ECUACIONES DE EVOLUCION CON RETARDO VARIABLE

por

J.M. FRAILE PELÁEZ

Este trabajo tiene como objeto presentar resultados de existencia global de soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales funcionales asociadas a procesos con retardo variable. El principal argumento será la aplicación de ciertas estimaciones puntuales sobre las soluciones de una ecuación diferencial escalar.

NOTACIÓN Y RESULTADOS AUXILIARES

Se dice que β es un grafo monótono en R^2 si, para todo par $[r_1, s_1]$, $[r_2, s_2] \in \beta$ se tiene que $(s_1 - s_2)(r_1 - r_2) \geqslant 0$. Tales grafos están biunívocamente asociados con aplicaciones (eventualmente multívocas) $\beta : R \to P(R)$ definidas por $s \in \beta(r)$ si $[r, s] \in \beta$. Por lo tanto, puede hablarse indistintamente de grafos o de aplicaciones monótonas. Por otra parte, un grafo monótono se dice maximal si $R(I + \lambda\beta) = R$ para todo $\lambda > 0$.

La sección mínima, k, de una aplicación monótona es

$$k(r) = \beta^0(r) = \{y \in \beta(r) / |y| = \inf|z|, z \in \beta(r)\}.$$

Por otra parte, puesto que β puede ser multívoco, conviene introducir

$$\beta^+(r) = \sup\{|y| / y \in \beta(r)\}.$$

Sea X un espacio de Banach real, $|\cdot|$ su norma. Se introduce el funcional

$$[x, y] = \lim_{h \to 0^+} \frac{|x + hy| - |x|}{h}.$$

En estas condiciones, una aplicación $A: D(A) \subseteq X \to X$ se dice acretiva si

$$\forall\ [x, y], [\tilde{x}, \tilde{y}] \in A, \text{ se verifica } [x - \tilde{x}, y - \tilde{y}] \geqslant 0.$$

Una aplicación acretiva se dice m-acretiva si, además, $R(I + \lambda A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

El siguiente resultado, de carácter técnico, será fundamental para lo que le sigue, y su demostración puede encontrarse en ([3], apéndice).

PROPOSICIÓN

$\beta \subseteq R^2$ es un grafo maximal monótono, k es su sección mínima. Supongamos que:

i) $\beta^{+}(0) = 0$; $k(r) > 0$ si, y sólo si, $r > 0$; $k(r)$ aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados.

ii) $\lim\limits_{r \to 0+} \dfrac{k(r)}{r} = D^+ k(0) < +\infty$.

iii) $\displaystyle\int_0^\delta \frac{ds}{k(s)} = +\infty$ para todo $\delta > 0$; $1/k \in L^1_{\text{loc}}\ (0, \infty)$.

Sea $x \geqslant 0$ dado, y sea $\Psi_x(t)$ la solución maximal local — sobre $[0, a_x]$ — de la ecuación diferencial

$$s'(t) = k(s(t)),\ s(0) = x.$$

Entonces se tiene:

1. Para todo $T \in (0, \infty)$, existe $x_T > 0$ suficientemente pequeño, tal que el dominio de existencia de cualquier solución $\Psi_x(t)$, con $x \leqslant x_T$, contiene al intervalo $[0, T]$.

2. Para todo $T \in (0, \infty)$, para todo $t \in (0, T)$, y para toda sucesión $\{x\} \downarrow 0$, se verifica que $\{\Psi_x(t)\} \downarrow 0$.

3. Para todo $T \in (0, \infty)$, para todo $t \in (0, T)$, existe $x_{T,t} > 0$ tal que, para todo $x \in (0, x_{T,t})$, se verifica la desigualdad

$$\Psi_x(t) \leqslant \exp(Mt) . \Psi_x(0),$$

donde M es una constante que sólo depende de $k(r)$.

APLICACIÓN

Sea X un espacio de Banach (real), $A: X \to X$ un operador m-acretivo con dominio $D(A)$, $[x, y] = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|x + hy|_X - |x|_X}{h}$.

