# UN PROBLEMA DE TRANSMISION NO LINEAL DE TIPO HIPERBOLICO-PARABOLICO

por

EVA SÁNCHEZ MAÑES

## 1. — INTRODUCCIÓN

Sean $\Omega^{(1)}$ y $\Omega^{(2)}$ dos conjuntos abiertos de $R^n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\Omega^{(2)}$ es un conjunto abierto acotado cuya frontera $\Gamma$ es una variedad de dimensión $n-1$ y clase $C^\infty$

2) $\Omega^{(1)}$ es un abierto no acotado cuya frontera $\Gamma$ es común con $\Omega^{(2)}$ y tal que $\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \Gamma = R^n$

$$\Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)} = \emptyset$$

Sean $Q^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ los abiertos cilíndricos $\Omega^{(i)} \times ]0, T[$ con $T < +\infty$ y sean $f_i(x, t)$, $x = (x_1 \dots x_n)$ dos funciones dadas definidas sobre $Q^{(i)}$ Llamaremos $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$ a la solución, si existe y es única, del problema clásico

$$P\ (1) \begin{cases} D^2_{tt}\, u^{(1)} + \Delta^2\, u^{(1)} + \lambda u^{(1)} = f_1 \text{ en } \Omega^{(1)} \times ]0, T[ \\ - D_t\, u^{(2)} - \sum_{i=1}^{n} D_i(|D_i\, u^{(2)}|^{p-2}\, D_i\, u^{(2)}) = f_2 \text{ en } \Omega^{(2)} \times ]0, T[ \\ p \geqslant 2,\ \lambda \geqslant 0 \end{cases}$$

con las condiciones siguientes:

— iniciales y finales

(2) $u^{(1)}(x, 0) = D_t\, u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, T) = 0$

— de contorno, $\forall\ t \in ]\, 0, T[$.

Si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en donde $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ son conjuntos abiertos en $\Gamma$ disjuntos, variedades de clase $C^\infty$ y dimensión $n-1$, entonces

(3) $u^{(1)}/_{\Gamma_2} = D_n u^{(1)}/_{\Gamma_2} = D_t u^{(1)}/_{\Gamma_2} = D_n(D_t u^{(1)})/_{\Gamma_2} = u^{(2)}/_{\Gamma_2} = u^{(2)}/_{\Gamma_2} = 0$

(4) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} u^{(1)}(x, t) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} D_t\, u^{(1)}(x, t) =$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \Delta u'^{1)}(x, t) = \lim_{|x|\to+\infty} \Delta(D_t\, u^{(1)}(x, t)) = 0$$

— de transmisión en $\Gamma_1$, $\forall\, t \in ]0, T[$

$$(5)_1 \begin{cases} D_t\, u^{(1)}/_{\Gamma_1} = u^{(2)}/_{\Gamma_1} \\ D_n\,(D_t\, u^{(1)})/_{\Gamma_1} = D_n\, u^{(1)}/_{\Gamma_1} = 0 \\ D_n(\Delta u^{(1)})/_{\Gamma_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} |D_i\, u^{(2)}|^{p-2}\, D_i\, u^{(2)} \cos\,(n, x_i)/_{\Gamma_1} \end{cases}$$

o bien

$$(5)_2 \begin{cases} D_n\,(D\, u^{(1)})/_{\Gamma_1} = u^{(2)}/_{\Gamma_1} \\ D_t\, u^{(1)}/_{\Gamma_1} = u^{(1)}/_{\Gamma_1} = 0 \\ \Delta u^{(1)}/_{\Gamma_1} = \sum\limits_{i=1}^{u} |D_i\, u^{(2)}|^{p-2}\, D_i\, u^{(2)} \cos\,(n, x_i)|_{\Gamma_1} \end{cases}$$

Por otra parte, sea $\Omega_m \subset R^n$, $m = 1, 2, \ldots$ un abierto acotado, que podemos elegir como el complementario de $\Omega^{(2)} \cup \Gamma$ en una esfera de radio $r_m$ que contiene en su interior a $\Omega^{(2)}$ centrada en un punto fijo y tal que $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = +\,\infty$

Llamaremos $u_m = (u^{(1)}{}_m, u^{(2)}{}_m)$ a la solución, si existe y es única, del problema clásico

$$(6) \begin{cases} D^2{}_{tt}\, u^{(1)}{}_m + \Delta^2\, u^{(1)}{}_m + \lambda\, u^{(1)}{}_m = R_m f_1 \text{ en } \Omega_m \times ]0, T[ \\ -\, D_t\, u^{(2)}{}_m - \sum\limits_{i=1}^{n} D_i\,(|D_i\, u^{(2)}{}_m|^{p-2}\, D_i\, u^{(2)}{}_m) = f_2 \text{ en } \Omega^{(2)} \times ]0, T[ \\ p \geqslant 2,\ \lambda \geqslant 0 \end{cases}$$

donde $R_m f_1$ representa la restricción a $\Omega_m \times ]0, T[$ de $f_1$, con las condiciones:

— iniciales y finales

(7) $u^{(1)}{}_m(x, 0) = D_t\, u^{(1)}{}_m(x, 0) = u^{(2)}{}_m(x, T) = 0$

— de contorno $\forall\, t \in ]0, T[$

(8) $u^{(1)}{}_m/_{\Gamma_2} = D_t\, u^{(1)}{}_m/_{\Gamma_2} = D_n\, u^{(1)}{}_m/_{\Gamma_2} = D_n\, (D_t\, u^{(1)}{}_m)/_{\Gamma_2} = u^{(2)}{}_m/_{\Gamma_2} = 0$

(9) $u^{(1)}{}_m/_{\Gamma_{3m}} = D_n\, u^{(1)}{}_m/_{\Gamma_{3m}} = D_t\, u^{(1)}{}_m/_{\Gamma_{3m}} = D_n\, (D_t\, u^{(1)}{}_m)/_{\Gamma_{3m}} = 0$

siendo $\Gamma_{3m}$ la superficie esférica de radio $r_m$ correspondiente

— de transmisión en $\Gamma_1$, $\forall\, t \in\, ]0, T[$

Las mismas condiciones $(5)_1$ ó $(5)_2$ aplicadas a $u_m$.

