LAS ALGEBRAS DE DENJOY-CARLEMAN ANALITICAS

por

JOAQUIM BRUNA

Abstract. — Classes E_M of C^∞-functions of a real variable defined by growth restrictions on its derivatives are studied in [4] in the non quasi-analytic case. In this paper we study the analytic case, i.e. the case all functions in E_M are entire. We first give a necessary and sufficient condition in order that the fact $f \in E_M$ can be stated in terms of the Taylor development of f at 0. After this we see that the growth restrictions also hold for the complex derivatives and, with an auxiliary hypothesis, we show that E_M can be described in terms of radial growth. In fact, the classes E_M turn out to be algebras of entire functions of minimal type with respect to a given weight. From this point on, results concerning closed ideals, systems of generators, can be obtained using the same techniques as those that can be found in the literature in case of normal type.

1. — INTRODUCCIÓN Y PRELIMINARES.

$M = (M_n)$ designará una sucesión de números positivos tal que

a) Es logarítmicamente convexa: $M_0 = 1$ y $M_n^2 \leqslant M_{n+1} M_{n-1}$ para $n \geqslant 1$.

b) Existen constantes A, $H > 0$ tales que $M_{n+1} \leqslant A H^n M_n$, $n \geqslant 0$.

La clase E_M se define (cf. [2]) como la de las funciones f de clase C^∞ en $\mathbf{R}$, a valores complejos, tales que para todo $r > 0$ y todo $\epsilon > 0$ se tiene

$$(1) \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant C(\epsilon, r)\, \epsilon^n M_n \quad \text{para} \quad |x| \leqslant r, \quad \text{para todo } n$$

donde $C(\epsilon, r)$ es una cierta constante. Es inmediato comprobar que E_M es un espacio de Fréchet con la topología definida por las seminormas

$$p_{r,\varepsilon}(f) = \sup_n \frac{||f^{(n)}||_r}{\epsilon^n M_n}$$

donde $||g||_r = \sup \{|g(x)|, |x| \leqslant r\}$. Usando un criterio de Sebastião e Silva ([9], pg. 282) es fácil ver también que E_M es un espacio de Schwartz.

La hipótesis (a) implica que $M_k M_{n-k} \leqslant M_n$ para $0 \leqslant k \leqslant n$ y ésta, con la fórmula de Leibnitz, implica que $p_{r,2\varepsilon}(fg) \leqslant p_{r,\varepsilon}(f) p_{r,\varepsilon}(g)$ para $f, g \in E_M$, es decir, E_M es un álgebra de Fréchet.

La relación (a) implica también que $M_n^{1/n}$ es creciente. Es claro que si $\sup M_n^{1/n} < \infty$, entonces E_M coincide con la clase correspondiente a $M_n = 1$. Esta puede tratarse directamente y a partir de ahora supondremos pues que $\lim M_n^{1/n} = \infty$. Entonces, para $t > 0$,

$$\lambda_M(t) = \sup_n \frac{t^n}{M_n}$$

es finito. La hipótesis (a) resulta ser equivalente (cf. [16]) a

$$M_n = \sup_{t>0} \frac{t^n}{\lambda_M(t)} \tag{2}$$

Para $T \in E'_M$, se define su transformada de Fourier mediante

$$\hat{T}(z) = T(x \longmapsto \exp(i x z)), \quad z \in \mathbf{C}.$$

La función $x \longmapsto \exp(i x z)$ está en E_M de manera que tiene sentido la definición de $\hat{T}$. Es inmediato comprobar que $\hat{T}$ es una función entera y que $\hat{T}'(z) = T(x \longmapsto i x \exp(i x z))$.