Se considera el problema

$$(*) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u: [-r_0, T) \to X, \text{ solución de } u'(t) + Au(t) + \\ + f(u(\phi(t))) \ni 0,\ t > 0 \\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \\ u|_{[-r_0, 0]} = \tilde{u}_0; \text{ con } \tilde{u}_0 \in C([-r_0, 0]; X), \tilde{u}_0(0) = u_0 \end{cases}$$

siendo $-r_0 = \inf\limits_{t > 0} \phi(t) < 0$, y $\phi : [0, T] \to \mathbf{R}$ una función real con $\phi' \in [0, 1]$, de forma que el conjunto de ceros de ϕ' no tenga puntos de acumulación, y con ϕ verificando el teorema de valor medio.

El problema (*) resulta ser equivalente a

$$(**) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u: [0, T) \to X, \text{ solución de} \\ u'(t) + Au(t) + (Mu)(t) + g(t) \ni 0 \\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

siendo

$$M: v \to (Mv)(t) = \begin{cases} f(v(\phi(t))), & \text{si } \phi(t) > 0 \\ 0 = f(0), & \text{si } \phi(t) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \phi(t) > 0 \\ f(\tilde{u}_0(\phi(t))), & \text{si } \phi(t) \leqslant 0 \end{cases}$$

$f(x)$ es una aplicación de X en X, tal que

$$|f(x) - f(y)|_X \leqslant k(|x - y|_X),$$

donde $k: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ es no decreciente, $k(0) = 0$, $k'(0) < +\infty$ y, en general, satisface todos los requerimientos del apartado anterior.

El problema (**) admite un tratamiento estandar para la existencia *local* de soluciones (cf.[3]; [1], para el caso f lineal. Véase también [4]). Por el contrario, lo que aquí se pretende resaltar es la aplicación de la proposición al problema de la prolongación de las soluciones. Supondremos, pues, de ahora en adelante, que cualquiera que sean $(t_0, v_0) \in \mathbf{R}^+ \times \overline{D(A)}$, la ecuación (**) admite una solución local, a la derecha de t_0, tal que $u(t_0) = v_0$, y que dicha solución es fuerte (en el sentido de pertenecer a $W^{11}_{\mathrm{loc}}(t_0; t_0 + a_0; \overline{D(A)})$, donde a_0 depende de t_0 y v_0). Y demostraremos que, con cierta condición sobre la función $\tilde{u}_0$, el problema (**) admite solución fuerte sobre $[0,T)$. (Para la unicidad no existe ningún problema: cf. [3]). La hipótesis que se requiere para $\tilde{u}_0$ es:

$$(***) \begin{cases} \omega^+(\tilde{u}_0; s; h) \leqslant \gamma(s) \cdot 0(h), \\ \forall s \in [-r_0, 0), \ \forall h \in (0, \delta], \text{ para algún } \delta > 0 \text{ tal que} \\ s + \delta \in [-r_0, 0] \end{cases}$$

siendo $\gamma \circ \phi \in B[-r_0, 0) \equiv \{\text{funciones acotadas en } [-r_0, 0)\}$, y siendo $\omega^+(\tilde{u}_0; s; \delta) = \sup \{|\tilde{u}_0(s + h) - \tilde{u}_0(s)|_X / 0 \leqslant h \leqslant \delta\}$.

Naturalmente $0(\delta)$ quiere decir que $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{0(\delta)}{\delta}$, está acotado. En estas condiciones se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema

El problema (**) admite una única solución fuerte, definida sobre $[0, T)$, para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$

Demostración

Supongamos que $[0, d)$ es el mayor intervalo sobre el que la solución existe, con $d < T$; se trata de llegar a una contradicción. Para ello, dividiremos la demostración en dos partes.

Parte I.