Nos proponemos demostrar que la solución $u$ del problema $P$ existe y es única en un sentido débil, que especificaremos más adelante, que la solución $u_m$ del problema $P_m$ también existe y es única en el mismo sentido que $u$ para cada valor de $m = 1, 2...$ y que si prolongamos por cero a todo $\Omega^{(1)} \times\, ]0, T[$ cada una de las soluciones $u^{(1)}$, la sucesión resultante converge en un cierto espacio hacia la solución $u$ del problema $P$.

También estudiaremos el tipo de dicha convergencia

Para todo ello, se hacen necesarias las siguientes etapas

1) Formulación de un teorema de existencia y unicidad para las soluciones de los problemas $P_m$ y $P$

2) Acotaciones o «estimaciones a priori» sobre las soluciones $u_m$ o sobre sus prolongaciones por cero a todo $\Omega^{(1)} \times\, ]0, T[$

3) Paso al límite en dichas soluciones cuando $m \to +\infty$

Diversos autores han contribuido al estudio de los problemas de transmisión para operadores lineales elípticos de segundo orden y de orden superior, entre ellos, citamos a Campanato, Stampacchia, Lions, Schechter.

Problemas lineales de tipo parabólico e hiperbólico-parabólico se encuentran estudiados en Lions [4] Gisvard-Baouendi [1] y Talenti-Pagani [1].

En cuanto a problemas de transmisión relativos a operadores no lineales citaremos en particular el problema de transmisión de tipo hiperbólico-parabólico estudiado por Cohen y Rubinov, problema que aparece en Biología (Ver Lions [3]).

Una gran variedad de problemas de transmisión lineales y no lineales son estudiados en Lions [2] dentro del marco de los problemas «raides».

El problema de transmisión que resolvemos aquí tiene su origen en el trabajo de Lobo [1]. Se estudia en dicho trabajo un problema de transmisión de tipo parabólico asociado a operadores no lineales, pseudomonótonos de distinto orden, y tal que la parabolicidad cambia de sentido en las dos ecuaciones que constituyen el sistema en el que tiene lugar la transmisión. En el problema de transmisión que constituye el presente trabajo hemos considerado una de las ecuaciones de tipo hiperbólico asociada a un operador lineal de cuarto orden, mientras que la otra ecuación es parabólica retrógrada, asociada a un operador no lineal, concretamente el operador laplaciano generalizado.

El hecho de considerar la parte parabólica de nuestro problema como retrógrada, nos ha condicionado de manera definitiva a la hora de estudiar el tipo de condiciones de contorno y de transmisión asociadas, para llegar a obtener resultados de existencia y unicidad. En efecto, aunque en un principio nos hemos planteado un problema de transmisión de tipo hiperbólico-parabólico con condiciones de transmisión no diferenciales (siguiendo la denominación de Lions [4]) a lo largo de nuestro trabajo los espacios funcionales que nos han permitido llegar a una buena formulación en términos de análisis funcional, abstracto, y a unos métodos de resolución apropiados (regularización elíptica y parabólica) nos han llevado a considerar condiciones en la frontera (concretamente en las paredes del cilindro $\Omega^{(2)} \times ]0\ T[$) en las que intervienen junto con las derivadas respecto de la normal a $\Gamma$, las derivadas con relación a $t$.

Queremos hacer notar también, en relación con los métodos empleados, que el método de Galerkin que tan útil se ha revelado en los problemas no lineales, no es aplicable en este tipo de problemas, debido al carácter parabólico retrógrado de una de las ecuaciones.

## 2. — Formulación de un teorema de existencia y unicidad para las soluciones de los problemas $P$ y $P_m$.

Es evidente que, según que elijamos las condiciones $(5)_1$ o $(5)_2$ tendremos dos problemas de transmisión diferentes.

Cualquiera de los problemas clásicos $P$ o $P_m$ así planteados, no sabemos si tiene solución, ni siquiera si ésta es única. Para resolverlos, procederemos de la forma siguiente:

Sustituimos el problema clásico por un nuevo problema que llamaremos débil. La existencia y unicidad de solución de este problema débil nos lleva a un teorema de análisis abstracto. Después, veremos en qué sentido están relacionados ambos problemas. Es decir, bajo qué condiciones la existencia y unicidad de solución en uno de ellos (débil) entrañan existencia y unicidad en el otro (clásico).

## Resolución del problema $P$.

### 2.1. — *Planteamiento del problema débil o problema $P'$*

*El marco funcional*

Denominaremos $\overline{D}(\Omega^{(i)})$ $i = 1, 2$ al espacio formado por las restricciones a $\Omega^{(i)}$ de las funciones de $D(R^n)$. Llamaremos $\mathring{D}(\overline{\Omega}^{(i)})$ a los subconjuntos de funciones de $D(\overline{\Omega}^{(i)})$ que se anulan en un entorno de $\Gamma_2$.