El siguiente teorema está demostrado en [19]:

1.1. *Teorema.* — La transformación de Fourier $T \longmapsto \hat{T}$ establece un isomorfismo topológico entre el dual fuerte de E_M y el espacio H_M de las funciones enteras F tales que

$$||F||_{r,\varepsilon} = \sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M(|z|/\epsilon) \exp r|Im\, z|} < \infty \tag{3}$$

para ciertas constantes r, $\epsilon > 0$, este último con la topología inductiva de las $||F||_{r,\varepsilon}$ o lo que es lo mismo, con la definida por las seminormas

$$||F||_k = \sup_z \frac{|F(z)|}{k(z)}$$

donde $k(z)$ es una función continua positiva tal que para todo par r, ϵ es $\lambda_M(|z|/\epsilon) \exp r|Im\, z| = O(k(z))$. □

Como consecuencia de la última parte del teorema 1.1. y del teorema de Hahn-Banach se deduce que para toda $f \in E_M$ existe una k de las anteriores y una medida acotada μ en $\mathbf{C}$ tal que

$$T(f) = \int_{\mathbf{C}} \frac{\hat{T}(w)}{k(w)}\, d\,\mu\,(w) \text{ para } T \in E'_M .$$

Especializando a $T = \delta_x$ se llega a la representación de f

$$f(x) = \int_{\mathbf{C}} \frac{\exp\,(i\,x\,w)}{k\,(w)}\, d\,\mu\,(w)\,. \tag{4}$$

Si $f \in E_M$, la sucesión $(f^{(n)}(0))$ está en el espacio $E_M(0)$ de las sucesiones (a_n) de números complejos tales que

$$|a_n| \leqslant C\,(\epsilon)\;\epsilon^n M_n$$

para todo $\epsilon > 0$ y una cierta constante $C\,(\epsilon) > 0$. $E_M(0)$ es un espacio de Fréchet con las seminormas

$$p_\varepsilon(a) = \sup_n \frac{|a_n|}{\varepsilon^n M_n}\,,\ \ \epsilon > 0,\ a = (a_n)\,.$$

La transformada de Fourier $\hat{T}$ de una $T \in E_M(0)$ se define, a fin de que la transformada de Fourier de la aplicación adjunta de $f \longmapsto (f^{(n)}(0))$ sea una inclusión, por

$$\hat{T}(z) = T((i^n z^n)),\quad z \in \mathbf{C}.$$

Es fácil demostrar el siguiente teorema, análogo al 1.1:

1.2. *Teorema.* — La transformación de Fourier $T \longmapsto \hat{T}$ establece un isomorfismo topológico entre el dual fuerte de $E_M(0)$ y el espacio $H_M(0)$ de las funciones enteras F tales que

(5) $$||F||_{0,\varepsilon} = ||F||_\varepsilon = \sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M(|z|/\epsilon)} < \infty$$

para un cierto $\epsilon > 0$, este último con la topología inductiva de las $||F||_\varepsilon$. □

Estamos interesados aquí en el caso analítico, es decir, cuando todas las $f \in E_M$ son analíticas. Una condición necesaria y suficiente para ello es (cf. [2]).

(6) $$\sup_n \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{1/n} < \infty .$$

Entonces $\exp t = O(\lambda_M(Ot))$ y por lo tanto en la representación (4) $k(w)$ domina $\exp (A|w|)$ para cualquier $A > 0$. Esto significa que la extensión $f(z) = \sum_n f^{(n)}(0)/n!\ z^n$ viene dada también por

(7) $$f(z) = \int_{\mathbf{C}} \frac{\exp(i z w)}{k(w)} d\mu(w) .$$

2. — La imagen puntual.

Consideramos la aplicación $r_0 : E_M \longrightarrow E_M(0)$ definida por $r_0(f) = (f^{(n)}(0))$. El teorema siguiente es un criterio para que r_0 sea exhaustiva y por lo tanto, para que sea cierto que $f \in E_M$ si y sólo si $(f^{(n)}(0)) \in E_M(0)$.

2.1. *Teorema.* — Una condición necesaria y suficiente para que r_0 sea exhaustiva es que $\lambda_M(t)$ absorba exponenciales, es decir

(8) $$\lambda_M(t) \exp t = O(\lambda_M(Ot)), \ t > 0.$$

Demostración. — La exhaustividad de r_0 equivale a que sea un isomorfismo topológico. Como que ambos espacios son reflexivos, esto es equivalente a que r_0^t sea un isomorfismo topológico. Si aplicamos la transformación de Fourier encontramos la inclusión $H_M(0) \hookrightarrow H_M$. Así pues, hemos de ver que (8) es una condición necesaria y suficiente para que $H_M(0) = H_M$ como espacios vectoriales topológicos.

