CO-H-ESTRUCTURAS SOBRE LA UNION PUNTUAL DE DOS CO-H-ESPACIOS

por

M. CASTELLET-J. L. NAVARRO

Abstract. Given two co-H-spaces (X_1, μ_1) and (X_2, μ_2) we classify the «essentially different» co-H-structures over the wedge $X_2 \vee X_1$ for which the inclusion $i_1 : X_1 \to X_2 \vee X_1$ and the projection $p_2 : X_2 \vee X_1 \to X_2$ become primitive.

1. PRELIMINARES.

Todos los espacios serán considerados con punto base y del tipo de homotopía de un CW-complejo conexo. No distinguiremos entre una aplicación y su clase de homotopía punteada. Las definiciones y notaciones son las usuales; en particular puede consultarse (2) y (6).

Consideraremos únicamente co-H-espacios 1-conexos. Para ellos se tiene ((6), prop. 2.3)

1.1 *Proposición.* Si X_2 es un co-H-espacio 1-conexo, para todo par de espacios Y, Z se tiene una sucesión exacta de lazos

$$0 \longrightarrow [X_2, Y \# Z] \xrightarrow{k_*} [X_2, Y \vee Z] \xrightarrow{i_*} [X_2, Y \times Z] \longrightarrow 0$$

donde $Y \# Z$ indica la fibra homotópica de la inclusión canónica $i : Y \vee Z \to Y \times Z$.

En particular, para $Y = Z = X_1$ un co-H-espacio, dada una aplicación contínua $f : X_2 \to X_1$, se tiene $i_* D(\mu_1 f, (f \vee f)\mu_2) = 0$ y por tanto existe un elemento $\omega = \omega(f; \mu_2, \mu_1) \in [X_2, X_1 \# X_1]$ unívocamente determinado por $k_* \omega = D(\mu_1 f, (f \vee f)\mu_2)$. Podemos considerar ω como una obstrucción a la primitividad de f, ya que ω se anula si y sólo si f es (μ_2, μ_1)-primitiva.

La aplicación

$$\begin{aligned} \omega(\ ; \mu_2, \mu_1) : [X_2, X_1] &\longrightarrow [X_2, X_1 \# X_1] \\ f &\longrightarrow \omega(f; \mu_2, \mu_1) \end{aligned}$$

no es, en general, un homomorfismo de lazos. Sin embargo,

1.2 *Proposición.* Si μ_2 es homotópicamente asociativa y conmutativa, $\omega(\ ; \mu_2, \mu_1)$ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Demostración: Sean $f_1, f_2 \in [X_2, X_1]$. Pongamos $\omega_1 = \omega(f_1 ; \mu_2, \mu_1)$, $\omega_2 = \omega(f_2; \mu_2, \mu_1)$. Se tiene

$$k_*(\omega_1 + \omega_2) = k_* \omega_1 + k_* \omega_2 = (\mu_1 f_1 - (f_1 \vee f_1)\mu_2) +$$
$$+ (\mu_1 f_2 - (f_2 \vee f_2)\mu_2) = \mu_1(f_1 + f_2) - [(f_1 \vee f_1)\mu_2 + (f_2 \vee f_2)\mu_2].$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \vee X_2 \vee X_2 \vee X_2 \arrow[r, "f_1 \vee f_1 \vee f_2 \vee f_2"] \arrow[d, "1 \vee \tau \vee 1"] & X_1 \vee X_1 \vee X_1 \vee X_1 \arrow[d, "1 \vee \tau \vee 1"] \arrow[dr, "\nabla"] & \\
X_2 \arrow[ur, "(\mu_2 \vee \mu_2)\mu_2"] \arrow[dr, "(\mu_2 \vee \mu_2)\mu_2"'] & & & X_1 \vee X_1 \\
 & X_2 \vee X_2 \vee X_2 \vee X_2 \arrow[r, "f_1 \vee f_2 \vee f_1 \vee f_2"'] & X_1 \vee X_1 \vee X_1 \vee X_1 \arrow[ur, "\nabla \vee \nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

donde ∇ es la aplicación codiagonal.

Los subdiagramas del centro y de la derecha conmutan y el de la izquierda conmuta salvo homotopías. Ahora bien, el elemento

$$\nabla (f_1 \vee f_1 \vee f_2 \vee f_2)\ (\mu_2 \vee \mu_2)\mu_2 = \nabla [(f_1 \vee f_1)\mu_2 \vee (f_2 \vee f_2)\mu_2]\mu_2$$

es un representante de $(f_1 \vee f_1)\mu_2 + (f_2 \vee f_2)\mu_2$, mientras que

$$(\nabla \vee \nabla)\ (f_1 \vee f_2 \vee f_1 \vee f_2)\ (\mu_2 \vee \mu_2)\mu_2 =$$
$$= [\nabla(f_1 \vee f_2)\mu_2 \vee \nabla(f_1 \vee f_2)\mu_2]\mu_2$$

es claramente homótopa a $[(f_1 + f_2) \vee (f_1 + f_2)]\, \mu_2$. Así pues, se tiene $k_*(\omega_1 + \omega_2) = k_*\, \omega(f_1 + f_2\,;\, \mu_2, \mu_1)$ que, junto con la inyectividad de k_* y la igualdad $\omega(0;\, \mu_2, \mu_1) = 0$, demuestran la proposición.