Emplearemos además las notaciones:

si $u \in \mathring{D}(\overline{\Omega}^{(1)})$ llamaremos

$$|||u|||_{V_1} = (||u||^2_{L^2(\Omega^{(1)})} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega^{(1)})})^{1/2}$$

Evidentemente esta norma equivale a

$||u||_{V_1} = (\lambda ||u||^2_{L^2(\Omega^{(1)})} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega^{(1)})})^{1/2}$ con $\lambda > 0$ si $u \in \mathring{D}(\overline{\Omega}^{(2)})$ tomaremos

$$||u||_{V_2} = \left( \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega^{(2)}} |D_i u|^P \right)^{1/P}$$

definimos entonces los siguientes espacios

$$(10)_1 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathring{V}_1 & = \{u \in \mathring{D}(\overline{\Omega}^{(1)}) / \gamma_1 u_1 = 0 \text{ en } \Gamma_1\} \\ \mathring{W} & = \{(u_2, u_3) \in \mathring{V}_1 \times \mathring{D}(\overline{\Omega}^{(2)}) / \gamma_0 u_2 = \gamma_0 u_3 \text{ en } \Gamma_1\} \\ \mathring{V} & = \mathring{V}_1 \times \mathring{W} \\ V_1 & = \text{completado de } \mathring{V}_1 \text{ respecto de la norma } |||u|||_{V_1} \\ V_2 & = \text{completado de } \mathring{D}(\overline{\Omega}^{(2)}) \text{ respecto de la norma } ||u||_{V_2} \\ V & = \text{completado de } \mathring{V} \text{ respecto de} \\ & \quad ||u||_V = |||u_1|||_{V_1} + |||u_2|||_{V_1} + ||u_3||_{V_2} \end{array} \right.$$

o bien

$$
(10)_2 \left\{ \begin{array}{l}
\mathring{V}_1 = \{u \in \mathring{D}(\bar{\Omega}^{(1)}) / \gamma_0 u_1 = 0 \text{ en } \Gamma_1\} \\
\mathring{W} = \{(u_2 \, u_3) \in \mathring{V}_1 \times \mathring{D}(\bar{\Omega}^{(2)}) / \gamma_1 u_2 = \gamma_0 u_3 \text{ en } \Gamma_1\} \\
\mathring{V} \ = \mathring{V}_1 \times \mathring{W} \\
V_1 = \text{completado de } \mathring{V}_1 \text{ respecto de } |||u|||_{V_2} \\
V_2 = \text{completado de } \mathring{D}(\bar{\Omega}^{(2)}) \text{ respecto de } ||u||_{V_1} \\
V \ = \text{completado de } \mathring{V} \text{ respecto de} \\
\qquad ||u||_V = |||u_1|||_{V_1} + |||u_2|||_{V_1} + ||u_3||_{V_2}
\end{array} \right.
$$

Es evidente que, en cualquiera de los dos casos, $V$ coincide con $V_1 \times W$ siendo $W$ el completado de $\mathring{W}$ respecto de la norma

$$||u||_W = |||u_2|||_{V_1} + ||u_3||_{V_2}$$

Los espacios $V_1$, $V_2$ y $V$ son espacios de Banach separables y reflexivos, lo mismo que sus duales. Además, $V$ es un espacio de Hilbert respecto del producto escalar:

$$(u, v)_{V_1} = \lambda(u, v)_{L^2(\Omega^{(1)})} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega^{(1)})} \equiv a_\lambda(u, v)$$

siendo $\lambda > 0$ el número que aparece en el enunciado del problema $P$.

En el caso $\lambda = 0$, $a_0(u \, v)$ no define un producto escalar en $V_1$, ya que la no acotación de $\Omega^{(1)}$ nos impide aplicar la desigualdad de Poincaré. Tomaremos entonces:

$$(11) \qquad a_k(u, v) = (u, v)_{V_1} \text{ con } k > 1/2$$

Sean también los espacios

$$H_1 = L^2(\Omega^{(1)}) \qquad H_2 = L^2(\Omega^{(2)}) \qquad H = V_1 \times H_1 \times H_2$$

desde luego, $H$ es un espacio de Hilbert, respecto de la topología producto.

Si identificamos $H$ con su dual, y denotamos por $V'$ al dual abstracto de $V$, se tiene que

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

en donde el signo $\hookrightarrow$ representa la inclusión densa.

Emplearemos la notación $L^2(W)$ para representar al espacio $L^2(0\,T; W)$. Finalmente, elegimos los espacios

$D(]0\,T[; V) = D(]\,0\,T[; V_1) \times D(]0\,T[; W)$ en donde $V_1$ y $W$ vendrán representados por $(10)_1$ ó $(10)_2$, según que resolvamos el problema de transmisión $(5)_1$ ó $(5)_2$.

Tomaremos:

$\mathcal{V}$ = compleción de $D(]0\,T[; V)$ respecto de

$$\|u\|_{\mathcal{V}} = \|u_1\|_{L^2(V_1)} + \|u_2\|_{L^2(V_1)} + \|u_3\|_{L^p(V_2)}\,. \tag{12}$$

Desde luego, $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach separable y reflexivo, lo mismo que su dual $\mathcal{V}'$.

Sea ahora

$$\mathcal{H} = L^2(V_1) \times L^2(H_1) \times L^2(H_2)$$

que es un espacio de Hilbert respecto de la topología producto.

Identificando $\mathcal{H}$ con su dual, se tiene que

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'.$$

*Definición del Operador A*

En los espacios $V_1$ y $V_2$ respectivamente, definimos las formas

$$a_\lambda(u_1, v_1) = \int_{\Omega^{(1)}} \Delta u_1\, \Delta v_1 + \lambda \int_{\Omega^{(1)}} u_1\, v_1 \quad , \quad u_1, v_1 \in V_1$$

$$a_2(u_2, v_2) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega^{(2)}} |D_i\, u_2|^{p-2}\, D_i\, u_2\, D_i\, v_2 \quad , \quad u_2, v_2 \in V_2$$