Supongamos que $d \leqslant \phi^{-1}(0)$ (y, naturalmente, $d < T$). Sean $t, t + h \in [0, d)$, con t suficientemente próximo a d, y llamemos $g_h(t) = |u(t + h) - u(t)|_X$. Utilizando la ecuación (*) en t y $t + h$, así como las hipótesis sobre f y k, puede probarse fácilmente que

$$\frac{d}{dt} g_h(t) \leqslant k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); \phi(t+h) - \phi(t)),$$

sin más que utilizar convenientemente las propiedades del producto $[\cdot\,,\cdot]$. Pero, puesto que ω^+ es no decreciente en su último argumento, y $k(r)$ es, también, no decreciente, se sigue la desigualdad

$$\leqslant k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h\phi'(\Theta)))$$

que, por ser $\phi'(\Theta) \leqslant 1$, a su vez implica que

$$\leqslant k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h))$$

En resumen,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} g_h(t) \leqslant k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h)) \\ \forall t, h \text{ convenientes} \end{cases}$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \dfrac{0(\delta)}{\delta} = M \in (-\infty, \infty)$ para alguna constante $M \in \mathbf{R}^+$, se sigue que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tal que, si } \delta \in (0, \eta),$$

entonces

$$0(\delta) \in (\delta(M - \varepsilon), \delta(M + \varepsilon)).$$

Elijamos entonces, para tales $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ de forma que

$$\begin{cases} 0 \leqslant h_0 \leqslant \eta / \|\phi'\|_{[0, \phi^{-1}(0)]} \\ \text{y con} \\ h_0 \downarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0 \end{cases}$$

y sean $s < d$ tal que $h_0 = d - s$; $t < \sigma < s$ cualesquiera; $h \in (0, h_0)$.

Ciertamente,

$$(2)\quad \frac{d}{dt} g_h(t) \leqslant k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h)).$$

La hipótesis sobre $\widetilde{u}_0$ implica además, que

$$\begin{cases} \omega^+(\widetilde{u}_0; s; h) \leqslant \gamma(s) \cdot 0(h) \\ \forall s \in (-r_0, 0), \forall h \in (0, \delta_0)/s + h \in [-r_0, 0] \\ \text{donde } \delta_0 \text{ es un n.º suficientemente pequeño} \\ \text{(que podemos suponer, si fuese necesario, igual a } h_0) \end{cases}$$

La desigualdad (2), quedaría, en virtud de que $k(r)$ es no decreciente, como

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} g_h(t) \leqslant k(\gamma(\phi(t)) \cdot 0(h)) \\ \text{para } t < \sigma < s \text{ y } h \text{ suficientemente pequeño.} \end{cases}$$

Si, en particular, elegimos $h \in (0, h_0]$, se obtiene

$$\frac{d}{dt} g_h(t) \leqslant k(\gamma(\phi(t)) \cdot 0(h)) \leqslant k(\gamma(\phi(t))\,(M + \varepsilon)\,h)$$

y, como $\gamma \circ \phi \in B_{\text{loc}}([0, T); \mathbf{R})$, todavía será cierto que

$$\leqslant k(\Lambda h),$$

donde Λ es una cota superior de $(M + \varepsilon)\,\gamma(\phi(t))$ sobre $[0, \phi^{-1}(0)]$. Si integramos sobre $[0, \sigma]$, se obtiene

$$|u(\sigma + h) - u(\sigma)|_X \leqslant |u(h) - u(0)|_X + \sigma k(\Lambda h),$$

expresión esta, que se satisface para cualquier $h_0 > h > 0$ suficientemente pequeño, y cualquier $\sigma \in (0, d)$ tal que $\sigma + h_0 \in (0, d)$. Dividiendo por $h > 0$, y haciendo $h \downarrow 0^+$, queda

$$\begin{cases} |u'(\sigma)|_X \leqslant |u'(0)|_X + \sigma \Lambda k'(0) \\ \forall \sigma \in (0, d - h_0) \end{cases}$$

Ahora bien, como h dependía de ε, y $h_0 \downarrow 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, ésto implica que

$$\begin{cases} |u'(\sigma)|_X \leqslant |u'(0)|_X + \sigma \Lambda k'(0) \\ \sigma \in (0, d) \end{cases}$$

donde Λ podría ser, eventualmente, una constante distinta.