Que (8) es suficiente es inmediato a partir de las definiciones (3), (5) de H_M, $H_M(0)$ respectivamente. Veamos la necesidad: será

$$H_M \xrightarrow{id} H_M(0)$$

continua, es decir, poniendo $H_M(r, \varepsilon) = \{F \text{ entera} \mid ||F||_{r,\varepsilon} < \infty\}$

$$H_M(r, \varepsilon) \hookrightarrow H_M(0)$$

es continua para todo r, $\varepsilon > 0$. $H_M(0)$ es el límite inductivo de los $H_M(0, \delta)$, $\delta > 0$. Por un teorema de Grothendieck ([7], pg. 147), existe $\delta > 0$ tal que $H_M(r, \varepsilon) \subset H_M(0, \delta)$ y $H_M(r, \varepsilon) \hookrightarrow H_M(0, \delta)$ es continua (como espacios de Banach). Por lo tanto, si r_0 es exhaustiva tendremos

«Para todo par r, $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $C > 0$ tales que

$$\sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M(|z|/\delta)} \leqslant C \sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M(|z|/\varepsilon) \exp r\, |Im\, z|} \tag{9}$$

para toda función entera F que haga finito el miembro derecho.»

Consideremos $F(z) = \exp(-iz) \sum_n (-iz)^n/M_n$. Es

$$|F(z)| \leqslant \exp |Im\, z| \sum_z |z|^n/M_n \leqslant \exp |Im\, z| 2\, \lambda_M(2|z|)$$

y por lo tanto (9), con $\varepsilon = 1/2$ y $r = 1$ tiene el miembro derecho menor que 2. Así pues, para ciertos δ, C es

$$\exp\, Im\ z \left| \sum_n \frac{(-iz)^n}{M_n} \right| \leqslant C\, \lambda_M(|z|/\delta)$$

para todo z. Especificando a $z = it$, obtenemos (8). □

La misma cuestión se estudia en el caso no casi analítico en [3].

Usando la función $\sum t^n/M_n$, que es del mismo orden que $\lambda_M(t)$, es fácil demostrar el siguiente criterio (cf. [6], pg. 478)

2.2. *Proposición.* — Si

$$\sup_n \frac{M_{n+1}}{(n+1)\, M_n} < \infty \tag{10}$$

$\lambda_M(t)$ absorbe exponenciales. □

Por ejemplo, el teorema 2.1. es válido para las clases E_M con $M_n = (n!)^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

3. — E_M COMO CLASE DE FUNCIONES ENTERAS.

A partir de ahora, supondremos que se cumple la condición (8), es decir, $f \in E_M$ si y sólo si $(f^{(n)}(0)) \in E_M(0)$. De (7),

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant ||\mu|| \sup_w \frac{|w|^n \exp(|w||z|)}{k(w)}.$$

Debido a (8), ahora tendremos, para cualquier $r, \varepsilon > 0$,

$$\lambda_M(|w|/\varepsilon) \exp r|w| \leqslant C(\varepsilon, r)\ k(w)$$

para cierta constante $C(\varepsilon, r)$. Entonces, para $|z| \leqslant r$,

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant C(\varepsilon, r)\ ||\mu|| \sup_w \frac{|w|^n}{\lambda_M(|w|/\varepsilon)} = ||\mu||\ C(\varepsilon, r)\,\varepsilon^n M_n$$

donde hemos usado (2). Vemos pues que la condición original (1) se ha «complexificado». Podemos enunciar pues:

3.1. *Teorema.* — Si λ_M absorbe exponenciales, $E_M = E_M(0)$ es el espacio de las funciones enteras $f(z)$ tales que para todo par $r, \varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon, r)$ tal que

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant C(\varepsilon, r)\varepsilon^n M_n \text{ para } |z| \leqslant r. \quad \square$$

En el aspecto topológico tenemos:

3.2. *Proposición.* — En las condiciones de 3.1., la topología de E_M coincide con la definida por las normas

$$q_{r,\varepsilon}(f) = \sup\left\{\frac{|f^{(n)}(z)|}{\varepsilon^n M_n},\ |z| \leqq r,\ n \in N\right\}$$

Sobre los acotados de E_M la topología inducida por E_M coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Para $f \in E_M$, la convergencia de

$$f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

lo es por la topología de E_M.

