CERTAINES IDENTIFICATIONS DANS LES ESPACES DE JETS

par

CEFERINO RUIZ à Paris (France).

Dedicado al Profesor D. Germán Ancochea en su 71 cumpleaños.

À l'aide du concept de jet dû à Ehresmann [1] (1), nous pouvons associer à chaque surmersion $W = (M, N, \varrho)$ les prolongements d'ordre k non-holonomes, semi-holonomes, sesqui-holonomes et holonomes [6] qui, dans cet article, sont construits utilisant des propriétés géométriques. Quand nous faisons le décalage en une unité entre deux prolongements successifs, nous trouvons des nouvelles fibrations qui ont la propriété générale de pouvoir identifier l'espace tangent vertical à chaque point de la fibre à un espace vectoriel que ne dépend plus du point choisi; cette identification est canonique par le caractère intrinsèque de la même construction. L'identification ainsi obtenue coïncide dans le cas du prolongement holonome avec celle que Kuranishi [5] a désigné avec le nom d'identification fondamentale, dont le caractère intrinsèque résulte essentiellement des changements successifs de coordonnées. À l'aide des expressions locales, ces identifications ont été considerées aussi par Goldschmidt [2] et Kumpera-Spencer [4] dans les cas holonomes, et par Libermann [6] dans les cas des variétés banachiques. Dans une note aux Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris [7], l'auteur a exposé en prémice sa méthode pour les cas des prolongements holonomes.

Les fibrations qui résultent entre deux fibrés de jets successifs du même genre (sauf les prolongements sesquiholonomes qui fibrent sur les espaces de jets holonomes) sont des fibrés affines modelés sur les fibrés vectoriels auxquels s'est identifié l'espace tangent à la fibre correspondante, ce que dans cet article résulte de manière

(1) Les nombres entre crochets seuvoient à la Bibliographie.

naturelle à partir des constructions. Dans le travail de Libermann [6] on trouve les structures affines des fibrations ci-dessus, dans le cadre des variétés banachiques. Pour les prolongements holonomes, le lecteur peut trouver ces structures affines dans les articles de Goldschmidt [2] et Kumpera [3]; il faut bien remarquer l'interprétation géométrique que l'on donne dans le deuxième article cité ci-dessus.

I. Jets non-holonomes, semi-holonomes, sesquiholonomes et holonomes.

Soit $W = (M, N, \varrho)$ une surmersion ($\varrho : M \to N$ est une submersion surjective) que, comme tous les objets et morphismes qui seront utilisés, on supposera différentiable de classe C^∞. Nous appellons $\Gamma_{\text{loc}}\, W$ au pré-faisceau des sections locales de W, et $J_\lambda\, W$ au faisceau des germes (jets locaux) correspondants. On a les applications: source, $\alpha_\lambda : [\sigma]_p \in J_\lambda\, W \to p \in N$, et but, $\beta_\lambda : [\sigma]_p \in J_\lambda W \to \sigma(p) \in M$.

La notion de jet repose sur celle de contact entre les sections d'une surmersion. Étant donnés deux éléments $X, Y \in J_\lambda\, W$ on dit qu'ils définissent le même jet à l'ordre 1 (on peut lire que X et Y ont contact à l'ordre 1) s'ils vérifient:

1) $\beta_\lambda(X) = \beta_\lambda(Y) = Z$ $(\alpha_\lambda(X) = \alpha_\lambda(Y) = z)$.

2) Les applications linéaires tangentes coïncident:

$$TX = TY : T_z N \to T_Z M.$$

En plus, on a $T\varrho \circ TX = Id(T_z N)$.

La relation «*définir le même jet a l'ordre* 1» est d'équivalence sur $J_\lambda W$. L'ensemble quotient $J_1 M$ admet une structure de variété différentiable avec laquelle les projections: $\alpha_1 : J_1 M \to N$ et $\beta_1 : J_1 M \to M$ que l'on obtient par passage au quotient des applications α_λ et β_λ, sont des surmersions. Nous appellerons à $J_1\, W = (J_1\, M, N, \alpha_1)$ la surmersion des 1-jets de sections locales de W.

On a la projection canonique $\varrho_1 : J_\lambda W \to J_1\, M$ et chacun des éléments $X_1 = \varrho_1(X) \in J_1\, M$ peut être identifié au relèvement linéaire TX de l'espace $T_{\alpha_1(x_1)}\, N$ à l'espace $T_{\beta_1(x_1)}\, M$ que lui caractérise.