Entonces,

$$|u(s+h) - u(s)|_X \leqslant \int_s^{s+h} |u'(\sigma)|_X \, d\sigma \leqslant h|u'(0)|_X + \Lambda k'(0) \int_s^{s+h} \sigma \, d\sigma =$$

$$= h \{|u'(0)|_X + 2\Lambda k'(0)\, s\} + h^2 \cdot \Lambda k'(0)$$

Puesto que, tanto s como $k'(0)$ son finitos, se sigue que

$$\exists \lim_{t \to d-} u(t) = u_1 \in \overline{D(A)}$$

Ello, junto con nuestra hipótesis de trabajo de que el problema (**) admite siempre solución local a la derecha de cualquier valor inicial — en el caso actual, a la derecha de (d, u_1) —, contradice la definición de d. Por consiguiente, ha de ser $d > \phi^{-1}(0)$.

Parte II.

Supongamos ahora que $[0, d)$ es tal que $\phi^{-1}(0) < d < T \leqslant +\infty$. En primer lugar, cabe hacer dos observaciones: como nos vamos a interesar en la existencia del límite $\lim_{t \to d-} u(t)$, podemos restringir nuestro estudio a valores de t próximos a d. Esto implica, en particular, que podemos considerar sólo valores que estén dentro del intervalo $[\phi^{-1}(0), d)$ o, lo que es los mismo, tales que $\phi(t) \geqslant 0$. A su vez, una consecuencia inmediata de ello es que

$$(Mu)\,(t) = f(u(\phi(s)))$$

y

$$g(t+h) - g(t) = 0, \text{ cuando } t, t+h \in (\phi^{-1}(0), d):$$

Finalmente, puesto que $u(t)$ se supone solución fuerte en $[0, d)$, siempre nos será posible encontrar $t_0 \in (\phi^{-1}(0), d)$ tal que $|u'(t_0)|_X < +\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$ fijado, arbitrariamente pequeño, y sea $\sigma < d$ tal que $\sigma + \varepsilon < d$. (Nuestro propósito es el de hacer, posteriormente, $\sigma \downarrow 0$; por lo tanto, podremos escoger sigmas de forma que $\varepsilon \uparrow d$. O, lo que es lo mismo, dado un $\sigma \in (0, d)$, próximo a d, éste determinará automáticamente, valores $\varepsilon > 0$ próximos a cero).

Sea $t_0 \geqslant \phi^{-1}(0)$ con la propiedad antes indicada, y sean $t_0 < t < < s < \sigma$ cualesquiera. Como $u(t)$ es uniformemente continua sobre compactos de $[0, d)$, se sigue que

$$\begin{cases} \exists \delta > 0 \text{ tal que, si } |t_1 - t_2| \leqslant \delta \text{ con } t_1, t_2 \in [0, d), \text{ entonces} \\ |u(t_1) - u(t_2)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

El valor de $\delta > 0$ lo podemos escojer siempre de forma que $s + \delta < d$ (por ejemplo, puede escojerse $\delta \leqslant \varepsilon$).

Vayamos ahora a la ecuación; las propiedades del producto $[\cdot, \cdot]$ permiten llegar fácilmente a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u(t+h) - u(t)|_X &\leqslant |(Mu)(t+h) - (Mu)(t)|_X \leqslant \\ &\leqslant |f(u(\phi(t+h)) - f(u(\phi(t)))|_X \leqslant \\ &\leqslant k(|u(\phi(t+h)) - u(\phi(t))|_X) \leqslant \\ &\leqslant k(\omega^+(u; \phi(t); \phi(t+h) - \phi(t)) \leqslant \\ &\leqslant k(\omega^+(u; \phi(t); h)) \end{aligned}$$

Esta desigualdad nos va a interesar, tan sólo, en $t \geqslant t_0$. Si la integramos sobre el intervalo $(t_0, \sigma]$, se llega a

$$\begin{aligned} |u(\sigma + h) - u(\sigma)|_X &\leqslant |u(t_0 + h) - u(t_0)|_X + \int_{t_0}^{\sigma} k(\omega^+(u; \phi(t); h))\, dt \leqslant \\ &\leqslant |u(t_0 + h) - u(t_0)|_X + \int_{t_0}^{\sigma} k(\omega^+(u; \phi(t); \delta))\, dt \leqslant \\ &\leqslant \omega^+(u_0; t_0; \delta) + \int_{t_0}^{\sigma} k(\omega^+(u; \phi(t); \delta))\, dt \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de poder elegir $h \in [0, \delta]$ (véase la definición de δ).