Demostración. — Lo primero es consecuencia de que ambas topologías son de Fréchet y comparables. Lo segundo se sigue de lo primero o bien de que E_M es de Schwartz (y en particular de Montel). Del hecho de que $r_0 : E_M \longrightarrow E_M(0)$ sea un isomorfismo topológico se deduce que las sumas parciales de la serie forman un conjunto acotado de E_M, puesto que sus r_0-imágenes lo forman en $E_M(0)$. Entonces la tercera parte es consecuencia de la segunda. □

4. — NUEVA DESCRIPCIÓN DE E_M

En este apartado introducimos una hipótesis que implica (8) y que permite describir E_M por condiciones de crecimiento radial. La hipótesis es la siguiente:

(11) «La sucesión $m_n = n!/M_n$ es logarítmicamente convexa».

Si se cumple (11), $m_n^{1/n}$ será creciente. De esto se deduce que

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)\,M_n} \leqslant \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{1/n}$$

y (6) implica que (10), y por lo tanto también (8), es cierta. Si $m_n^{1/n}$ es acotada E_M es el álgebra H de todas las funciones enteras. Así pues, supondremos que $m_n^{1/n} \longrightarrow \infty$ y podemos definir, para $t > 0$

$$\mu_m(t) = \sum_n \frac{t^n}{m_n}\,, \quad \lambda_m(t) = \sup_n \frac{t^n}{m_n}$$

4.1. *Proposición.* — Con la hipótesis (11), o bien E_M es H o bien es el espacio de funciones enteras $f(z)$ tales que

$$M(r,f) = 0\,(\mu_m(\varepsilon\, r)) \tag{12}$$

para todo $\varepsilon > 0$ (donde $M(r,f) = \sup\,\{|f(z)|,\ |z| \leqslant r\}$) con la topología definida por las normas

$$||f||_\varepsilon = \sup_r \frac{M(r,f)}{\mu_m(\varepsilon\, r)}\,.$$

Demostración. — Si $f \in E_M$, como $|f^{(n)}(0)| \leqslant C(\varepsilon)\varepsilon^n M_n$, se obtiene fácilmente (12). Recíprocamente, si es cierta (12), como $\mu_m(t) \leqslant 2$

$\lambda_m(2t)$, también es $M(r,f) = 0$ $(\lambda_m(\varepsilon r))$ para todo ε y usando las desigualdades de Cauchy y (2) aplicada a (m_n), tenemos

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant C(\varepsilon) \inf_r \frac{\lambda_m(\varepsilon r)}{r^n} = C(\varepsilon)\,\varepsilon^n \inf_r \frac{\lambda_m(\varepsilon r)}{(\varepsilon r)^n} = C(\varepsilon)\,\varepsilon^n \frac{M_n}{n!}$$

es decir, $(f^{(n)}(0)) \in E_M(0)$ y $f \in E_M$.

La afirmación sobre la topología de E_M es consecuencia del hecho de ser ambas de Fréchet y comparables, tal como lo demuestran las desigualdades anteriores. □

Con esta descripción de E_M se puede ver claramente que E_M es un álgebra. Ello se deduce de la relación

$$\mu_m^2(r) \leqslant \mu_m(2r) \tag{13}$$

que es consecuencia de la relación $M_k M_{n-k} \leqslant M_n$.

