DOS ALGORITMOS PARA LA RESOLUCION NUMERICA DE UNA ECUACION PARABOLICA CASI-LINEAL (*)

por

A. BERMÚDEZ DE CASTRO LÓPEZ

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago

1. — INTRODUCCIÓN.

Se considera un cuerpo homogéneo e isótropo que ocupa un abierto Ω de R^3, con frontera Γ «regular» (por ejemplo de clase uno). Sea ϱ su densidad, c su calor específico y k su coeficiente de conductividad térmica. Supondremos ϱ y c constante positivas, pero k función de la temperatura. (Si ϱ y c también dependen de la temperatura, las ecuaciones que se obtienen pueden reducirse a las del caso que aquí se trata, mediante un sencillo cambio de variable).

Se quiere determinar la evolución de su temperatura a lo largo de un intervalo de tiempo $[0, T]$ con los siguientes datos:

a) La superficie Γ se mantiene en todo instante a temperatura cero.

b) Existe un aporte de energía calorífica que por unidad de masa vale, en el punto x y en el instante t, $f(x, t)$.

c) La temperatura del punto $x \in \Omega$ en el instante inicial es $y_0(x)$.

En estas condiciones es conocido que, si se designa por $y(x, t)$ la temperatura del punto $x \in \Omega$ en el instante t, entonces:

(*) Este trabajo ha sido realizado, en parte, durante una estancia en el Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique (I. R. I. A.) de Francia, subvencionada por los Servicios Científicos de la Embajada de Francia en España.

$$\varrho c \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((k(y)\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)(x,t) = \varrho f(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times]0,T[\,,$$

$$y(x,t) = 0, \qquad x \in \Gamma, \qquad t \in]0,T[\,, \tag{1}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega\,.$$

La resolución numérica de este problema resulta complicada debido, naturalmente, a su carácter no lineal. Su discretización completa mediante un esquema implícito conduce a un sistema de ecuaciones numéricas no lineal que podría resolverse con el algoritmo de Newton, a condición de que se verifiquen ciertas hipótesis, en particular, la diferenciabilidad de k.

Para salvar la dificultad que supone la no linealidad, ciertos autores proponen esquemas en diferencias finitas de varios «niveles» (Dupont - Fairweather - Johnson [5], Lees [6], [7], Dendy [3]) mientras que otros introducen métodos de tipo «predictor-corrector» (Douglas - Dupont [4], Price - Varga [12], Meyer [10], Wheeler [13]).

Los algoritmos que se proponen en este artículo son esencialmente distintos de estos últimos y, en cierto sentido, próximos al de Newton. En efecto, al igual que éste persiguen la resolución del problema no lineal, son de tipo iterativo y cada iteración requiere la resolución de un problema lineal.

Sin embargo presentan ciertas ventajas respecto al algoritmo de Newton: primeramente su convergencia puede demostrarse sin hipótesis de regularidad sobre k y, en segundo lugar, no tienen naturaleza local (la convergencia se prueba cualquiera que sea el punto de partida).

2. — Preliminares.

A continuación se recuerdan ciertos resultados de la teoría de operadores monótonos, que serán fundamentales en este artículo (ver p. ej. A. Pazy [11]).

Un operador maximal monótono en un espacio de Hilbert, H, es una aplicación definida en un subconjunto $D(B)$ de H llamado dominio, y con valores en el conjunto de las partes de H, que es monótona, es decir:

si $y_1 \in B x_1$, $y_2 \in B x_2$ entonces $(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_H \geqslant 0$ y tal que no existe ningún operador monótono con grafo mayor.

Así, por ejemplo, toda aplicación β de clase C^1 en $\mathbf{R}$, que verifique

$$\beta'(x) \geqslant 0 \qquad \text{para cada } x \in R,$$

es un operador maximal monótono en R.