1.3 *Observaciones.*

a) *Ker* $\omega(\ ;\, \mu_2, \mu_1)$ coincide con el subgrupo de las aplicaciones (μ_2, μ_1)-primitivas de X_2 en X_1.

b) *Coker* $\omega(\ ;\, \mu_2, \mu_1) = [X_2, X_1 \# X_1]/Im\, \omega(\ ;\, \mu_2, \mu_1)$; así pues, dos elementos θ, $\theta' \in [X_2, X_1 \# X_1]$ representan la misma clase en *Coker* $\omega(\ ;\, \mu_2, \mu_1)$ si y sólo si existe un $h \in [X_2, X_1]$ tal que $\theta = \theta' + \omega(h\,;\, \mu_2, \mu_1)$.

c) A pesar de que $\omega(\ ;\, \mu_2, \mu_1)$ no es en general un homomorfismo de lazos, la igualdad

$$\omega(f_1 + f_2;\, \mu_2, \mu_1) = \omega(f_1;\, \mu_2, \mu_1) + \omega(f_2;\, \mu_2, \mu_1)$$

es cierta si f_1 ó f_2 están en el centro de $[X_2, X_1]$, como resulta al analizar el diagrama de la proposición.

2. La unión puntual de dos co-H-espacios

Dados dos co-Hespacios (X_1, μ_1) y (X_2, μ_2) se puede definir sobre $X_2 \vee X_1$ una comultiplicación μ_0 de manera que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\mu_1"'] & X_2 \vee X_1 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\mu_0"] & X_2 \arrow[d, "\mu_2"] \\
X_1 \vee X_1 \arrow[r, "i_1 \vee i_1"] \arrow[d, "j_1"'] & X_2 \vee X_1 \vee X_2 \vee X_1 \arrow[r, "p_2 \vee p_2"] \arrow[d, "j"] & X_2 \vee X_2 \arrow[d, "j_2"] \\
X_1 \times X_1 \arrow[r, "i_1 \times i_1"] & (X_2 \vee X_1) \times (X_2 \vee X_1) \arrow[r, "p_2 \times p_2"] & X_2 \times X_2
\end{tikzcd}$$

μ_0 es, entonces, la aplicación $\langle (i_2 \vee i_2)\, \mu_2, (i_1 \vee i_1)\, \mu_1 \rangle$, que es una comultiplicación en $X_2 \vee X_1$ ya que $j\mu_0 = \Delta$.

De la definición de μ_0 se sigue que i_1 es (μ_1, μ_0)-primitiva e i_2 es (μ_2, μ_0)-primitiva; entonces, $i_1 p_1 + i_2 p_2$ es la identidad de $X_2 \vee X_1$.

2.1 *Lema.* $\omega(p_2; \mu_0, \mu_2) = 0$.

Demostración: De $(p_2 \vee p_2)\mu_0 i_2 = (p_2 \vee p_2)(i_2 \vee i_2)\mu_2 = \mu_2$, resulta $(p_2 \vee p_2)\mu_0 i_2 p_2 = \mu_2 p_2$; pero $i_2 p_2 = D(1, i_1 p_1)$, de donde $\mu_2 p_2 = (p_2 \vee p_2)\mu_0 D(1, i_1 p_1) = D((p_2 \vee p_2)\mu_0, (p_2 \vee p_2)\mu_0 i_1 p_1) = D((p_2 \vee p_2)\mu_0, (p_2 \vee p_2)(i_1 \vee i_1)\mu_1 p_1) = D((p_2 \vee p_2)\mu_0, 0) = (p_2 \vee p_2)\mu_0$, ya que $p_2 i_1 = 0$.

2.2 *Proposición.* Para todo espacio Y,

$$0 \longrightarrow [X_2, Y] \xrightarrow{p_2^*} [X_2 \vee X_1, Y] \xrightarrow{i_1^*} [X_1, Y] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de lazos y homomorfismos.

Demostración: Puesto que i_1 es (μ_1, μ_0)-primitiva, $C(i_1)$ admite una comultiplicación μ_c tal que la inclusión $q : X_2 \vee X_1 \to C(i_1)$ es (μ_0, μ_c)-primitiva (véase (5)). Además, μ_c está unívocamente determinada por esta propiedad, ya que $C(i_1)$ es 1-conexo y por tanto q^* es inyectiva ($q^{*-1}(0) = 0$ se sigue de que Si_1 admite una inversa homotópica a izquierda y como $[C(i_1), Y]$ es un lazo, por ser $C(i_1)$ 1-conexo, la relación $q^{*-1}(0) = 0$ es equivalente a la inyectividad de q^*). Entonces, si μ'_c es otra comultiplicación sobre $C(i_1)$ tal que $\mu'_c q = (q \vee q)\mu_0$, se tiene $\mu_c q = \mu'_c q$; así pues, $\mu_c = \mu'_c$.

Como $p_2 i_1 = 0$, existe una extensión de p_2

$$k : C(i_1) \longrightarrow X_2$$

tal que $kq = p_2$. Puesto que p_2 es (μ_0, μ_2)-primitiva,

$$0 = \omega(p_2; \mu_0, \mu_2) = \omega(kq; \mu_0, \mu_c) = \omega(k; \mu_c, \mu_2)q$$

ya que q es (μ_0, μ_c)-primitiva. De la inyectividad de q^* se sigue entonces $\omega(k; \mu_c, \mu_2) = 0$.

Además, $kq i_2 p_2 = p_2 i_2 p_2 = p_2$ y p^*_2 inyectiva implican $kq i_2 = 1$. Por otra parte, $qi_2 kq = qi_2 p_2 = qD(1, i_1 p_1) = D(q, 0) = q$ y q^* inyectiva implican $qi_2 k = 1$. Concluimos, pues, que k es una equivalencia homotópica con inversa qi_2 y, por tanto, (X_2, μ_2) y $(C(i_1), \mu_c)$ son co-H-equivalentes, es decir, equivalentes como co-H-espacios. Entonces, la sucesión

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_0) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

es cofibrada y nos induce la sucesión exacta deseada.