Las sucesiones $M_n = (n!)^\alpha$ con $\alpha < 1$ verifican (11). Para $\alpha = 0$ se tiene la clase que en el apartado 1 habiamos abandonado y para ésta es fácil ver directamente que 4.1. también es cierto. Para $M_n = (n!)^\alpha$ con $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$\lambda_m(t) = \sup_n \frac{t^n}{(n!)^{1-\alpha}} = \left(\sup_n \frac{(t^{1/1-\alpha})^n}{n!}\right)^{1-\alpha}$$

es del mismo orden que exp $t^{1/1-\alpha}$. Concluimos pues que para $M_n = (n!)^\alpha$ con $0 \leqslant \alpha < 1$, E_M es el álgebra de las funciones enteras de orden menor o igual que $\beta = (1 - \alpha)^{-1}$ y tipo minimal.

5. — Los invertibles de E_M.

Supongamos que f es holomorfa en el disco cerrado de radio R, sin ceros y tal que $f(0) = 1$; pongamos, para $r < R$

$$m(r,f) = \inf \{|f(z)|;\ |z| = r\}$$
$$M(r,f) = \sup \{|f(z)|;\ |z| = r\}.$$

Se tiene entonces la desigualdad ([1], pg. 3), para $r < R$

$$\log m(r,f) \geqslant -\frac{2r}{R-r} \log M(R,f).$$

Si aplicamos esto a una función entera sin ceros con $f(0) = 1$, haciendo $R = 2r$ encontramos

$$\log m(r, f) \geqslant -2 \log M(2r, f)$$

es decir, $m(r, f) \geqslant M(2r, f)^{-2}$. En el caso general, considerando $f/f(0)$ y teniendo en cuenta que $M(r, f^{-1}) = m(r, f)^{-1}$, se llega al

5.1. *Lema.* — Si f es una función entera sin ceros, es

$$M(r, f^{-1}) \leqslant |f(0)|^{-3} M(2r, f)^2. \quad \square \tag{14}$$

5.2. *Proposición.* — $f \in E_M$ es invertible si y sólo si $f(z) \neq 0$ para para todo $z \in \mathbf{C}$. La aplicación $f \longmapsto f^{-1}$ es continua en el conjunto de los invertibles.

Demostración. — La primera afirmación es consecuencia de (13) y (14), teniendo en cuenta 4.1. Veamos la segunda: si U es el conjunto de los invertibles, es $U = \cap U_n$ donde

$$U_n = \{f \in E_M | \ f(z) \neq 0 \text{ para } |z| \leqslant n\}.$$

Cada U_n es abierto en E_M y por lo tanto U es un G_δ-conjunto. Por un resultado de [20], $f \longmapsto f^{-1}$ es continua. $\square$

Observación. — El espectro de caracteres de E_M es $\mathbf{C}$(cf. [2]). Así vemos que f es invertible si y sólo si su transformada de Gelfand (en este caso ella misma) no se anula. Pero E_M no es localmente multiplicativamente convexa (ninguna subálgebra propia de H que contenga z puede ser localmente multiplicativamente convexa ya que, por un resultado de [20], las funciones enteras operan en una tal álgebra).

6. — Estudio de los ideales cerrados de E_M.

La proposición 4.1. describe E_M como el álgebra de las funciones enteras de *tipo minimal* respecto el peso μ_m. En la literatura se encuentran estudiadas numerosas álgebras de *tipo normal* respecto de determinados pesos (cf. [5], [8], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [18]). Es una cuestión de carácter técnico el adaptar los métodos de estos trabajos. Por tanto procederemos solamente a enunciar los resultados.

6.1. *Teorema.* — Si f_1, $f_2 \in E_M$ y $h = f_1/f_2$ es entera, $h \in E_M$. En particular, los ideales principales de E_M son cerrados. $\square$

Para un ideal I de E_M y un conjunto discreto Z de $\mathbf{C}$ ponemos

$$h(I) = \{z \in \mathbf{C} \mid f(z) = 0 \text{ para } f \in I\}, k(Z) = \{f \in E_M \mid f(z) = 0 \text{ para } z \in Z\}$$

(contando multiplicidades). El resultado siguiente está, incluso para tipo minimal, en [15].