Si B es un operador maximal monótono, puede probarse que, si $\lambda\,\omega < 1$, entonces para cada $f \in H$ existe un único $u \in H$ tal que:

$$(1 - \lambda\omega)\,u + \lambda\,B\,u \ni f,$$

siendo λ un real positivo. El operador $J_\lambda^\omega = ((1 - \lambda\omega)\,I + \lambda B)^{-1}$ que a f hace corresponder u es una aplicación lipschitziana de constante $(1 - \lambda\omega)^{-1}$.

El operador $B_\lambda^\omega = \dfrac{I - J_\lambda^\omega}{\lambda}$ es lipschitziano de constante $1/\lambda$, para todo λ tal que $\lambda\,\omega \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)

J_λ^ω y B_λ^ω son, respectivamente, el operador resolvente y la aproximación Yosida de $B - \omega I$.

Para finalizar se enuncia dos lemas que serán utilizados más adelante.

Lema 1. — Sea B un operador maximal monótono en un espacio de Hilbert H. Son equivalentes:

i) $u \in B\,v - \omega\,v$

ii) $u = B_\lambda^\omega(v + \lambda\,u)\,, \qquad \lambda > 0\,.$

Demostración: (ver BERMÚDEZ-MORENO [1]).

Lema 2. — Si B es un operador maximal monótono en H se verifica:

$$\|v_1 - v_2 - \frac{1}{\lambda}\,(J_\lambda(w_1) - J_\lambda(w_2))\|^2_H \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\,\|w_1 - w_2 - \lambda(v_1 - v_2)\|_H + \|v_1 - v_2\|^2_H$$

$$v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2 \in H, \qquad \lambda > 0\,.$$

Demostración: (ver BERMÚDEZ-MORENO [2]).

(*) Para $\omega = 0$ se escribirá simplemente J_λ, B_λ.

3. — Descripción de los algoritmos. Convergencia.

Las hipótesis sobre los datos del problema son las siguientes:

i) ϱ y c son constantes positivas,

ii) $k \in C(R)$, $k(x) \geqslant \alpha > 0$ para cada $x \in R$,

iii) $f \in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega))$ (*),

iv) $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Sea β la primitiva de k pasando por el origen, es decir,

$$\beta(x) = \int_0^x k(t)\, dt\,. \tag{2}$$

Entonces β es un operador maximal monótono en R, y (1) equivale a:

$$\begin{aligned}
&\varrho c \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \beta(y)\ (x, t) = \varrho f(x, t) && \text{en } \Omega \times]0, T[\,, \\
&y(x, t) = 0 && \text{en } \Gamma \times]0, T[\,, \\
&y(x, 0) = y_0(x) && \text{en } \Omega\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

A fin de escribir este problema en forma variacional, se definen la aplicación bilineal, contínua y coerciva,

$$\begin{aligned}
&a:\ H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow R\,, \\
&a(z, \varphi) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx
\end{aligned} \tag{4}$$

y el operador maximal monótono en $L^2(\Omega)$:

$$B(z)\ (x) = \beta(z(x)) \text{ casi por doquier en } \Omega.$$

Pues bien, no es difícil probar, mediante producto escalar por φ e integración por partes, que el problema (3) equivale a:

(*) $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$

$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, \ldots, n;\ \varphi|_\Gamma = 0\}$

$$\varrho c\left(\frac{\partial y}{\partial t}(t), \varphi\right) + a(B(y), \varphi) = \varrho(f(t), \varphi)$$

$$\text{para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega)\,, \tag{5}$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{en } \Omega\,,$$

así como la existencia de solución única, verificando:

$$y \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)),\ \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega))$$

(ver p. ej. J. L. LIONS [8]).