En virtud de la biyección

$$[X_2 \vee X_1, Y] \rightleftarrows [X_2, Y] \times [X_1, Y]$$

para todo espacio Y, todo elemento $\phi \in [X_2 \vee X_1, Y]$ admite una presentación $\phi = (\phi i_2, \phi i_1)$. Observemos que $Im\, p_2^* = \{f p_2 | f \in [X_2, Y]\}$, pero $f p_2$ tiene una presentación de la forma $f p_2 = (f, 0)$. Si μ_2 es homotópicamente asociativa y conmutativa, $[X_2, Y]$ es un grupo abeliano para todo Y, y es obvio que los elementos de la forma $(f, 0)$ están en el centro de $[X_2 \vee X_1, Y]$, es decir, $Im\, p_2^* \subset Z[X_2 \vee X_1, Y]$; por lo tanto

$$0 \longrightarrow [X_2, Y] \xrightarrow{p_2^*} [X_2 \vee X_1, Y] \xrightarrow{i_1^*} [X_1, Y] \longrightarrow 0$$

es una extensión central de lazos y homomorfismos.

2.3 *Definición.* Una cofibración $B \xrightarrow{q} E \xrightarrow{p} F$ se dice principal (en el sentido dual de Peterson-Thomas) si

(i) F admite una comultiplicación μ,

(ii) Existe una aplicación $\phi : E \to F \vee E$ tal que

$$\phi(1 \vee p) = p\mu : E \to F \vee F \text{ y } i_B(1 \vee q) = q\phi : B \to F \vee E,$$

(iii) Existe una aplicación $h : F \to E_*$ tal que $\phi\langle h, t_1\rangle \simeq t_2 : E \to E_*$, donde E_* es el espacio obtenido a partir de $E \vee E$ por la identificación $(q(b), *)$ $(*, q(b))$, para todo $b \in B$. Si $\Pi : E \vee E \to E_*$ es la proyección, entonces $t_i = \Pi k_i$ ($k_i : E \to E \vee E$, $i = 1,2$ las inclusiones canónicas).

Ejemplos. a) Para todo espacio A, la cofibración $A \to CA \to SA$ es claramente principal.

b) Dada una aplicación $f : A \to B$, la cofibración inducida por $A \to CA \to SA$ vía f, $B \to C(f) \to SA$ es principal. Tal cofibración se dirá inducida.

2.4 *Proposición.* Si (X_2, μ_2) es co-H-grupo homotópicamente conmutativo, entonces la cofibración

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_0) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

es principal.

Demostración: Sea $\phi : X_2 \vee X_1 \to X_2 \vee X_2 \vee X_1$ la aplicación definida por $\phi i_1 = (1 \vee i_1) i_1$, $\phi i_2 = (1 \vee i_2) \mu_2$; se tiene, entonces

$$\begin{aligned}(1 \vee p_2)\phi &= (1 \vee p_2)\ \langle (1 \vee i_2)\mu_2,\ (1 \vee i_1) i_1 \rangle = \\ &= \langle (1 \vee p_2)\ (1 \vee i_2)\mu_2,\ (1 \vee p_2)\ (1 \vee i_1) i_1 \rangle = \langle \mu_2, 0 \rangle = \\ &= \mu_2 \langle 1,0 \rangle = \mu_2 p_2,\end{aligned}$$

y tendremos dos diagramas estrictamente conmutativos

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \vee X_1 \arrow[d, "1 \vee i_1"] \\ X_2 \vee X_1 \arrow[r, "\phi"] & X_2 \vee X_2 \vee X_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \vee X_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_2"'] & X_2 \vee X_2 \vee X_1 \arrow[d, "1 \vee p_2"] \\ X_2 \arrow[r, "\mu_2"] & X_2 \vee X_2 \end{tikzcd}$$

Consideremos el push-out topológico

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \vee X_1 \arrow[d, "t_2"] \\ X_2 \vee X_1 \arrow[r, "t_1"'] & (X_2 \vee X_1)_* \end{tikzcd}$$

y la extensión central

$$0 \longrightarrow [X_2, (X_2 \vee X_1)_*] \xrightarrow{p_2^*} [X_2 \vee X_1, (X_2 \vee X_1)_*] \xrightarrow{i_1^*} [X_1, (X_2 \vee X_1)_*] \longrightarrow 0.$$

Puesto que $i_1^*(t_1) = i_1^*(t_2)$, existirá un único $m \in [X_2, (X_2 \vee X_1)_*]$ tal que $mp_2 = D(t_2, t_1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\langle m, t_1 \rangle \phi &= \nabla (m\, t_1)\phi = \langle \nabla (m \vee t_1)\ (1 \vee i_2)\ \mu_2, \nabla (m \vee t_1)\ (1 \vee i_1)\, i_1 \rangle = \\ &= \langle \nabla (m \vee t_1 i_2)\ \mu_2,\ \nabla (m \vee t_1 i_1)\ i_1 \rangle = \langle m + t_1 i_2,\ t_1 i_1 \rangle;\end{aligned}$$

pero $t_1 i_1 = t_2 i_1$ y, por otra parte,

$$\begin{aligned}(m + t_1 i_2) p_2 &= m p_2 + t_1 i_2 p_2 = D(t_2, t_1) + t_1 D(1, i_1 p_1) = \\ &= D(t_2, t_1) + D(t_1, t_1 i_1 p_1) = D(t_2, t_1 i_1 p_1),\end{aligned}$$