6.2. *Teorema.* — Un ideal I de E_M es denso si y sólo si $h(I) = \varnothing$. Para todo ideal I de E_M, $\bar{I} = kh(I)$. En particular, todo ideal cerrado de E_M está caracterizado por sus ceros (contando multiplicidades). □

La cuestión natural a considerar ahora es la de aclarar qué conjuntos discretos Z pueden ser $h(I)$ para un ideal I de E_M y en particular, aquellos que son el de ceros de una función $f \in E_M$ (en el caso de tipo normal, cf. [18]).

Sea Z una sucesión (z_n) de complejos no nulos (puede haber repetidos) tal que $\lim |z_n| = \infty$. Para cada $r > 0$, se define

$$n(r) = \text{número de } z_n \text{ con } |z_n| \leqslant r$$

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \sum_{|z_n| \leq r} \log \frac{r}{|z_n|}$$

y para $k \geqslant 1$ y $r > 0$, ponemos $S(r, k) = k^{-1} \sum_{|z_n| \leq r} z_n^{-k}$.

Pongamos $m(r) = \log \mu_m(r)$. Decimos que la sucesión Z tiene *m-densidad cero* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r(\varepsilon) > 0$ tal que

$$N(r) \leqslant m(\varepsilon r) \text{ para } r \geqslant r(\varepsilon),$$

y decimos que es *m-equilibrada* si existe una sucesión (a_n) de complejos con la propiedad de que para todo $\varepsilon > 0$ existe $r(\varepsilon)$ tal que

$$|a_k + S(r, k)| \leqslant \frac{m(\varepsilon r)}{r^k} \text{ para todo } k \text{ y } r \geqslant r(\varepsilon) .$$

Una sucesión con m-densidad cero y m-equilibrada se llama *m-admisible*. Si existe una supersucesión $Z' \supset Z$ que es m-admisible llamamos a Z *relativamente m-admisible*.

6.3. *Teorema.* — Una sucesión Z es la sucesión de ceros de una $f \in E_M$ si y sólo si es m-admisible. □

Así pues los ideales cerrados son todos del tipo $k(Z)$ con Z relativamente m-admisible. Los ideales principales son aquellos en que Z ya es m-admisible.

A continuación se analiza el caso $M_n = (n!)^\alpha$ con $0 \leqslant \alpha < 1$. En este caso, $\mu_m(r) = \exp r^\beta$ con $\beta = (1-\alpha)^{-1}$ y $m(r) = r^\beta$.

6.4. *Proposición.* — Si $m(r) = r^\beta$, una sucesión Z tiene m-densidad cero si y sólo si $n(r) = o(r^\beta)$. Si $\beta \notin Z$, una sucesión con m-densidad cero es m-equilibrada (y por tanto m-admisible). Si $\beta \in Z$, una sucesión con m-densidad cero es relativamente m-admisible y es m-admisible si y sólo si la serie $\sum z_n^{-\beta}$ es convergente. □

(La proposición anterior comprende de hecho los teoremas de Lindelöf.)

Vemos pues que en el caso $\beta \notin Z$, las sucesiones m-admisibles son aquellas tales que $n(r) = o(r^\beta)$. Puesto que esta propiedad la heredan las subsucesiones, toda sucesión relativamente m-admisible es m-admisible y podemos enunciar:

6.5. *Teorema.* — Si $M_n = (n!)^\alpha$ con $\alpha < 1$ y $\beta = (1-\alpha)^{-1} \notin Z$, los ideales cerrados y los principales de E_M coinciden y son todos del tipo $k(Z)$, donde Z es una sucesión tal que $n(r) = o(r^\beta)$. □

Por el contrario, en el caso $\beta \in Z$ se tiene

6.6. *Teorema.* — Si $M_n = (n!)^\alpha$ con $\alpha < 1$ y $\beta = (1-\alpha)^{-1} \in Z$, todo ideal cerrado es del tipo $k(Z)$, donde Z es tal que $n(r) = o(r^\beta)$. Los ideales principales son aquellos en que la correspondiente sucesión cumple además que $\sum z_n^{-\beta}$ es convergente. □

Nota. — En el caso $\alpha = 0$ (funciones de tipo exponencial minimal), $\beta = 1$ y $n(r) = o(r)$ equivale a $n|z_n|^{-1} \longrightarrow 0$ ([1] pg. 5). Este es el caso estudiado en [17]. Creemos que los teoremas 6.5. y 6.6. son conocidos pero no hemos conseguido encontrarlos en la literatura.