Como la desigualdad obtenida es válida para cualquier $h \leqslant \delta$ y cualquier $\sigma \in (t_0, s)$, se sigue:

$$(3) \quad \begin{cases} \omega^+(u; \sigma; \delta) \leqslant \omega^+(u; t_0; \delta) + \displaystyle\int_{t_0}^{\sigma} k(\omega^+(u; \phi(t); \delta)\, dt \\ \sigma \in (t_0, s) \end{cases}$$

Vamos a estudiar lo que resta del problema según se dé uno de los dos siguientes casos:

1er Caso

$$\phi'(\cdot) \in [p, 1] \text{ con } p > 0.$$

Entonces, $1/\phi' \in [1, 1/p]$ y, si efectuamos el cambio $\phi(t) = r$, la desigualdad (3) se convierte en

$$\omega^+(u; \sigma; \delta) \leqslant \omega^+(u; t_0; \delta) + \frac{1}{p} \int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(\sigma)} k(\omega^+(u; r; \delta))\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \text{ puesto que } \phi(\sigma) \text{ es inferior o igual a } \sigma, \text{ sale}$$

$$\leqslant \omega^+(u; t_0; \delta) + \frac{1}{p} \int_{\Phi(t_0)}^{t_0} k(\omega^+(u; r; \delta))\, dr +$$

$$+ \frac{1}{p} \int_{t_0}^{\sigma} k(\omega^+(u; r; \delta))\, dr$$

Estudiemos $\omega^+(u; r; \delta)$, con $r \in (\phi(t_0), t_0)$, $\delta \leqslant \varepsilon$, $s + \varepsilon < d$. Puesto que u es uniformemente continua sobre compactos de $[0, d)$, para cada $r \in (\phi(t_0), t_0)$, $\exists\, h_r \in [0, \delta]$, tal que $\omega^+(u; r; \delta) = |u(r + h_r) - u(r)|_X$. Por otra parte, obsérvese que

$$r, r + h_r \in [\phi(t_0), t_0 + \delta] \subseteq [\phi(t_0), t_0 + \varepsilon] \subsetneq [\phi(t_0), d);$$

utilizando de nuevo la continuidad uniforme de u, se sigue que

$$|u(r + h_r) - u(r)|_X \leqslant \varepsilon$$

Por consiguiente,

$$\int_{\Phi(t_0)}^{t_0} k(\omega^+(u; r; \delta))\, dr \leqslant \int_{\Phi(t_0)}^{t_0} k(\varepsilon)\, dr = (t_0 - \phi((t_0)\, k(\varepsilon)$$

De manera análoga se puede demostrar que $\omega^+(u; t_0; \delta) \leqslant \varepsilon$. En resumen,

$$\omega^+(u; \sigma; \delta) \leqslant \left\{ \varepsilon + \frac{(t_0 - \phi(t_0))}{p} k(\varepsilon) \right\} + \frac{1}{p} \int_{t_0}^{\sigma} k(\omega^+(u; r; \delta))\, dr$$

Como $\delta \leqslant \varepsilon, \sigma < s$ y $s + \varepsilon < d$, se sigue que

$$\omega^+(u; \sigma; \varepsilon) \leqslant \eta_\varepsilon + \frac{1}{p} \int_{t_0}^{\sigma} k(\omega^+(u; r; \varepsilon))\, dr$$

$$\sigma \in (0, s),\ \eta_\varepsilon = \varepsilon + \frac{(t_0 - \phi(t_0))\, k(\varepsilon)}{p},\ \frac{\eta_\varepsilon}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1 + \frac{(t_0 - \phi(t_0))\, k'(0)}{p}$$

(En particular, $\eta_\varepsilon \to 0$ si $\varepsilon \to 0$).