Ambas formas definen dos operadores $A_\lambda$ y $A_2$ tales que

$$\langle A_\lambda\, u_1, v_1\rangle_{V'_1 V_1} = a_\lambda(u_1, v_1)$$

$$\langle A_2\, u_2, v_2\rangle_{V'_2 V_2} = a_2(u_2, v_2)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $a_2$ verifica la acotación:

$$|a_2(u_2, v_2)| \leqslant \|u_2\|_{V_2}^{p-2}\, \|v_2\|_{V_2}\,. \tag{13}$$

A partir de $A_1$ y $A_2$ definimos dos nuevos operadores $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ como sigue:

$$\langle \mathcal{A}_\lambda u_1, v_1 \rangle_{L^2(V'_1)\, L^2(V_1)} = \int_0^T dt\, a_\lambda(u_1(t), v_1(t))$$

$$\langle \mathcal{A}_2 u_2, v_2 \rangle_{L^{p'}(V'_2)\, L^p(V_2)} = \int_0^T dt\, a_2(u_2(t), v_2(t)) \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Finalmente, podemos definir un operador

$$\mathcal{A}\colon L^2(V_1) \times L^2(V_1) \times L^p(V_2) \to L^2(V_1) \times L^2(V'_1) \times L^{p'}(V'_2)$$

en la forma

$$\mathcal{A}u = \begin{pmatrix} \lambda I & -I & 0 \\ \mathcal{A}_\lambda & \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & (e^{\lambda t})^{p-2} \mathcal{A}_2 - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

En el caso $\lambda = 0$ tomaremos como $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}u = \begin{pmatrix} kI & -I & 0 \\ \mathcal{A}_0 & kI & 0 \\ 0 & 0 & (e^{kt})^{p-2} \mathcal{A}_2 - kI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{14 bis}$$

siendo $k$ la constante mencionada en (11)

Llamaremos operador $A$ a la restricción del operador $\mathcal{A}$ al espacio $\mathcal{V}$.

*Definición del operador $A\,\varepsilon$*

Dado un número real $\varepsilon > 0$, conservando las notaciones anteriores, definimos el operador $A_\varepsilon$ en la forma siguiente

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda I & -I & 0 \\ \mathcal{A}_\lambda & \lambda I + \varepsilon \mathcal{A}_\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (e^{\lambda t})^{p-2} \mathcal{A}_2 - \lambda I \end{pmatrix} \text{si } \lambda > 0 \tag{15}$$

si $\lambda = 0$:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} kI & -I & 0 \\ A_0 & kI + \varepsilon(A_0 + kI) & 0 \\ 0 & 0 & (e^{kt})^{p-2} A_2 - kI \end{pmatrix} \qquad (15\text{ bis})$$

*El operador L*

Si $u \in \mathcal{V}, u = (u_1\, u_2\, u_3)$ llamaremos $u'$ al vector $(u'_1\, u'_2\, u'_3)$, donde estas derivadas se consideran en el sentido de las distribuciones con valores vectoriales.

*Definición* 1

Llamaremos $\mathcal{W}$ al espacio vectorial

$$\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{V}/u' \in L^2(V_1) \times L^2(V'_1) \times L'(V^{p'}{}_2)\}$$

que es un espacio de Banach separable y reflexivo respecto de la norma

$$||u||_{\mathcal{W}} = ||u||_{\mathcal{V}} + ||u'||_{L^2(V_1) \times L^2(V'_1) \times L^{p'}(V'_2)}$$

En los lemas siguientes enunciaremos algunas propiedades de los elementos de este espacio.

*Lema* 1 El espacio $D([0\ T]\ V)$ con $V$ dado por $(10)_1$ ó $(10)_2$ es denso en $\mathcal{W}$

*Lema* 2 Si $u \in \mathcal{W}$, entonces $u$ es igual a una función contínua de $[0\ T]$ en $H$ salvo posible modificación en un conjunto de medida nula Además $\mathcal{W} \hookrightarrow C^0([0\ T]; H)$.

La demostración de ambos lemas es añáloga a la de los lemas 2.2 y 2.3 de Lobo [1]

*Definición* 2

Denotaremos por $D(L)$ al espacio

$$D(L) = \{u \in \mathcal{V}/u' \in L^2(V_1) \times L^2(V'_1) \times L^{p'}(V'_2), u_1(0) = \\ = u_2(0) = u_3(T) = 0\}$$

que es un espacio vectorial bien definido en virtud del lema 2
Sobre $D(L)$ definimos los siguientes operadores

$$\begin{aligned} \bar{L}: D(L) &\to L^2(V_1) \times L^2(V'_1) \times L^{p'}(V'_2) \\ u &\to \bar{L}u = (u'_1, u'_2, -u'_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L: D(L) &\to \mathcal{V}' \\ u &\to Lu = \bar{L}u|_{\mathcal{V}} \text{ (restricción a } \mathcal{V}) \end{aligned}$$

Entonces en $D(L)$ consideramos la siguiente norma

$$||u||_{D(L)} = ||u||_{\mathcal{V}} + ||Lu||_{L^2(V_1) \times L^2(V'_1) \times L^{p'}(V'_2)} \tag{16}$$

que convierte a $D(L)$ en un espacio de Banach
Además se tiene que:

*Lema* 3 $D(L)$ es denso en $\mathcal{V}$

*El semigrupo* $G(S)$

Sea $G(S)$ el semigrupo de traslaciones en $t$ a la derecha (cf. Lions [3]) y sea $-\Lambda$ su generador infinitesimal.

De las definiciones anteriores se deduce que

$$u \in D(L) \Rightarrow u_1 \in D(\Lambda)$$

Tomaremos

$$\bar{G}(s) = \begin{pmatrix} G(s) & 0 & 0 \\ 0 & G(s) & 0 \\ 0 & 0 & G(s) \end{pmatrix}$$

que es un semigrupo sobre $\mathcal{V}$ y sobre $\mathcal{H}$. Llamaremos-$\bar{\Lambda}$ a su generador infinitesimal y representaremos por $D(\bar{\Lambda}; \mathcal{H})$ a su dominio en $\mathcal{H}$.