Por otra parte, si se prueba que $B_\lambda(z) \in H_0^1(\Omega)$ cuando $z \in H_0^1(\Omega)$, el lema 1 permite afirmar que (5) equivale a:

$$\varrho c\left(\frac{\partial y}{\partial t}(t), \varphi\right) + \alpha(B_\lambda(y(t) + \lambda\, u(t)), \varphi) = \varrho(f(t), \varphi)$$

$$\text{para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega)\,,$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \qquad \text{en } \Omega\,, \tag{6}$$

$$u(t) = B_\lambda(y(t) + \lambda\, u(t))\,.$$

Si ahora se tiene en cuenta la definición de B_λ, no resulta extraño plantearse el estudio del siguiente,

Algoritmo I.

Se parte de u^1, y^1 elegidos arbitrariamente en $L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega))$. Obtenidos u^n e y^n, las funciones u^{n+1} e y^{n+1} se definen del siguiente modo:

$$\varrho c\left(\frac{\partial y^{n+1}}{\partial t}(t), \varphi\right) + a\left(\frac{1}{\lambda}\, y^{n+1}(t), \varphi\right) = \varrho(f(t), \varphi) - a(u^n(t), \varphi)$$

$$+\, a\left(\frac{1}{\lambda}\, J_\lambda(y^n(t) + \lambda u^n(t)), \varphi\right)$$

$$\text{para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega)\,, \tag{7}$$

$$y^{n+1}(x, 0) = y_0(x) \qquad \text{en } \Omega\,,$$

$$u^{n+1}(t) = u^n(t) + \frac{1}{\lambda}\, y^{n+1}(t) - \frac{1}{\lambda}\, J_\lambda(y^n(t) + \lambda u^n(t))\,, \tag{8}$$

donde J_λ es el operador resolvente de B.

Nótese que (7) es un problema lineal, concretamente:

$$\varrho c \frac{\partial y^{n+1}}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} \triangle y^{n+1} = \varrho f + \triangle u^n - \frac{1}{\lambda} \triangle J_\lambda (y^n + \lambda u^n) \text{ en } \Omega \times]0, T[,$$

$$y^{n+1} = 0 \qquad \text{en } \Gamma \times]0, T[, \tag{9}$$

$$y^{n+1}(0) = y_0 \qquad \text{en } \Omega .$$

Para que el algoritmo esté bien definido es preciso que $J_\lambda(y^n + \lambda u^n)$ pertenezca al espacio $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Este resultado es consecuencia inmediata de la siguiente:

Proposición 1. — Sea $p(t) = J_\lambda(z(t))$ c. p. d. en $]0, T[$. Entonces $z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ implica $p \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Demostración: Sea w_j la base ortonormal en $L^2(\Omega)$ definida por:

$$- \triangle w_j = \lambda_j \, w_j \qquad \text{en } \Omega ,$$
$$w_j = 0 \qquad \text{en } \Gamma ,$$

donde λ_j, $j = 1, 2, \ldots$ son los autovalores del operador $-\triangle$ en $H_0^1(\Omega)$. Sea V_m el espacio engendrado por $w_1, \ldots, w_m$ y $q_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^m(t) \, w_i$ el elemento de V_m definido por:

$$(q_m(t), w_j) + \lambda (B(q_m(t)), w_j) = (z(t), w_j), \; j = 1, \ldots, m \tag{10}$$
para «casi todo» $t \in]0, T[$.

Sustituyendo w_j por $-\dfrac{1}{\lambda_j} \triangle w_j$ se tiene:

$$(q_m(t), \; - \triangle w_j) \; + \; \lambda (B(q_m(t)), \; - \triangle w_j) \; = \; (z(t), \; - \triangle w_j), \quad j = 1, \ldots, m$$

Multiplicando la igualdad j-ésima por ξ_j^m, sumando las obtenidas desde $j = 1$ hasta $j = m$ y utilizando la fórmula de Green resulta:

$$\begin{aligned} ||\nabla q_m(t)||^2_{(L^2(\Omega))^3} + \lambda (\nabla B(q_m(t), \; \nabla q_m(t))_{(L^2(\Omega))^3} &= \\ = (\nabla z(t), \; \nabla q_m(t))_{(L^2(\Omega))^3} , \end{aligned} \tag{11}$$

puesto que $z(t) = 0$, $q_m(t) = 0$ en Γ y $\beta(0) = 0$.