Entonces, si $s \in (0, d) \Rightarrow \exists \varepsilon_0 = d - s / s + \varepsilon < d, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$; de donde sale que

$$\begin{cases} \omega^+(u; s; \varepsilon) \leqslant \eta_\varepsilon + \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_{t_0}^{s} k(\omega^+(u; r; \varepsilon))\, dr \\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \end{cases}$$

Una aplicación de la proposición 3[1] concluye que

$\exists \varepsilon_1$ tal que, si $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, entonces debe ser

$$\begin{cases} \omega^+(u; s; \varepsilon) \leqslant \eta_\varepsilon\, e^{\text{cte.}\,(s - t_0)} \\ \text{donde la constante sólo depende de } k \text{ y de } p. \end{cases}$$

Pero $\omega^+(u; s; \varepsilon) \geqslant |u(s + \varepsilon) - u(s)|_X$; dividiendo por $\varepsilon > 0$ y haciendo $\varepsilon \to 0$ se obtiene, finalmente,

$$\begin{cases} |u'(s)|_X \leqslant \left\{ 1 + \dfrac{(t_0 - \phi(t_0))\, k'(0)}{p} \right\} e^{\text{cte.}\,(s - t_0)} \\ s \in (0, d) \end{cases}$$

Como $d < T \leqslant +\infty$, y como $|u(s + h) - u(s)|_X \leqslant \int_s^{s+h} |u'(\sigma)| d\sigma$, se obtiene que $\exists \lim_{t \to d^-} u(t) = u_0 \in \overline{D(A)}$. Un argumento similar al de la parte I muestra que existe contradicción con la definición de d.

(1) Véase la observación 1, sobre la continuidad de $s \to \omega(u; s; \varepsilon)$.

NOTA

La hipótesis impuesta a $\widetilde{u}_0$ admite formulaciones distintas. Por ejemplo, que exista el límite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h)}{h} = r(t) \in L_1^{\mathrm{loc}}(0, T)$$

En esencia, la hipótesis sobre $\widetilde{u}_0(t)$ no se necesita para abordar la parte II de la demostración. Por ello, una idea esquemática de la manera de proceder sería como sigue:

Se eligen

$$s < d,\ h_0 = d - s;\ t \leqslant \sigma \leqslant s \text{ cualquiera; } t + h\ ,,\ h < h_0.$$

Como $t, t + h < d \leqslant \phi^{-1}(0), \Rightarrow \dfrac{d}{dt} g_h(t) \leqslant k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h))$ (*)

Por otra parte, se puede aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue:

$$\lim_{h \downarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^\sigma k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h))\, dt = \int_0^\sigma \lim_{h \downarrow 0^+} \frac{k(\omega^+(\widetilde{u}_0; \phi(t); h))}{h}\, dt = \int_0^\sigma r(t)\, dt.$$

Por lo tanto, integrando (*) entre $[0, \sigma]$, dividiendo por h, y haciendo $h \downarrow 0^+$, se llega a:

$$\begin{cases} |u'(\sigma)|_X \leqslant |u'(0)| + \displaystyle\int_0^\sigma r(t)\, dt \\ \sigma \in (0, s) \end{cases}$$

De donde $|u(\sigma + h) - u(\sigma)| \leqslant \displaystyle\int_\sigma^{\sigma + h} |u'(s)|\, ds \leqslant h|u'(0)|_X +$

$+ \displaystyle\int_\sigma^{\sigma + h} \int_0^s r(t) dt\, ds$ lo que implica que $\exists \lim\limits_{\sigma \to d^-} u(\sigma) = u_1$.

2.º Caso.

En realidad este caso se reduce a cuando sea d un punto de acumulación (por la izquierda) de ceros de $\phi'(t)$. En efecto, si así no fuera, podríamos encontrar siempre un intervalo $[t_0, d)$, con t_0 suficientemente próximo a d y tal que $|u'(t_0)|_X < +\infty$, y proceder como hasta ahora. El teorema, pues, está demostrado.