ya que $D(t_2, t_1) = mp_2$ es un elemento central. Entonces,

$$(m+t_1 i_2)\,p_2 = D(t_2, t_1 i_1 p_1) = D(t_2, t_2 i_1 p_1) = t_2\, D(1, i_1 p_1) = t_2 i_2 p_2$$

y puesto que $p_2{}^*$ es inyectiva, se tiene $m + t_1 i_2 = t_2 i_2$. Así pues,

$$\langle m, t_1\rangle \phi = \langle m + t_1 i_2, t_1 i_1\rangle = \langle t_2 i_2, t_2 i_1\rangle = t_2\langle i_2, i_1\rangle = t_2$$

y obtenemos un diagrama homotópicamente conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_2 \vee X_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "t_2"'] & & X_2 \vee X_2 \vee X_1 \arrow[dl, "\langle m, t_1\rangle"] \\
& (X_2 \vee X_1)_* &
\end{tikzcd} \quad ;$$

en consecuencia,

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_0) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

satisface las condiciones de la definición 2.3.

3. Co-H-EXTENSIONES

Consideremos una sucesión de co-H-espacios y aplicaciones primitivas respecto a las multiplicaciones dadas

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{f_1} (X, \mu) \xrightarrow{f_2} (X_2, \mu_2).$$

3.1 *Definición.* La sucesión anterior se dice una co-H-extensión de (X_1, μ_1) por (X_2, μ_2) si, para todo espacio Y,

$$0 \longrightarrow [X_2, Y] \xrightarrow{f_2^*} [X, Y] \xrightarrow{f^*_1} [X_1, Y] \longrightarrow 0$$

es una extensión central de lazos y homomorfismos.

3.2 *Observacianes.*

a) (X_2, μ_2) es, entonces, necesariamente, un co-H-grupo homotópicamente conmutativo.

b) Para $Y = X_1$, puesto que $f_1{}^*$ es exhaustiva, existirá un $g_1 \in [X, X_1]$ tal que $g_1 f_1 = 1$. Es decir, X_1 es un retracto homotópico de X. Además, si $\bar{g}_1 \in [X, X_1]$ es otro elemento, distinto de g_1, tal que $\bar{g}_1 f_1 = 1$, la exactitud de la sucesión implica la existencia de un único $h \in [X_2, X_1]$ tal que $hf_2 = D(g_1, \bar{g}_1)$.

c) Para $Y = X$, consideremos $D(1, f_1 g_1) \in [X, X]$. Es claro que $D(1, f_1 g_1) f_1 = 0$; por tanto existe un único $g_2 \in [X_2, X]$ tal que $g_2 f_2 = D(1, f_1 g_1)$. Puesto que f_2 es inyectiva, de la relación

$$g_1 g_2 f_2 = g_1 D(1, f_1 g_1) = D(g, g_1 f_1 g_1) = D(g_1, g_1) = 0$$

se sigue $g_1 g_2 = 0$.

3.3 *Ejemplos.*

1) En el apartado 2 hemos visto que si (X_2, μ_2) era un co-H-grupo homotópicamente conmutativo, entonces

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_0) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

era una co-H-extensión.

2) Sea $f : (X, \mu) \to (X_1, \mu_1)$ una aplicación nulhomotopa (obviamente (μ, μ_1)-primitiva). Puesto que X es un co-H-espacio, es claro que la suspensión SX es un co-H-grupo homotópicamente conmutativo. Entonces

$$(X_1, \mu_1) \longrightarrow (C(f), \mu_c) \longrightarrow (SX, \sigma)$$

es una co-H-extensión.

Vamos a ver que los «candidatos» a ser co-H-extensión se reducen esencialmente al tipo del ejemplo 1. En efecto,

3.4. *Proposición.* Si $(X_1, \mu_1) \xrightarrow{f_1} (X, \mu) \xrightarrow{f_2} (X_2, \mu_2)$ es una co-H-extensión, entonces $X \simeq X_2 \vee X_1$.

Demostración: Sean $g_1 \in [X, X_1]$ tal que $g_1 f_1 = 1$ y $g_2 \in [X_2, X]$ único tal que $g_2 f_2 = D(1, f_1 g_1)$; consideremos las aplicaciones

$$\langle g_2, f_1 \rangle : X_2 \vee X_1 \longrightarrow X$$
$$i_2 f_2 + i_1 g_1 : X \longrightarrow X_2 \vee X_1 .$$

Se tiene

$$\langle g_2, f_1\rangle (i_2 f_2 + i_1 g_1) = \langle g_2, f_1\rangle i_2 f_2 + \langle g_2, f_1\rangle i_1 g_1 = g_2 f_2 + f_1 g_1 = 1$$

Inversamente,

$$(i_2 f_2 + i_1 g_1) \langle g_2, f_1\rangle = \langle (i_2 f_2 + i_1 g_1) g_2, (i_2 f_2 + i_1 g_1) f_1\rangle.$$

Ahora bien, puesto que $f_1{}^*$ es un homomorfismo,

$$(i_2 f_2 + i_1 g_1) f_1 = i_2 f_2 f_1 + i_1 g_1 f_1 = i_1,$$

ya que $f_2 f_1 = 0$ y $g_1 f_1 = 1$. En general $g_2{}^*$ no es un homomorfismo, pero

$$\begin{aligned}(i_2 f_2 + i_1 g_1) g_2 f_2 &= (i_2 f_2 + i_1 g_1)\ D(1, f_1 g_1) = \\ &= D(i_2 f_2 + i_1 g_1, (i_2 f_2 + i_1 g_1) f_1 g_1) = \\ &= D(i_2 f_2 + i_1 g_1, i_1 g_1) = i_2 f_2\end{aligned}$$

y como $f_2{}^*$ es inyectiva, $(i_2 f_2 + i_1 g_1) g_2 = i_2$. Así pues, resulta $(i_2 f_2 + i_1 g_1) \langle g_2, f_1\rangle = \langle i_2, i_1\rangle = 1$ y concluimos que $i_2 f_2 + i_1 g_1$ es una equivalencia homotópica.

