0(f_i{}^j(x_j)) \qquad \forall\, x \in B_{m+1}.$$

Entonces q'_0 será q_0 en B_{m+1}.
Supongamos construidas seminormas de álgebra $q_0, \ldots, q_n$ en B y $K_j{}^m$, $m \geqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant n$, de modo que se cumplan a) y b). Indicaremos el primer paso para la construcción de q_{n+1}. Apliquemos 1.2 tomando A como álgebra base, B_1 como extensión y p_{n+1} como seminorma de álgebra en A: existe una seminorma de álgebra q en B_1 tal que $q/_A = p_{n+1}$ y $\forall\, x \in B_1$, si $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in A$ y $x_1 \in M_1$:

$$q(x) = p_{n+1}(x_0) + \varrho \sum_i p_{n+1}(f_i{}^1(x_1)) \qquad (\varrho > 0).$$

Pongamos $K^1{}_{n+1} = máx\ (\varrho, K_n{}^1)$ y $\forall\, x \in B_1$:

$$q_{n+1}(x) = p_{n+1}(x_0) + K^1{}_{n+1} \sum_i p_{n+1}(f_i{}^1(x_1))$$

q_{n+1} cumple todo lo que se desea. Para «subir» q_{n+1} de B_m a B_{m+1} se procede de forma análoga. (P) está demostrada.

Sea $n \in N$. Si $x \in B_n$,

$x = x_0 + \ldots + x_n$, $x_j \in M_j$ para $0 \leqslant j \leqslant n$, definamos:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} q_{j+1}(x_j)$$

P_n es una seminorma en B_n y es inmediato que $P_{n+1/B_n} = P_n\ \forall\, n$. Sea p la seminorma en B tal que $p/_{B_n} = P_n \forall\, n$. p es $\mathcal{T}$-contínua por construcción. Supongamos que q sea una seminorma de álgebra $\mathcal{T}$-contínua tal que, para cierto $K > 0$: $p \leqslant K\, q$.
Existe $\nu \in N$ con:

$$q/_A \leqslant c_0\, p_\nu \qquad (c_0 > 0)$$

Demostremos:

$$(P')\ \ \forall\, m \in N \quad \exists\, c_m > 0 \text{ tal que:}$$

$$q/_{B_m} \leqslant c_m\, q_\nu/_{B_m}.$$

Inducción sobre m. Para $m = 0$ basta recordar que $q_\nu/A = p_\nu$ Sea $m > 0$ tal que el enunciado sea cierto para cada n menor estricto que m. Sea $x \in B_m$,

$$x = x_0 + \ldots + x_m, \quad x_j \in M_j \qquad \forall\, j \in \{0,1, \ldots, m\}$$

y escribamos:

$$R = \underset{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq \varrho_j}}{máx} (q(m_i^j)) \quad , \quad c_m = \underset{1 \leq j \leq m}{máx} (c_0, (R\, c_{j-1})/K_\nu^j).$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
q(x) &= q\left(\sum_{j=0}^{m} x_j\right) \leqslant \sum_{j=0}^{m} q(x_j) = \\
&= q(x_0) + \sum_{j=1}^{m} q\left(\sum_{i=1}^{\varrho_j} f_i^j(x_j)\, m_i^j\right) \leqslant \\
&\leqslant c_0\, p_\nu(x_0) + \sum_{j=1}^{m} R \sum_{i=1}^{\varrho_j} q(f_i^j(x_j)) \leqslant \\
&\leqslant c_0\, p_\nu(x_0) + \sum_{j=1}^{m} R \sum_{i=1}^{\varrho_j} c_{j-1}\, q_\nu(f_i^j(x_j)) \leqslant \\
&\leqslant c_m(p_\nu(x) + \sum_{j=1}^{m} K_\nu^j \sum_{i=1}^{\varrho_j} q_\nu(f_i^j(x_j)) = \\
&= c_m\, q_\nu(x).
\end{aligned}$$