Por otra parte $\nabla B(q_m(t)) = k(q_w(t)) \nabla q_m(t)$, por consiguiente (11) implica:

$$(1 + \lambda\alpha) \cdot \int_0^T ||\nabla q_m(t)||^2_{(L^2(\Omega))^3} \, dt \leqslant \left(\int_0^T ||\nabla z(t)||^2_{(L^2(\Omega))^3} \, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T ||\nabla q_m(t)||^2_{(L^2(\Omega))^3} \, dt \right)^{1/2}$$

de donde

$$||q_m||_{L^2(0,\, T;\, H_0{}^1(\Omega))} \leqslant C \text{ (independiente de } m),$$

en virtud de la desigualdad de Poincaré.

Esta acotación permite afirmar la existencia de $q \in L^2(0, T; H_0{}^1(\Omega))$ y de una subsucesión $\{q_{m_r}\}$ tales que:

$$\{q_{m_r}\} \longrightarrow q \text{ en } L^2(0, T; H_0{}^1(\Omega)) \text{ débilmente cuando } r \to \infty.$$

Finalmente, mediante un método de monotonía (ver J. L. LIONS [8]), es posible pasar al límite en (10) y probar

$$q(t) = p(t) \qquad \text{c. p. d. en }]0, T[$$

lo que acaba la demostración.

La proposición que se da a continuación prueba la no expansividad de la aplicación que transforma el par (u^m, y^m) en el par (u^{m+1}, y^{m+1}).

Sean $\tilde{u}$, $\tilde{y}$ elementos cualesquiera de $L^2(0, T; H_0{}^1(\Omega))$. Denotamos u, y los elementos de $L^2(0, T; H_0{}^1(\Omega))$ que verifican:

$$\varrho c \left(\frac{\partial y}{\partial t}(t), \varphi \right) + a \left(\frac{1}{\lambda} y(t), \varphi \right) = \varrho (f(t), \varphi) - a(\tilde{u}, \varphi) +$$

$$+ a \left(\frac{1}{\lambda} J_\lambda(\tilde{y}(t) + \lambda \tilde{u}(t)), \varphi \right) \quad \text{para todo } \varphi \in H_0{}^1(\Omega)\,, \tag{12}$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \text{ en } \Omega\,,$$

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \frac{1}{\lambda} y(t) - \frac{1}{\lambda} J_\lambda(\tilde{y}(t) + \tilde{u}(t))\,. \tag{13}$$

Sea Q el operador de $W = (L^2(0, T; L^2(\Omega)))^2$ en si mismo, que transforma $(\tilde{u}, \tilde{y})$ en (u, y). Se tiene la siguiente:

Proposición 2. — Si en el espacio W se considera la norma hilbertiana:

$$||(u, y)||_W = \left(\int_0^T ||u(t)||^2_{(L^2(\Omega))}\, dt + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^T ||y(t)||^2_{(L^2(\Omega))}\, dt\right)^{1/2}$$

la aplicación Q es *no expansiva.*

Demostración: Sean $(\tilde{u}_i, \tilde{y}_i) \in W$, $i = 1,2$ y $(u_i, y_i) = Q(\tilde{u}_i, \tilde{y}_i)$, $i = 1,2$

Escribiendo (13) para $\tilde{u} = \tilde{u}_i$, $\tilde{y} = \tilde{y}_i$, $i = 1,2$ y restando las igualdades resultantes se obtiene:

$$\begin{aligned} ||u_1(t) - u_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{\lambda^2} ||y_1(t) - y_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda(\tilde{y}_1(t) + \lambda\tilde{u}_1(t)) - J_\lambda(\tilde{y}_2(t) + \\ &+ \lambda\tilde{u}_2(t)))||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\lambda}\Big(y_1(t) - y_2(t), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) - \frac{1}{\lambda}\Big(J_\lambda(\tilde{y}_1(t) + \\ &+ \lambda\tilde{u}_1(t)) - J_\lambda\Big((\tilde{y}_2(t) + \lambda\tilde{u}_2(t))\Big)\Big)_{L^2(\Omega)} . \end{aligned} \tag{14}$$