Observemos que, entonces, $X_2 \vee X_1$ admite una comultiplicación, que denotaremos por $\bar{\mu}$, tal que $i_2 f_2 + i_1 g_1$ es $(\mu, \bar{\mu})$-primitiva. Puesto que $p_2(i_2 f_2 + i_1 f_1) = f_2$, de (3.1) de (6) se sigue que p_2 es $(\mu, \bar{\mu})$-primitiva, y de $(i_2 f_2 + i_1 g_1) f_1 = i_1$ se sigue que i_1 es $(\mu_1, \bar{\mu})$-primitiva, ya que es composición de aplicaciones primitivas. Tenemos, pues, un diagrama homotópicamente conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \mu) \arrow[dr, "f_2"] \arrow[dd, "\simeq", "i_2 f_2 + i_1 g_1"'] & \\
(X_1, \mu_1) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & & (X_2, \mu_2) \\
 & (X_2 \vee X_1, \bar{\mu}) \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde todas las flechas son primitivas respecto a las comultiplicaciones dadas y, por tanto, la sucesión inferior es una co-Hextensión «esencialmente» igual a la superior. Aparece, pues, de forma natural el concepto de co-Hextensiones equivalentes.

3.5 *Definición.* Una co-H-extensión

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{\bar{f}_1} (\bar{X}, \bar{\mu}) \xrightarrow{\bar{f}_2} (X_2, \mu_2)$$

se dirá equivalente a una dada

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{f_1} (X, \mu) \xrightarrow{f_2} (X_2, \mu_2)$$

si existe una aplicación $(\mu, \bar{\mu})$-primitiva $g : X \to \bar{X}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "f_2"] \arrow[dd, "g"] & \\
X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "\bar{f}_1"'] & & X_2 \\
& \bar{X} \arrow[ur, "\bar{f}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

es homotópicamente conmutativo.

De la definición se sigue que g es, necesariamente, una equivalencia homotópica. En efecto, al igual que en la demostración de (2.2) se tiene que (X_2, μ_2) es co-H-equivalente a $(C(f_1), \mu_c)$ y a $(C(\bar{f}_1), \bar{\mu}_c)$ y, puesto que X_1 es un retracto homotópico de X y de $\bar{X}$, la sucesión exacta larga de homología escinde en sucesiones exactas cortas, para todo n,

$$\begin{tikzcd}
& & \widetilde{H}_n(X) \arrow[dr, "f_{2*}"] \arrow[dd, "g_*"] & & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_n(X_1) \arrow[ur, "f_{1*}"] \arrow[dr, "\bar{f}_{1*}"'] & & \widetilde{H}_n(X_2) \arrow[r] & 0 \\
& & \widetilde{H}_n(\bar{X}) \arrow[ur, "\bar{f}_{2*}"'] & &
\end{tikzcd}$$

y, por el lema de los cinco, g induce isomorfismos en homología; así, pues, es una equivalencia homotópica, al ser los espacios CW-complejos 1-conexos.

3.6 *Proposición.* La relación anterior definida en el conjunto de las co-H-extensiones de (X_1, μ_1) por (X_2, μ_2) es de equivalencia.

Demostración: Las propiedades reflexiva y transitiva son obvias y será suficiente probar la simétrica. Como g es una equivalencia homotópica $(\mu, \bar{\mu})$-primitiva,

$$g^* : [\bar{X}, Y] \longrightarrow [X, Y]$$

es un isomorfismo de lazos, para todo espacio Y. En particular, para $Y = X$, existe un único $h \in [\bar{X}, X]$ tal que $hg = 1$. Pero, entonces, $ghg = g$ y, tanto, $gh = 1$. Además, puesto que $\omega(h; \bar{\mu}, \mu)g = \omega(hg; \mu, \mu) = \omega(1; \mu, \mu) = 0$, $\omega(h; \bar{\mu}, \mu) = 0$. Bastará, pues, probar la conmutatividad homotópica del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "\bar{f}_1"'] & & X_2 \\
 & \bar{X} \arrow[uu, "h"'] \arrow[ur, "\bar{f}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

pero $h\bar{f}_1 = hgf_1 = f_1$ y $f_2 h = \bar{f}_2 gh = \bar{f}_2$.

Denotemos por $CHE(X_1, \mu_1; X_2, \mu_2)$ el conjunto cociente y observemos que, de la observación previa a (3.5), se sigue que en cada clase de co-H-extensiones existe un representante de la forma

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2) .$$

4. Clasificación de co-H-extensiones

Toda co-H-extensión

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{f_1} (X, \mu) \xrightarrow{f_2} (X_2, \mu_2)$$

induce una extensión central

$$0 \longrightarrow [X_2, X_1 \# X_1] \xrightarrow{f^*_1} [X, X_1 \# X_1] \xrightarrow{f^*_2} [X_1, X_1 \# X_1] \longrightarrow 0 ;$$

elegido un $g_1 \in [X, X_1]$ tal que $g_1 f_1 = 1$ obtenemos un elemento bien determinado $\omega(g_1; \mu, \mu_1) \in [X, X_1 \# X_1]$. Como f_1 es (μ_1, μ)-primitiva, por (3.1) de (6) se tiene

$$\omega(g_1; \mu, \mu_1) f_1 = \omega(g_1 f_1; \mu, \mu) = \omega(1; \mu, \mu) = 0;$$

existe, pues, un elemento $\theta \in [X_2, X_1 \# X_1]$ unívocamente determinado por $\theta f_2 = \omega(g_1; \mu, \mu_1)$.