Tanto en un caso como en otro, vemos que las sucesiones relativamente r^β-admisibles son las que tienen r^β-densidad cero. Esta misma propiedad la tienen todos los pesos $m(r)$ *lentamente crecientes*, es decir, tales que $m(2r) \leqslant C\, m(r)$ para cierta constante C.

Finalmente, los resultados de [8], [11], [12], caracterizando los sistemas finitos de generadores en álgebras de tipo normal pueden también ser generalizados:

6.7. *Teorema.* — Sean $f_1, \ldots, f_n \in E_M$ e I el ideal que generan. Entonces, $I = E_M$ si y sólo si no se anulan simultáneamente en ningún punto y

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(z)|\right)^{-1} = O\left(\mu_m(\varepsilon|z|)\right)$$

para todo $\varepsilon > 0$. □

REFERENCIAS

[1] R. P. BOAS. *Entire functions. Mathematics in Science and Engineering*, 5. Academic Press, New York, 1954.

[2] J. BRUNA. *On inversed closed algebras of infinitely differentiable functions.* Aparecerá en Studia Mathematica.

[3] J. BRUNA. *On the punctual image of non quasi-analytic classes of functions.* Sometido para su publicación.

[4] J. BRUNA. *Spectral synthesis in non quasi-analytic classes of funtions.* Bull. des Sc. Math. 104 (1) (1980), 65-78.

[5] J. CUFÍ. *Sobre el álgebra de las funciones enteras de orden acotado (Tesis).* Universidad de Barcelona.

[6] L. EHRENPREIS. *Fourier analysis in several complex variables.* Pure and applied mathematics, 17. Wiley-Interscience, New York, 1971.

[7] A. GROTHENDIECK. *Topological vector spaces. Notes in Mathematics and its applications.* Gordon and Breach, New York, 1973.

[8] L. HÖRMANDER. *Generators for some rings of analytic functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) pg. 943-949.

[9] J. HORVATH. *Topological vector spaces and distributions.* Addison-Wesley Series in Mathematics, London, 1966.

[10] J. KELLEHER-B. A. TAYLOR. *Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions.* J. reine und angew Math. 255 (1972), pg. 190-209.

[11] J. KELLEHER-B. A. TAYLOR. *An application of the corona theorem to some rings of entire functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), pg. 246-249.

[12] J. KELLEHER-B. A. TAYLOR. *Finitely generated ideals in rings of analytic functions.* Math. Ann. 193 (1971), pg. 225-237.

[13] I. F. KRASICHKOV. *Closed ideals in locally convex algebras of entire functions.* Math. URSS Izv. 1 (1967), pg. 35-55.

[14] I. F. KRASICHKOV. *Closed ideals in locally convex algebras of entire functions, II.* Math. URSS Izv. 32 (1968), pg. 979-986.

[15] I. F. KRASICHKOV. *Closed ideals in locally convex algebras of entire functions.* Algebras of minimal type. Siberian Math. J. 9 (1968), pg. 59-71.

[16] S. MANDELBROJT. *Séries adherentes, régularisation des suites, applications.* Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[17] P. K. RASEVSKII. *Closed ideals in a countably normed algebra of analytic entire functions*. Sov Math. Dokl. 6 (1965), pg. 715-71.

[18] L. RUBEL-B. A. TAYLOR. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions*. Bull. Soc. Math. France 96 (1968), 53-96.

[19] B. A. TAYLOR. *Analitically uniform spaces of infinitely differentiable functions*. Commun. Pure Appl. Math. 24 (1971), 39-51.

[20] W. ZELAZKO. *Metric generalizations of Banach algebras*. Rozprawy Matematyzne, Vol 47. PWN-Polish Scientific Publishers, Poland.

Joaquim Bruna
Sección de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Barcelona
Bellaterra (Barcelona)