Sean z_i, $i = 1,2$ las soluciones de

$$a(z_i, \varphi) = \int_\Omega y_i\, \varphi\, dx, \qquad \text{para todo } \varphi \in H^1{}_0(\Omega)$$

Escribiendo (13) para $\tilde{u}_i$, $\tilde{y}_i$, $i = 1,2$ sucesivamente, restando las igualdades obtenidas y tomando $\varphi = z_1(t) - z_2(t)$ resulta

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho c}{2}\frac{d}{dt} ||y_1(t) - y_2(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{\lambda} ||y_1(t) - y_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} = \\ &= -\Big(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda(\tilde{y}_1(t) + \lambda\tilde{u}_1(t)) - J_\lambda(\tilde{y}_2(t) + \lambda\tilde{u}_2(t))), \\ &\qquad y_1(t) - y_2(t)\Big)_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última expresión en (14) se obtiene:

$$||u_1(t) - u_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{\lambda^2}||y_1(t) - y_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ ||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) - \frac{1}{\lambda}\Big(J_\lambda(\tilde{y}_1(t) + \lambda\tilde{u}_1(t)) - J_\lambda(\tilde{y}_2(t) + \lambda\tilde{u}_2(t))\Big)||^2_{L^2(\Omega)}$$

$$- \frac{\varrho c}{\lambda}\frac{d}{dt}||y_1(t) - y_2(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Si se utiliza el lema 2 para

$$v_i = \tilde{u}_i(t), \qquad w_i = \tilde{y}_i(t) + \lambda\tilde{u}_i(t), \qquad i = 1,2$$

esta igualdad implica

$$||u_1(t) - u_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda^2}||y_1(t) - y_2(t)||^2 +$$

$$+ \frac{\varrho c}{\lambda}\frac{d}{dt}||y_1(t) - y_2(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant ||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2}||\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)||^2. \tag{15}$$

Integrando esta desigualdad de 0 a T se obtiene el resultado.

La no expansividad de la aplicación Q en W no es suficiente para garantizar la convergencia del algoritmo I en dicho espacio. No obstante se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3. — Sea $\{y^n\}$ la sucesión construida mediante el algoritmo (7), (8). Se verifica:

$$\lim_{n\to\infty}\{y^n(t)\} = y(t) \text{ en } H^{-1}(\Omega), \text{ c.p.d. en }]0, T[. \tag{16}$$

Demostración: Cálculos análogos a los realizados en la demostración de la proposición anterior permiten probar la igualdad:

$$\frac{\varrho c}{\lambda}\frac{d}{dt}||y^{n+1}(t) - y(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)} + ||u^{n+1}(t) - u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2}||y^{n+1}(t) - y(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant ||u^n(t) - u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2}||y^n(t) - y(t)||^2_{L^2(\Omega)} \tag{17}$$

Integrando de 0 a t resulta:

$$\frac{\varrho c}{\lambda} \| y^{n+1}(t) - y(t) \|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \int_0^t \| u^{n+1}(\tau) - u(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t \| y^{n+1}(\tau) - y(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \leqslant \int_0^t \| u^n(\tau) - u(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t \| y^n(\tau) - y(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau . \tag{18}$$

De este modo la sucesión:

$$\left\{ \int_0^t \| u^n(\tau) - u(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t \| y^n(\tau) - y(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \right\}$$

es monótona decreciente, acotada inferiormente y, por tanto, convergente cuando n tiende a infinito, para casi todo t. Pasando ahora al límite en (18) se obtiene el resultado.

Algoritmo II.

Primeramente vamos a utilizar de nuevo el lema 1 para escribir el problema (5) de otra forma.