(4.1). Si tenemos una co-H-extensión equivalente a la anterior

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{\bar{f}_1} (\bar{X}, \bar{\mu}) \xrightarrow{\bar{f}_2} (X_2, \mu_2),$$

existe, entonces, una equivalencia homotópica $(\bar{\mu}, \mu)$-primitiva

$$h : (X, \bar{\mu}) \longrightarrow (X, \mu)$$

tal que $h\bar{f}_1 = f_1$ y $f_2 h = \bar{f}_2$.

Tomemos $\bar{g}_1 = g_1 h \in [X, X_1]$; entonces $\bar{g}_1 \bar{f}_1 = g_1 h \bar{f}_1 = g_1 f_1 = 1$. Análogamente como antes existirá, pues, un elemento $\bar{\theta} \in [X_2, X_1 \# \# X_1]$ unívocamente determinado por $\bar{\theta}\bar{f}_2 = \omega(\bar{g}_1; \bar{\mu}, \mu_1)$. Pero

$$\theta \bar{f}_2 = \theta f_2 h = \omega(g_1; \bar{\mu}, \mu) h = \omega(g_1 h; \mu, \mu_1) = \bar{\theta}\bar{f}_2$$

y como $\bar{f}_2^*$ es inyectiva, se sigue que $\theta = \bar{\theta}$.

(4.2). Supongamos que en la co-H-extensión inicial elegimos ahora otro $g'_1 \in [X, X_1]$ tal que $g_1' f_1 = 1$, distinto de g_1; existirá, entonces, un $\theta' \in [X_2, X_1 \# X_1]$ unívocamente determinado por $\theta' f_2 = \omega(g'_1; \mu, \mu_1)$. Por 3.2.b) existirá, entonces, un elemento $h \in [X_2, X_1]$ unívocamente determinado por $hf_2 = D(g_1, g'_1)$ tal que

$$\theta f_2 = \omega(g_1; \mu, \mu_1) = \omega(g'_1 + hf_2; \mu, \mu_1) = \omega(g'_1; \mu, \mu_1) + \omega(h; \mu_2, \mu_1) f_2$$

ya que hf_2 es un elemento central y f_2 es (μ, μ_2)-primitiva. Resulta, pues,

$$\theta f_2 = \theta' f_2 + \omega(h; \mu_2, \mu_1) f_2 = \theta' + \omega(h; \mu_2, \mu_1) f_2$$

y la inyectividad de f_2^* implica $\theta = \theta' + \omega(h; \mu_2, \mu_1)$. Es decir θ y θ' representan una misma clase $[\theta] \in Coker\ \omega(\ ; \mu_2, \mu_1)$.

Podemos, pues, definir una aplicación

$$\Phi : CHE\,(X_1, \mu_1; X_2, \mu_2) \longrightarrow Coker\ \omega(\ ; \mu_2, \mu_1)$$

tal que $\Phi[(X_1, \mu_1) \xrightarrow{f_1} (X, \mu) \xrightarrow{f_2} (X_2, \mu_2)] = [\theta]$, que por (4.1) está bien definida y por (4.2) es independiente de la retracción definida para f_1.

En particular, si consideramos la co-H-extensión

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_0) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

definida al principio del §2, le asociaremos un único $\theta \in [X_2, X_1 \# X_1]$ tal que $\theta p_2 = \omega(p_1; \mu_0, \mu_1)$. Pero, puesto que

$$\begin{aligned}(p_1 \vee p_1)\,\mu_0 &= \langle (p_1 \vee p_1)\,(i_2 \vee i_2)\,\mu_2, (p_1 \vee p_1)\,(i_1 \vee i_1)\,\mu_1 \rangle = \\ &= \langle 0, \mu_1 \rangle = \mu_1 \langle 0, 1 \rangle = \mu_1 p_1,\end{aligned}$$

p_1 es (μ_0, μ_1)-primitiva y, por tanto, $\omega(p_1; \mu_0, \mu_1) = 0$. De la inyectividad de p_2^* se sigue, entonces, que $\theta = 0$.

(4.3). Dado $\theta \in [X_2, X_1 \# X_1]$, tomemos $X = X_2 \vee X_1$ y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\mu_1"'] & X_2 \vee X_1 \arrow[r, "p_2"] & X_2 \arrow[d, "\mu_2"] \arrow[dll, "k\theta"'] \\
X_1 \vee X_1 \arrow[r, "i_1 \vee i_1"'] \arrow[d, "j_1"'] & X_2 \vee X_1 \vee X_2 \vee X_1 \arrow[r, "p_2 \vee p_2"'] \arrow[d, phantom, "j"] & X_2 \vee X_2 \arrow[d, "j_2"] \\
X_1 \times X_1 \arrow[r, "i_1 \times i_1"'] & (X_2 \vee X_1) \times (X_2 \vee X_1) \arrow[r, "p_2 \times p_2"'] & X_2 \times X_2
\end{tikzcd}$$

Definimos una aplicación

$$\mu_\theta : X_2 \vee X_1 \longrightarrow (X_2 \vee X_1) \vee (X_2 \vee X_1)$$

tal que $\mu_\theta i_1 = (i_1 \vee i_1)\,\mu_1$ y $\mu_\theta i_2 = (i_2 \vee i_2)\,\mu_2 - (i_1 \vee i_1)\,k\,\theta$. Puesto que $j\mu_\theta$ es la aplicación diagonal (ya que $j_1 k = 0$), μ_θ es una comultiplicación sobre $X_2 \vee X_1$.