*Formulación débil del problema de transmisión* (Problema $P'$)

Para cada $g = (0, f_1, f_2)$ demostrar la existencia y unicidad de un elemento $u \in D(L)$ tal que satisface la ecuación

$$Lu + Au = g \text{ en } \mathcal{V}'$$

Antes de resolver este problema, veamos en qué forma se relaciona su solución con la del problema clásico planteado en un principio.

## 2.2. — *Demostración de que el problema débil engloba al problema clásico*

Escribiremos el problema $P$ en una forma equivalente con ayuda del cambio de variable

$$v_1 = u_1 e^{-\lambda t} \quad v_2 = D.u_1 e^{-\lambda t} \quad v_3 = u_2 e^{-\lambda t} .$$

Enunciamos la proposición siguiente:

*Proposición* 2

Sean $f_1 \in L^2(]0\, T[ \times \Omega^{(1)}), f_2 \in L^p(]0\, T[; \Omega^{(2)})$ y sea $v = (v_1\, v_2\, v_3)$ solución del problema $P$ junto con sus condiciones iniciales y finales, de contorno en $\Gamma_2$ y de transmisión en $\Gamma_1$, $A\, t \in ]0, T[$.

Supongamos además que $v \in C^2([0\, T]; V)$. Entonces $v$ es solución del problema $P'$

La demostración de esta proposición sigue los pasos usuales en este tipo de problemas, y no la daremos aquí.

## 2.3. — *Demostración de la existencia y unicidad de solución del problema $P'$*

En lugar de resolver directamente el problema, vamos a plantearnos otro problema que llamaremos «regularizado parabólico» del anterior y que denotaremos $P_\varepsilon'$.

Si $\varepsilon > 0$ es un número real fijo, demostrar que existe una solución $\omega_\varepsilon \in \mathcal{V} \cap D(L)$ (no necesariamente única) del problema

$$L\, \omega_\varepsilon + A_\varepsilon\, \omega_\varepsilon = g \text{ en } \mathcal{V}' \qquad g = (0, f_1, f_2) \in \mathcal{V}'.$$

Para ello, aplicaremos el segundo teorema de existencia por regularización elíptica de Lions [3].

En lo que sigue, demostraremos que los operadores $A_\varepsilon$ y $L$ cumplen las condiciones exigidas en este teorema

*Proposición* 3

Los operadores $A$ y $A_\varepsilon$ definidos en (14) y (15) respectivamente son acotados en $\mathcal{V}$.

*Demostración*

Teniendo en cuenta que $L^2(V_1) \hookrightarrow L^2(H_1)$ y que $L^p(V_2) \hookrightarrow L^2(H_2)$, $p \geq 2$ lo que implica que

$$||u||_{L^2(H_1)} \leqslant C_1(T)\, ||u||_{L^2(V_1)} \quad \forall\, u \in L^2(V_1) \quad , \quad C_1(T) > 0$$
$$||u||_{L^2(H_2)} \leqslant C_2(T)\, ||u||_{L^p(V_2)} \quad \forall\, u \in L^p(V_2) \quad , \quad C_2(T) > 0$$

y el resultado (13) se obtiene después de un sencillo cálculo:

$$||A_\varepsilon u||_{V'} \leqslant \alpha_1\, ||u_1||_{L^2(V_1)} + \alpha_2\, ||u_2||_{L^2(V_1)} + \\ + \alpha_3\, ||u_3||^{p-1}_{L^p(V_2)} + \alpha_4\, ||u_3||_{L^p(V_2)}\,. \tag{18}$$

en donde hemos tomado

$$\alpha_1 = 1 + \lambda \qquad \alpha_2 = 1 + \varepsilon + \lambda C^2{}_1(T) \qquad \alpha_3 = (e^{\lambda T})^{p-2} \qquad \alpha_4 = \lambda C^2{}_2(T)$$

La desigualdad (18) es válida para el operador $A$ con $\alpha_2 = 1 + \lambda C^2{}_1(T)$ y en el caso $\lambda = 0$, aparece $k$ en lugar de $\lambda$.

*Proposición* 4

Los operadores $A$ y $A_\varepsilon$ son pseudomonótonos en $D(L)$.

*Demostración*

Pseudomonotonía del operador $A_\varepsilon$.

Aunque haremos todos los cálculos para el caso $\lambda > 0$, los resultados se mantienen también cuando $\lambda = 0$.

Sea $A_\varepsilon = A_\varepsilon{}^{(1)} + A_\varepsilon{}^{(2)}$ con

$$A_\varepsilon{}^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda I & -I & 0 \\ \mathcal{A}_\lambda & \lambda I + \varepsilon\, \mathcal{A}_\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_\varepsilon{}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (e^{\lambda t})^{p-2}\, \mathcal{A}_2 - \lambda I \end{pmatrix}$$

El operador $A_\varepsilon{}^{(1)}$ es monótono, hemicontínuo y acotado, según se comprueba fácilmente. En el caso $\lambda = 0$ es necesario emplear la hipótesis $k > 1/2$ para obtener la monotonía, ya que $\mathcal{A}_0$ no es el producto escalar en $V_1$. Demostraremos que el operador $A_\varepsilon{}^{(2)}$ es pseudomonótono en $D(L)$.

A partir del teorema 5.1 pág. 58 de Lions [3] y del teorema de Kondrasow (Neças [1] pág. 106), se comprueba que

i) La inyección de $V_2$ en $L^2(\Omega^{(2)})$ es totalmente contínua

ii) Si $\{u_j\} \subset D(L)$ es una sucesión tal que $u_j \to u$ débilmente en $V$, $u \in D(L)$, $Lu_j \to Lu$ débilmente, entonces $u_j^{(3)} \to u^{(3)}$ fuertemente en $L^2(H_2)$.