Es evidente que y es solución de (5) si y sólo si verifica:

$$\begin{cases} \varrho c \left(\dfrac{\partial y}{\partial t}, \varphi \right) + a(\omega y, \varphi) + a(B(y) - \omega y, \varphi) = \varrho (f(t), \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ y(x, 0) = y_0(x) \end{cases} \tag{19}$$

siendo ω un número real cualquiera.

Sea $u = B(y) - \omega y$; en virtud del lema 1 se tiene:

$$u = B_\lambda^\omega(y + \lambda u) \quad \text{para todo } \lambda > 0 \tag{20}$$

de manera que (19) equivale a:

$$\varrho c \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \varphi \right) + \omega a(y, \varphi) + a(u, \varphi) = \varrho (f(t), \varphi), \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega) ,$$
$$u = B_\lambda^\omega(y + \lambda u) , \tag{21}$$
$$y(x, 0) = y_0(x) .$$

Esta formulación sugiere el algoritmo:

$$\varrho c\left(\frac{\partial y^n}{\partial t}, \varphi\right) + \omega a(y^n, \varphi) + a(u^n, \varphi) = \varrho(f(t), \varphi), \tag{22}$$

$$y^n(x, 0) = y_0(x),$$

$$u^{n+1} = B_\lambda^\omega(y^n + \lambda_u^n), \tag{23}$$

cuya convergencia se prueba en la siguiente:

Proposición 4. — Si $\omega = \frac{1}{2\lambda}$ y $\lambda > 0$ se verifica: $\lim \{y^n(t)\} = y(t)$ en $H^{-1}(\Omega)$ para casi todo $t \in]0, T[$.

Demostración: Restando las igualdades (23) y (20) se obtiene

$$||u(t) - u^{n+1}(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda^2}||y(t) - y^n(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \frac{2}{\lambda}(u(t) - u^n(t), y(t) - y^n(t))_{L^2(\Omega)} + ||u(t) - u^n(t)||^2_{L^2(\Omega)}, \tag{24}$$

ya que B_λ^ω es lipschitziana de razón $\frac{1}{\lambda}$ si $\lambda\,\omega \leqslant \frac{1}{2}$.

Sean z, z^n las soluciones de:

$$a(z, \varphi) = \int_\Omega y\,\varphi\,dx \quad \text{para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

$$a(z^n, \varphi) = \int_\Omega y^n\,\varphi\,dx \quad \text{para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Restando (22) de la primera igualdad de (21) y tomando a continuación $\varphi = z - z^n$ resulta:

$$\frac{\varrho c}{2}\frac{d}{dt}||y(t) - y^n(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)} + \omega||y(t) - y^n(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ (u(t) - u^n(t), y(t) - y^n(t))_{L^2(\Omega)} = 0$$

y utilizando esta igualdad en (24)

$$||u(t) - u^{n+1}(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varrho c}{dt}\frac{1}{\lambda}||y(t) - y^n(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant ||u(t) - u^n(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Integrando de 0 a i se obtiene:

$$\frac{\varrho c}{\lambda}||y(t) - y^n(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)} + \int_0^t ||u(\tau) - u^{n+1}(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t ||u(\tau) - u^n(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau \quad \text{para casi todo} \quad t \in |0, T|. \tag{25}$$

Por consiguiente la sucesión:

$$\left\{\int_0^t ||u(\tau) - u^n(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau\right\}$$

es convergente, lo que permite probar:

$$\{||y(t) - y^n(t)||_{H^{-1}(\Omega)}\} \longrightarrow 0 \quad \text{para casi todo} \quad t \in]0, T[$$

sin más que pasar al límite en la desigualdad (25).

4. — Resultados numéricos.