Es obvio, a partir de la definición, que i_1 es (μ_1, μ_θ)-primitiva. Por otra parte, $(p_2 \vee p_2)\,\mu_\theta = \langle \mu_2, 0 \rangle = \mu_2 \langle 1, 0 \rangle = \mu_2 p_2$; así pues, también p_2 es (μ_θ, μ_2)-primitiva. Es, pues, claro que

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_\theta) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

es una co-H-extensión, que llamaremos «asociada a θ».

(4.4). Supongamos que θ y $\bar{\theta}$ representan una misma clase en *Coker* $\omega(\ ;\mu_2,\mu_1)$; es decir, existe un $h \in [X_2, X_1]$ tal que $\theta = \bar{\theta} + \omega(h;\mu_2,\mu_1)$. Entonces, para $\bar{\theta}$ tendremos definida, análogamente que para θ, una co-H-extensión

$$(X_1,\mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_{\bar{\theta}}) \xrightarrow{p_2} (X_2,\mu_2).$$

Consideremos el diagrama homotópicamente conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \vee X_1 \arrow[dd, "\gamma"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & & X_2 \\
& X_2 \vee X_1 \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\gamma = \langle i_2 - i_1 h, i_1\rangle$. Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned}
\mu_{\bar{\theta}}\gamma &= \langle (i_2 \vee i_2)\mu_2 - (i_1 \vee i_1)k\bar{\theta},\ (i_1 \vee i_1)\mu_1\rangle\ \langle i_2 - i_1 h, i_1\rangle = \\
&= \langle (i_2 \vee i_2)\mu_2 - (i_1 \vee i_1)k\bar{\theta} - (i_1 \vee i_1)\mu_1 h,\ \ (i_1 \vee i_1)\mu_1\rangle = \\
&= \langle (i_2 \vee i_2)\mu_2 - (i_1 \vee i_1)k\bar{\theta} - (i_1 \vee i_1)k\omega - (i_1 \vee i_1)\,(h \vee h)\mu_2, (i_1 \vee i_1)\mu_1\rangle = \\
&= \langle (i_2 \vee i_2)\mu_2 - (i_1 \vee i_1)k\theta - (i_1 h \vee i_1 h)\mu_2,\ (i_1 \vee i_1)\mu_1\rangle
\end{aligned}$$

Pero, por otra parte

$$\begin{aligned}
(\gamma \vee \gamma)\mu_\theta &= \langle (\gamma \vee \gamma)\ (i_2 \vee i_2)\mu_2 - (\gamma \vee \gamma)\ \ (i_1 \vee i_1)k\theta,\ (\gamma \vee \gamma)\ (i_1 \vee i_1)\mu_1\rangle = \\
&= \langle ((i_2 - i_1 h) \vee (i_2 - i_1 h))\mu_2 - (i_1 \vee i_1)k\theta,\ (i_1 \vee i_1)\mu_1\rangle,
\end{aligned}$$

ya que $\gamma i_1 = i_1$ y $\gamma i_2 = i_2 - i_1 h$. Ahora bien, puesto que μ_2 es homotópicamente asociativa y conmutativa, aplicando (1.2) resulta

$$((i_2 - i_1 h) \vee (i_2 - i_1 h))\mu_2 = (i_2 \vee i_2)\mu_2 - (i_1 h \vee i_1 h)\mu_2$$

Así pues, $\mu_{\bar{\theta}}\gamma = (\gamma \vee \gamma)\mu_\theta$ y γ es $(\mu_\theta, \mu_{\bar{\theta}})$-primitiva.

Es fácil comprobar que $\langle i_2 + i_1 h, i_1\rangle$ y $\langle i_2 - i_1 h, i_1\rangle$ son equivalencias homotópicas inversas. Hemos pues probado que si θ y $\bar{\theta}$ representan la misma clase $[\theta]$ en *Coker* $\omega(\ ;\mu_2,\mu_1)$, las co-H-extensiones asociadas a θ y a $\bar{\theta}$ son equivalentes.

Tendremos, pues, una aplicación bien definida

$$\Psi : Coker\ \omega(\ ;\mu_2, \mu_1) \longrightarrow CHE(X_1, \mu_1; X_2, \mu_2)$$

tal que

$$\Psi[\theta] = [(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_\theta) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)].$$

(4.5). Dado $[\theta] \in Coker\ \omega(\ ;\mu_2, \mu_1)$, puesto que $(p_1 \vee p_1)\,\mu_\theta = -\,k\,\theta\,p_2 + \mu_1 p_1$, es claro que $\omega(p_1; \mu, \mu_1) = \theta\,p_2$, y por tanto $\Phi\,\Psi\,[\theta] = [\theta]$.

Recíprocamente, dado un elemento de $CHE(X_1, \mu_1; X_2, \mu_2)$, por la observación previa a (3.5) podemos tomar un representante de la forma

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

Sea $[\theta]$ la imagen por $\Phi(\theta \in [X_2, X_1 \# X_1]$ unívocamente determinada por $\theta p_2 = \omega(p_1; \mu, \mu_1))$ y μ_θ la comultiplicación sobre $X_2 \vee X_1$ «asociada a θ», definida en (4.3).