Por otra parte:

$$\limsup \langle A_\varepsilon^{(2)} uj, uj - u\rangle \leqslant 0 \Rightarrow \limsup \langle \mathcal{A}_2\, u_j^{(3)}, u_j^{(3)} - u^{(3)}\rangle \leqslant 0$$

Además, es sencillo comprobar que $\mathcal{A}_2$ es una aplicación de dualidad relativa a $\varnothing(r) = r^{p-1}$ respecto de la norma en $L^p(V_2)$. Esto implica que $\mathcal{A}_2$ es un operador pseudomonótono en $L^p(V_2)$, así que se tiene

$$\liminf \langle \mathcal{A}_2\, u_j^{(3)}, u_j^{(3)} - v^{(3)}\rangle \geqslant \langle \mathcal{A}_2\, u^{(3)}, u^{(3)} - v^{(3)}\rangle \qquad \forall\, v \in D(L)$$

y operando se llega a

$$\liminf \langle A^{(2)} uj, uj - v\rangle_{V'V} \geqslant \langle A^{(2)} u, u - v\rangle_{V'V} \qquad \forall\, v \in D(L)$$

De la Nota 2.12 pág. 189 de Lions [3], resulta finalmente la pseudomonotonía de $A_\varepsilon$. La pseudomonotonía de $A$ se obtiene de la misma forma.

La coercividad de $A_\varepsilon$ se deriva de las desigualdades

— si $\lambda > 0$

$$\langle A_\varepsilon u, u\rangle_{V'V} \geqslant \lambda\, \|u_1\|^2_{L^2(V_1)} + \varepsilon\, \|u_2\|^2_{L^2(V_1)} + \|u_3\|^p_{L^p(V_2)} - \\ - \lambda\, C(T)\, \|u_3\|^2_{L^p(V_2)} \tag{19}$$

— si $\lambda = 0$

$$\langle A_\varepsilon u, u\rangle_{V'V} \geqslant k\alpha\, \|u_1\|^2_{L^2(V_1)} + \varepsilon\, \|u_2\|^2_{L^2(V_1)} + \|u_3\|^p_{L^p(V_2)} - \\ - k\, C(T)\, \|u_3\|^2_{L^p(V_2)}\,. \tag{20}$$

La demostración de que $L$ cumple las condiciones exigidas en el teorema de existencia sigue los mismos pasos que la demostración análoga que aparece en Lobo [1] pág. 243 y ss., así que no la repetiremos aquí.

Debido a todo lo anterior queda establecido el siguiente teorema:

*Teorema* 1

Conservando las notaciones anteriores, se tiene que:
Fijado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un elemento $u_\varepsilon \in D(L) \cap \mathcal{V}'$ tal que

$$Lu_\varepsilon + A_\varepsilon u_\varepsilon = g \text{ en } \mathcal{V}' \tag{21}$$

El paso final consiste en demostrar que, cuando $\varepsilon \to 0$, la solución $u_\varepsilon$ de (21) converge hacia un elemento $u \in D(L) \cap \mathcal{V}$ que es solución del problema $P'$.

*Estimaciones a priori*

Imponemos la condición $g \in D(\bar{\Lambda}; \mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Multiplicando en ambos miembros de (21) por $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$, y teniendo en cuenta que $\langle Lu_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle \geqslant 0$ y las desigualdades (19), (20), tras un sencillo cálculo resultan las acotaciones

$$||u_\varepsilon^1||_{L^2(V_1)} \leqslant C_1 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{22}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\, ||u_\varepsilon^2||_{L^2(V_1)} \leqslant C_2 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{23}$$

$$||u_\varepsilon^3|| \leqslant C_3 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{24}$$

sean los vectores

$$\omega = \left( \frac{G^*(s) - I}{s} \frac{G(s) - I}{s} u_\varepsilon^1, \frac{G^*(s) - I}{s} \frac{G(s) - I}{s} u_\varepsilon^2, \right.$$
$$\left. \frac{G^*(s) - I}{s} \frac{G(s) - I}{s} u_\varepsilon^3 \right)$$

$$v = \left( \frac{G(s) - I}{s} u_\varepsilon^1, \frac{G(s) - I}{s} u_\varepsilon^2, \frac{G(s) - I}{s} u_\varepsilon^3 \right)$$

Multiplicamos por $\omega$ en (21) y puesto que las componentes de $L$ conmutan con $G$ y con $G^*$ resulta

$$\alpha_1 ||v_1||^2_{L^2(V_1)} + \alpha_2 ||v_2||^2_{L^2(H_1)} + C(T) ||v||^p_{L^2(H_2)} - \alpha_3 ||v_3||^2_{L^2(H_2)} \leqslant$$
$$\leqslant \left( \left\| \frac{G(s) - I}{s} f_1 \right\|_{L^2(H_1)} + \left\| \frac{G(s) - I}{s} f_2 \right\|_{L^2(H_2)} \right) (||v_2||_{L^2(H_1)} + ||v_3||_{L^2(H_2)})$$

Puesto que $g \in D(\bar{A}; \mathcal{H})$, el primer paréntesis del segundo miembro tiene un límite finito e independiente de $\varepsilon$ cuando $s \to 0$, así que es sencillo ver que $||v_1||_{L^2(V_1)}$ se mantiene acotado por una constante independiente de $\varepsilon$ cuando $s \leqslant s_0$. Entonces

$$\lim_{s\to 0} ||v_1||_{L^2(V_1)} = \lim_{0\to s} \left\| \frac{G(s) - I}{s} u_\varepsilon^1 \right\|_{L^2(V_1)} \leqslant C_4 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

resultando la acotación

$$||(u_\varepsilon^1)'||_{L^2(V_1)} \leqslant C_4 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 .$$