Observación 1

La función $s \to \omega^+(u; s; \varepsilon)$ es continua allí donde está definida. En efecto, la definición de $\omega^+(u; s; \varepsilon)$, y la continuidad uniforme de u, implican que

$$\forall s\, \exists\, h_s \in [0, \varepsilon] \text{ tal que } \omega^+(u; s; \varepsilon) = |u(s + h_s) - u(s)|_X.$$

Sea $s_n \to s$ cuando $n \to \infty$, y supongamos que $\omega^+(u; s_n; \varepsilon) = |u(s_n + h_n) - u(s_n)|_X$ con $h_n \in [0, \varepsilon]$.

Como $\{h_n\}$ está acotada, existe una subsucesión $\{h_{n'}\}$ tal que $h_{n'} \to h$ cuando $n' \to \infty$, donde, en general, $h \neq h_s$. Se tiene que

$$\lim_{n' \to \infty} \omega^+(u; s_{n'}; \varepsilon) = |u(s + h) - u(s)|_X \leqslant \omega^+(u; s; \varepsilon)$$

Por otra parte,

$$\lim_{n' \to \infty} |u(s_{n'} + h_s) - u(s_{n'})|_X = |u(s + h_s) - u(s)|_X = \omega^+(u; s; \varepsilon)$$

y

$$|u(s_{n'} + h_s) - u(s_{n'})|_X \leqslant \omega^+(u; s_{n'}; e);$$

luego $\omega^+(u; s; \varepsilon) \leqslant \lim\limits_{n' \to \infty} \omega^+(u; s_n; \varepsilon)$.

En definitiva, hemos demostrado la existencia de una subsucesión $\{n'\} \leqslant \{n\}$ tal que

$$\lim_{n' \to \infty} \omega^+(u; s_n; \varepsilon) = \omega^+(u; s; \varepsilon).$$

Un argumento estandar prueba que, en realidad, toda la sucesión $\omega^+(u; s_n; \varepsilon)$ converge hacia $\omega^+(u; s; \varepsilon)$.

OTRAS OBSERVACIONES

La hipótesis (***) requerida sobre el dato inicial se traduce, aproximadamente, en una condición de lipchicianidad local de $\widetilde{u}_0$ sobre $[-r_0, 0]$ como resulta fácil demostrar.

La posibilidad de estudiar ecuaciones diferenciales perturbadas por operadores integrales (no lineales) de tipo Volterra mediante técnicas más o menos semejantes a las aquí expuestas queda abierta: cf., por ejemplo, [3], pág. 12 y 77.

Asímismo, la exigencia sobre la función retardo $\phi(t)$ de que su crecimiento sea relativamente suave ($\phi' \leqslant 1$) parece poder relajarse en el sentido de que quizás bastara pedir $-r_0 \leqslant \phi(t) \leqslant t$, y $\phi' \in [0, c]$ para algún valor constante $c > 0$.

Finalmente, un buen resumen de las propiedades del producto $[\cdot, \cdot]$ puede encontrarse en [2], cap. 1, II.

REFERENCIAS

1 M. ARTOLA, *Sur les perturbations des equations d'evolution*. Application à des problemes de retard, (Thèse, Univ. Bordeaux II, 1968).

2 PH. BENILAN, *Equations d'evolution dans un espace de Banach*, (Curso de 3er ciclo, Besançon, 1975-76).

3 J.M. FRAILE PELAEZ, *Operadores de tipo local y ecuaciones de evolución*, (Tesis Doctoral, Univ. Complutense, Madrid, 1978).

4 M. GAULTIER, *Sur certaines problèmes non linéaires perturbés*, (Thèse, Univ. Bordeaux II, 1973).

5 B.C. PACHPATTE, *On some generalisations of Bellman's Lemma*, (J. of Math. Anal. Appl. 51, 1975).

J.M. Fraile Peláez
Dpto. Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas, C.U.
Madrid-3.