Se tiene, entonces, $\mu_\theta i_1 = (i_1 \vee i_1)\,\mu_1 = \mu i_1$. Por otra parte, mediante un simple cálculo y aplicando la proposición (3.1) de (6), obtenemos $\mu_\theta i_2 p_2 = (i_2 p_2 \vee i_2 p_2)\,\mu\ - k\,\omega(i_1 p_1; \mu_1, \mu_1)$. Puesto que $i_2 p_2 + i_1 p_1 = 1$ y $i_2 p_2$ es un elemento central, por 1.3.c) resulta $\omega(i_1 p_1; \mu, \mu) = -\,\omega(i_2 p_2; \mu, \mu)$ y, por tanto

$$\mu_\theta i_2 p_2 = (i_2 p_2 \vee i_2 p_2)\,\mu + k\,\omega(i_2 p_2; \mu, \mu) = \mu i_2 p_2$$

de donde $\mu_\theta i_2 = \mu\, i_2$ en virtud de la inyectividad de p_2^*. Así pues,

$$\mu_\theta = \langle \mu_\theta i_2, \mu_\theta i_1 \rangle = \langle \mu\, i_2, \mu\, i_1 \rangle = \mu \langle i_2, i_1 \rangle = \mu$$

y concluimos que $\Psi\,\Phi = 1$. Podemos, pues, enunciar.

4.6. *Teorema.* Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de co-H-extensiones de (X_1, μ_1) por (X_2, μ_2) módulo la relación de equivalencia definida, $CHE(X_1, \mu_1; X_2, \mu_2)$, y el conúcleo de la aplicación $\omega(\ ;\mu_2, \mu_1) : [X_2, X_1] \to [X_2\ X_1 \# X_1]$.

En consecuencia, queda inducida una estructura de grupo abeliano en $CHE(X_1, \mu_1; X_2, \mu_2)$, donde el elemento neutro es precisamente la clase de la co-H-extensión

$$(X_1, \mu_1) \xrightarrow{i_1} (X_2 \vee X_1, \mu_0) \xrightarrow{p_2} (X_2, \mu_2)$$

definida en el §2. Notemos que está caracterizada por hacer (μ_0, μ_1)-primitiva a p_1; por tanto p_1^* es un homomorfismo y la extensión central es escindible a derecha, es decir

$$(p_2^*, p_1^*) : [X_2 \vee X_1, Y] \cong [X_2, Y] \times [X_1, Y]$$

como lazos algebraicos.

4.7 *Observación.* Si μ es una comultiplicación en X y $\mu' \simeq \mu$, es obvio que μ' es otra comultiplicación. La clase homotopía de μ se dirá una co-H-estructura sobre X.

Dos co-H-estructuras sobre X, representadas por sendas comultiplicaciones μ_1 y μ_2, se dirán equivalentes si existe una autoequivalencia homotópica (μ_1, μ_2)-primitiva de X. Obviamente, de 3.1 de (6) se sigue que la relación definida en el conjunto de las co-H-estructuras sobre X es de equivalencia. El cociente resulta ser el conjunto de co-H-estructuras «esencialmente distintas» sobre X.

Si μ_1 y μ_2 representan co-H-estructuras «esencialmente distintas», entonces (X, μ_1) y (X, μ_2) no son equivalentes como co-H-espacios. Dicho de otra manera, inducen estructuras de lazos no isomorfos en $[X, Y]$.

Observemos, entonces que clasificar co-H-extensiones de (X_1, μ_1) por (X_2, μ_2) no es otra cosa que clasificar las co-H-estructuras «esencialmente distintas» sobre $X_2 \vee X_1$ que hagan primitivas a i_1 y a p_2, respecto a co-H-estructuras μ_1 y μ_2, sobre X_1 y X_2 respectivamente, fijadas previamente.

4.8 *Ejemplo.* Es conocido que si $n \geqslant 2$, entonces S^n admite una única co-H-estructura σ_n. Puesto que S^n es $(n-1)$-conexo, $S^n \# S^n$ será $(2n-2)$-conexo. Así pues, para $m \leqslant 2n-2$, $[S^m, S^n \# S^n]_| \cong \Pi_m(S^n \# S^n) = 0$ y, por tanto, $CHE(S^n, S^m) = 0$, es decir, $S^m \vee S^n$ admite una única co-H-estructura σ tal que $i_n : S^n \longrightarrow S^m \vee S^n$ es (σ_n, σ)-primitiva y $p_m : S^m \vee S^n \longrightarrow S^m$ es (σ, σ_m)-primitiva. En particular, $CHE(S^n, S^n) = 0$ para todo $n \geqslant 2$.

BIBLIOGRAFIA

(1) M. Castellet : «*On H-structures*». Prepint (1979).

(2) I. Berstein-P. J. Hilton: «*Category and generalized Hopf invariant*». Illinois J. Math. 4 (1960).

(3) A. Copeland: «*Binary operations on sets of mapping classes*». Mich. Math. J. 6 (1959).

(4) T. Ganea: «*Cogroups and suspensions*». Inv. Math. 9 (1970).

(5) P. J. Hilton-G. Mislin-J. Roitberg: «*On co-H-spaces*». Comment. Math. Helv. 53 (1978).

(6) J. L. Navarro: «*On the existence and classification of co- H-structures*». Collect. Math. 30 (1979).

M. Castellet - J. L. Navarro

Universitat Autònoma de Barcelona
Universidad de Zaragoza