Multiplicando en ambos miembros de (21) por el vector $(u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^1, 0, 0) \in \mathcal{V}$, se obtiene:

$$||u_\varepsilon^2||_{L^2(V_1)} \leqslant C_5 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 . \tag{25}$$

Y las acotaciones (22), (24) y (25) proporcionan la *primera estimación a priori*

$$||u_\varepsilon||_{\mathcal{V}} \leqslant k_1 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 . \tag{26}$$

De (23) se deduce que si $\sqrt{\varepsilon}\ ||u_\varepsilon^2||_{L^2(V_1)}$ está acotada cuando $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, también está acotada la expresión $\varepsilon\ ||u_\varepsilon^2||_{L^2(V_1)}$ si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Así que, la desigualdad (18) permite concluir que $||A_\varepsilon u_\varepsilon||_{\mathcal{V}'}$ está acotada por una constante independiente de $\varepsilon$ cuando $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Hemos obtenido así la *segunda estimación a priori*

$$||A_\varepsilon u_\varepsilon||_{\mathcal{V}'} \leqslant k_2 \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 . \tag{27}$$

En la igualdad (21) multiplicamos por $J^{-1} L u_\varepsilon$ siendo $J$ la aplicación de dualidad relativa $a \varnothing (x) = x$. Operando se llega a:

$$||L u_\varepsilon||_{\mathcal{V}'} \leqslant ||g||_{\mathcal{V}'} + ||A_\varepsilon u_\varepsilon||_{\mathcal{V}'}$$

y teniendo en cuenta (27) se obtiene la *tercera estimación a priori*

$$||L u_\varepsilon||_{\mathcal{V}'} \leqslant k_3 \quad \text{si} \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 .$$

*Paso al límite cuando* $\varepsilon \to 0$

Se deduce de (26) que puede extraerse una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ tal que $u_\varepsilon \to u$ débilmente en $\mathcal{V}$ cuando $\varepsilon \to 0$

De la misma forma

$$||A_t u_\varepsilon||_{V'} \leqslant k_2 \Rightarrow A_\sigma u_\varepsilon \rightarrow \chi_1 \text{ débilmente en } \mathcal{V}' \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$
$$||L u_\varepsilon||_{V'} \leqslant k_3 \Rightarrow L u_\varepsilon \rightarrow \chi_2 \text{ débilmente en } \mathcal{V}' \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0 .$$

Por lo tanto, si en la ecuación (21) multiplicamos por un elemento $v \in \mathcal{V}$ arbitrario y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$\chi_1 + \chi_2 = g \text{ en } \mathcal{V}'.$$

Del teorema 3.81-C de Taylor [1] deducimos que $u \in D(L)$ y que $\chi_2 = L u$.

Calculando vemos que $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \langle A u_\varepsilon, u_\varepsilon - u \rangle \leqslant 0$ y de la pseudomonotonía de $A$ se deduce que

$$\langle g - Lv, u - v \rangle_{\mathcal{V}'\mathcal{V}} \geqslant \langle A u, u - v \rangle_{\mathcal{V}'\mathcal{V}} \quad \forall\, v \in D(L)$$

Tomando $v = u - \theta\, \omega, \theta > 0, \omega \in D(L)$ y pasando al límite cuando $\theta \rightarrow 0$ resulta $A u = g - L v$ en $\mathcal{V}'$.

Queda demostrado el teorema siguiente:

*Teorema* 2

Fijado cualquier elemento $g \in D(\bar{A};\, \mathcal{H})$, existe un elemento $u \in D(L) \cap \mathcal{V}$ solución del problema $P'$.

*Unicidad de la solución del problema $P'$*

El problema $P'$ es equivalente al que se obtiene haciendo el cambio de variable $v = e^{\lambda t}\, u$, que es de la forma

$$L u + \bar{A} u = \bar{f} \text{ en } \mathcal{V}'.$$

Pero la solución de este problema si existe, es única ya que $\bar{A}$ es un operador estrictamente monótono.

Este razonamiento no es válido en el caso $\lambda = 0$, porque $\Omega^{(1)}$ no es un dominio acotado.

El paso último, que consiste en demostrar que si la solución del problema $P'$ es suficientemente regular, entonces es solución del problema $P$, sigue un razonamiento análogo al que aparece en Lobo [1] pág. 253 y ss. así que no lo repetiremos aquí.

EL PROBLEMA $P_m$

Se trata de asegurar la existencia y unicidad de solución $u_m$ del problema $P_m$ para cada valor de $m$. Después, hemos de prolongar por cero a todo $\Omega^{(1)}$ la primera componente de dicha solución, obteniéndose así una nueva sucesión que, según demostraremos, converge en un cierto espacio hacia la solución $u$ del problema $P$. Sin embargo, no es necesario hacer una exposición de los cálculos efectuados para resolver $P_m$ porque, salvo alguna pequeña modificación, siguen una marcha análoga a los anteriormente expuestos.

3.— PASO AL LÍMITE EN LAS SOLUCIONES $u_m$

Si $u \in V_m$ (espacio en el que hemos resuelto $P_m$), llamaremos $\widetilde{u}$ a la prolongación por cero de $u$ al dominio $\Omega^{(1)}$. Desde luego, $\widetilde{u} \in V$ y además

$$||u||_{V_m} = ||\widetilde{u}||_V$$

También:

$$V = \overline{\underset{m}{U}\, \widetilde{D(L_m)}} = \overline{\underset{m}{U}\, \widetilde{D(L_m^*)}}$$

es decir, dado $u \in V$ existe una sucesión $\{u_m\}$, $u_m \in D(L_m)$ tal que $u_m \to u$ en $V$. Estos elementos $u_m$ pueden tomarse muy regulares, de forma que $L_m u_m \in V$.

Volvamos ahora a nuestro problema. Como es usual, es necesario obtener en primer lugar algunas acotaciones o estimaciones a priori.