(P') está demostrada. Ahora:

$$q_{\nu+1}/_{M_\nu} = P/_{M_\nu} \leqslant K\, q/_{M_\nu} \leqslant K\, c\, q_\nu/_{M_\nu}.$$

Por tanto, $q_{\nu+1}$ y q_ν son equivalentes en M_ν.
Ya que, $\forall\, x \in M_\nu$:

$$q_\nu(x) = K_\nu^\nu \sum_{i=1}^{\varrho_\nu} q_\nu(f_i^\nu(x))$$

$$q_{\nu+1}(x) = K_{\nu+1}^\nu \sum_{i=1}^{\varrho_\nu} q_{\nu+1}(f_i^\nu(x)),$$

es posible aplicar el Lema para concluir que q_ν y $q_{\nu+1}$ son equivalentes en $B_{\nu-1}$. Luego p_ν y $p_{\nu+1}$ son equivalentes en A, lo que no es cierto. De aquí q no puede existir y, finalmente, $\mathcal{T}$ no es m-convexa.

Ejemplo. El interés del teorema radica en que permite construir con facilidad límites inductivos estrictos y numerables de álgebras de Fréchet que no son álgebras m-convexas. El primer ejemplo es de Arosio ([1], ejemplo XII, pág. 358).
Escribamos:

$$C^\infty = \{f \in C(\mathbf{R}) / f \text{ es indefinidamente diferenciable}\},$$

$$B_n = \{f \in C^\infty / f \text{ es periódica de período } 2\pi \cdot 2^n\},$$

$$A = B_0 \text{ y } B = \bigcup_n B_n. \text{ Se comprueba que:}$$

$$B_n \simeq A[x]/_{(x^{2^n} - f_0)}, \quad f_0(t) = e^{it} \qquad \forall\, t \in R.$$

Luego B_n es una extensión finitogenerada, proyectiva y separable de A. Dotando a A de una estructura de álgebra de Fréchet mediante la topología de la convergencia uniforme de la función y sus derivadas obtenemos el ejemplo deseado.

REFERENCIAS

[1] A. AROSIO. *Locally convex inductive limits of normed algebras*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova., Vol 51 (1974), 333-359.

[2] DEMEYER-INGRAHAM. *Separable algebras over commutative rings*. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, n.º 181, (1971).

[3] E. C. INGRAHAM. *Inertial subalgebras of algebras over commutative rings*. Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), 77-93.

[4] ------ *Inertial subalgebras of complete algebras*. J. Algebra 15 (1970), 1-11.

[5] ------ *On the existence and conjugacy of inertial subalgebras*. J. Algebra 31 (1974), 547-556.

[6] J. A. LINDBERG. *Factorization of polynomials over Banach algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 356-368.

[7] J. A. LINDBERG. *Polynomials over complete L.m.-c. algebras and simple integral extensions*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 17 (1972), 47-63.

[8] A. MAGID. *Algebraically separable extensions of Banach algebras*. Michigan Math. J., 21 (1974), 137-143.

[9] ------ *Projective extensions of Banach algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), 154-156.

[10] ------ *Galois Grupoids*. Journal of algebra 18 (1971), 89-102.

[11] E. A. MICHAEL. *Locally multiplicatively convex topological algebras*. Mem. Math. Soc. 11 (1952).

[12] ORZECH-SMALL. *The Brauer group of commutative rings*. Dekker, Vol. 11, (1975).

[13] J. VERDERA. *On finitely generated and projective extensions of Banach algebras*. Aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.

[14] ------ *Sobre el Teorema Principal de Wedderburn*. VI Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas, Santander (1979).

[15] ------ *Extensions finites i projectives d'algebres de Banach*. Tesi. Universitat de Barcelona. (1979).

Joan Verdera Melenchón

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gra Via 585
Barcelona - Spain