Como ejemplo «test» se ha utilizado el problema (1) pero con tan solo una dimensión espacial. He aquí los valores de los datos:

$$\Omega =]0, 1[, \quad T = 1, \quad \varrho = c = 1$$

$$k(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 2y + 1 & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$y_0(x) = 0$$

$$f(x, t) = x - x^2 + 2t - t^2(2 - 12x + 12x^2)\,.$$

En este caso se conoce la solución exacta que es:

$$y(x, t) = t(x - x^2).$$

Para resolver el problema lineal que surge en cada etapa de los algoritmos I y II, se ha tomado un esquema totalmente implícito en tiempo y, como aproximación del operador laplaciana, el clásico esquema con tres puntos.

Como paso se ha elegido $h = \frac{1}{10}$, tanto en espacio como en tiempo.

El «test de parada» utilizado en cada paso de tiempo ha sido,

$$\frac{1}{9} \sum_{j=1}^{9} \frac{|y_j^{n,i} - y(jh, ih)|}{|y(jh, ih)|} < 10^{-2},$$

donde $y_j^{n,i}$ representa el valor aproximado de la solución en el punto (jh, ih), obtenido en la iteración n-ésima.

Las tablas 1 y 2 representan el número de iteraciones requeridas para los diferentes valores de λ en cada paso de tiempo, por los algoritmos 1 y 2, respectivamente. (*)

Como u inicial se ha tomado $u^0(x) = 0$.

Tabla 1

λ \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25	12	10	9	8	8	7	6	6	6	5
0.5	7	6	6	5	4	4	4	3	3	3
0.75	5	4	4	3	2	2	1	2	1	2
1	1	2	3	3	3	4	3	4	4	4
1.25	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5
1.5	6	6	5	6	5	6	5	5	5	5
1.75	7	6	6	6	6	6	6	6	6	7
2	7	7	7	7	6	7	7	7	7	7

(*) Los cálculos han sido realizados en los ordenadores de los Centros de Cálculo del I.R.I.A. y de la Universidad de Santiago.

Tabla 2

λ \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
0.5	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0.75	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.25	4	4	3	4	3	4	3	4	4	4
1.5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
1.75	5	5	4	5	4	5	5	5	5	5
2	6	5	5	5	5	5	5	5	5	6

BIBLIOGRAFIA

1) A. Bermúdez - C. Moreno: «*Application of pursuit of methods to optimal control problems*». Aparecerá en Applied Mathematics and Optimization. Springer.

2) A. Bermúdez - C. Moreno: «*Duality methods for solving variational inequalities*». De próxima publicación.

3) J. F. Dendy, J. R.: «*Penalty Galerkin methods for partial differential equations*». SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 11 n.º 3 (1974).

4) J. Douglas, J. R. - T. Dupont: «*Galerkin methods for parabolic equations*». SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 7 n.º 4 (1970).

5) T. Dupont - G. Fairweather - J. P. Johnson: «*Three-Level Galerkin methods for parabolic equations*». SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 11 n.º 2.

6) M. Lees: «*A three-level difference scheme for quasi-linear parabolic equations*». Mathematics of Computation Vol. 20 (1966).

7) M. LEES: «*A priori estimates for the solutions of difference approximations to parabolic differential equations*». Duke Mathematical Journal Vol. 27 (1960).

8) J. LIONS: «*Quelques methodes pour la resolution de problèmes aux limites non-linéaires*». Dunod. Paris (1969).

9) P. LIONS: «*Approximation de points fixes de contractions*». C.R.A.S. Paris t. 284 Série A (1977).

10) M. D. MEYER: «*The numerical solution of nonlinear parabolic problems by variational methods*». SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 10 n.º 4 (1973).

11) A. PAZY: «*Semi-groups of nonlinear contractions in Hilbert space*». C.I.M.E. Edizione Cremonese. Roma 1971.

12) H. S. PRICE - R. S. VARGA: «*Error bounds for semidiscrete Galerkin approximations of parabolic problems with applications to petroleum reservoir mechanics*». En Numerical Solution of field problems in Continum physics, A.M.S. Providence (1970).

13) M. F. WHEELER: «*A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations*». SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 10 n.º 4 (1973).