Sea $u_{\varepsilon m}$ la solución del problema regularizado parabólico de $P_m$:

$$L_m u_{\varepsilon m} + A_{\varepsilon m} u_{\varepsilon m} = g_m \quad \text{en} \quad V'_m \tag{28}$$

que, cuando $\varepsilon \to 0$, converge hacia $u_m$, solución de $P_m$, para cada valor de $m$.

Multiplicando en (28) por $u_{\varepsilon m}$ y repitiendo todos los cálculos que hicimos en el problema $P'$, resulta que todas las acotaciones que se obtienen para los componentes de $u_{\varepsilon m}$ son válidas para unas constantes que no dependen de $\varepsilon$ ni de $m$.

Es decir

$$||u_{\varepsilon m}||_{V_m} \leqslant k \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \quad , \quad \forall\, m\,.$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$, resulta la

*Primera estimación a priori*

$$||u_m||_{V_m} \leqslant k \quad \forall\, m$$

o bien

$$||\widetilde{u}_m||_V \leqslant k \quad \forall\, m\,.$$

Pero $A$ es un operador acotado así que

*Segunda estimación a priori*

$$||A\, \widetilde{u}_m||_{V'} \leqslant k' \quad \forall\, m\,.$$

Queda pues asegurada la existencia de una subsucesión que seguiremos denotando $\{\widetilde{u}_m\}$ tal que

$$\widetilde{u}_m \to u \text{ débilmente en } V$$
$$A\, \widetilde{u}_m \to \chi_1 \text{ débilmente en } V'\,.$$

Puesto que $u_m \in D(L_m)$ es solución de $P'_m$, se verificará que:

$$\langle L_m\, u_m,\, v\rangle_{V'_m V_m} + \langle A_m\, u_m,\, v\rangle_{V'_m V_m} = \langle g_m,\, v\rangle_{V'_m V_m}$$

cualquiera que sea $v \in V_m$.

Tomemos en particular $v \in D(L^*_{m_0})$ con la condición de que sea muy regular, y entonces, para $m \geqslant m_0$ tendremos

$$\langle u_{,m}\, L^*_m\, v\rangle_{V'_m V_m} + \langle A_m\, u_m,\, v\rangle_{V'_m V_m} = \langle g_m,\, v\rangle_{V'_m V_m}$$

o bien

$$\langle u,\, L^*_m\, v\rangle_{V'_m V_m} + \langle A\, \widetilde{u},\, \widetilde{v}\rangle_{V' V} = \langle \widetilde{g}_m,\, \widetilde{v}\rangle_{V' V}\,.$$

Prolongando por cero el primer sumando y teniendo además en cuenta que

$$\widetilde{L_m^* v} = L^* \widetilde{v}$$

obtenemos

$$\langle \widetilde{u}_m, \widetilde{L_m^* v} \rangle + \langle A \widetilde{u}_m, \widetilde{v} \rangle = \langle \widetilde{g}_m, \widetilde{v} \rangle .$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$

$$\langle u_m, L_m^* \widetilde{v} \rangle_{\mathcal{V}' \mathcal{V}} + \langle \chi v, \widetilde{v} \rangle_{\mathcal{V}' \mathcal{V}} = \langle g, \widetilde{v} \rangle_{\mathcal{V}' \mathcal{V}}$$

igualdad que puede escribirse en la forma:

$$\langle u, L^* \widetilde{v} \rangle_{\mathcal{V}' \mathcal{V}} = \langle g - \chi_1, \widetilde{v} \rangle_{\mathcal{V}' \mathcal{V}}$$

y que es válida para todo $\widetilde{v}$ perteneciente a un conjunto denso en $\mathcal{V}$ según las observaciones que hicimos al principio de este razonamiento. Entonces, teniendo en cuenta que $D(L^*)$ es denso en $\mathcal{V}$, concluimos que $u \in D(L)$

$$L u = g - \chi_1 \text{ en } \mathcal{V}' .$$

Habremos obtenido el resultado que buscábamos si demostramos que $\chi_1 = A u$ pero estos cálculos son una repetición de los que aparecen en una proposición análoga en el problema $P$.

## BIBLIOGRAFIA

BAOUENDI Y GRISVARD. *Sur une équation d'évolution changeant de type*. Journal of Functional Analysis and Applications (1969).

LIONS [1]. *Contribution à un problème de M. Picone*. Ann. Mat. Pura Appl. 4 XLI (1955).

LIONS [2]. *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*. Lecture notes in Mathematics. Springer-Verlag (1973).

LIONS [3]. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites*. Dunod. París (1969).

LIONS [4]. *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer-Verlag (1961).

LIONS-MAGENES [5]. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 1. Dunod. París (1968).

LOBO [1]. *Ciertos problemas de transmisión sobre operadores no lineales de 2.º y 4.º orden parabólicos que cambian de tipo*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Tomo LXVI. Cuaderno 2.º (1972).

NEÇAS [1]. *Les méthodes directes dans la théorie des équations ellyptiques*. Masson. Paris (1967).

PAGANI-TALENTI [1]. *On a forward-backward parabolic equation*. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) Vol. XC. pp. 1-58 (1971).

TALENTI [1]. *Equations paraboliques En-avant-En-arrière*. Colloque International CNRS pp. 292-304.

TROISI [1]. *Su un problem di transmissione*. Ricerche Mat. 11 pp. 24-50 (1962).

TROISI [2]. *Sui problemi di transmissione per due equazioni ellitiche di ordine diverso*. Ricerche Mat. 12 pp. 216-247 (1963).

TROISI [3]. *Sulle regolarizazioni delle soluzioni di taluni problemi di transmissione*. Ricerche Mat. 13 pp. 281-316 (1964).

Eva Sánchez Mañes.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid.
Ciudad Universitaria. Cantoblanco.
Madrid.