LEMME 1. — *Étant donnés deux éléments $X_1, Y_1 \in J_1 M$ avec $\beta_1(X_1) = \beta_1(Y_1) = Z$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $Z_1 \in J_1 M$ avec $\beta_1(Z_1) = Z$, tel que $Z_1 = aX_1 + bY_1$ $(a, b \in \mathbf{R})$, c'est que $a + b = 1$.*

Démonstration: La condition est nécesaire dès que $T\varrho \circ Z_1 = (a+b)\, Id(T_z N) = Id(T_z N)$. Soient $(x^i; y^s)$ les coordennées d'une carte fibrée sur M, dans un voisinage U du point Z. Dans l'ouvert $(\beta_1)^{-1}(U)$ on a une carte admissible [7] où les coordonnées sont notées $(x^i; y^s; y^s_j)$; l'expression de l'application linéaire, qui existe toujours, $aX_1 + bY_1$, de $T_z N$ dans $T_Z M$ est:

$$(aX_1 + bY_1)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = (a+b)\frac{\partial}{\partial x^i} + (ay^s_i(X_1) + by^s_i(Y_1))\frac{\partial}{\partial y^s_i}.$$

Si $a + b = 1$, il faut prendre le 1-jet sur Z ayant les coordonnées $y^s_j(Z_1) = ay^s_j(X_1) + by^s_j(Y_1)$.

Etant donnees deux surmersions $W = (M, N, \varrho)$ et $W' = (M', N, \varrho')$, et un morphisme Φ de surmersions sur $N, \Phi : M \to M'$ tel que $\Phi \circ \varrho' = \varrho$, nous avons le morphisme de faisceaux $j_\lambda \Phi : J_\lambda W \to J_\lambda W'$ qui entraîne par passage au quotient le morphisme de surmersions sur $N, j_1 \Phi : J_1 M \to J_1 M'$. En plus, si Φ_1 et Φ_2 sont deux morphismes composables de surmersions sur N, alors on a la relation $j_1(\Phi_1 \circ \Phi_2) = j_1 \Phi_1 \circ j_1 \Phi_2$. Or, on déduit que (J_1, j_1) est un foncteur de la catégorie des surmersions vers soi même. Ce fonteur fait commutatifs les diagrammes:

$$\begin{tikzcd}
J_1M \arrow[rr, "j_1\Phi"] \arrow[dd, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & J_1M' \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dd, "\beta_1"] \\
& N & \\
M \arrow[ur, "\varrho"] \arrow[rr, "\Phi"] & & M' \arrow[ul, "\varrho'"']
\end{tikzcd}$$

On a aussi un morphisme de pre-faisceaux, $j^1 : \sigma \in \Gamma_{\text{loc}} W \to j^1 \sigma \in \Gamma_{\text{loc}} J_1 W$, qui donne lieu au morphisme de faisceaux, $j^1 : [\sigma]_p \in J_\lambda W \to [j^1\sigma]_p \in J_\lambda J_1 W$.

Par réiteration du fonteur J_1 on obtient les *prolongements non-holonomes d'ordre k*, $\tilde{J}_k W$, de la surmersion W, c. à. d. en prenant

$\tilde{J}_1 W = J_1 W$, on a $\tilde{J}_k W = J_1 \tilde{J}_{k-1} W$. On notera $\tilde{J}_k W = (\tilde{J}_k M, N, \tilde{\alpha}_k)$, où $\tilde{J}_k M$ est appelé l'espace de jets non-holonomes d'ordre k de W. Par composition des applications $\beta_1 : J_1 \tilde{J}_{k-1} M \to \tilde{J}_{k-1} M$ on a les surmersions $\tilde{\varrho}^k_h : \tilde{J}_k M \to \tilde{J}_h M$, pour tout $k \geqslant h$, et $\tilde{\beta}_k = \tilde{\varrho}^k_0 : \tilde{J}_k M \to M$, qu'en passant à la limite permettent de définir l'espace de jets infinis non-holonomes de W comme $\tilde{J}_\infty M = \lim$ proj $(\tilde{J}_k M, \tilde{\varrho}^k_h)$.

Pour définir les *prolongements semi-holonomes d'ordre* k, $\bar{J}_k W$, d'une surmersion W on procède aussi par induction. Prenons $\bar{J}_0 W = W$ et $\bar{J}_1 W = J_1 W$. Nous supposons déjà définis les prolongements semi-holonomes d'ordre h, pour tout $h < k$, comme les surmersions $\bar{J}_h W = (\bar{J}_h M, N, \bar{\alpha}_h)$, ainsi que les morphismes de surmersions sur N, $\bar{\varrho}^h_{h-1} : \bar{J}_h M \to \bar{J}_{h-1} M$. Si sur la flèche $\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2}$, on fait agir le foncteur (J_1, j_1), on a le diagrame commutatif:

$$\begin{tikzcd}
J_1 \bar{J}_{k-1} M \arrow[r, "j_1 \bar{\varrho}^{k-1}_{k-2}"] \arrow[d, "\beta_1"'] & J_1 \bar{J}_{k-2} M \arrow[d, "\beta_1"] \\
\bar{J}_{k-1} M \arrow[r, "\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2}"] & \bar{J}_{k-2} M
\end{tikzcd}$$

et on définit l'espace des jets semi-holonomes d'ordre k de W, $\bar{J}_k M$, comme le noyeau de la double flèche $(\beta_1, j_1 \bar{\varrho}^{k-1}_{k-2})$ en prenant $\bar{J}_{k-1} M \subset J_1 \bar{J}_{k-2} M$. On désignera par $\bar{\varrho}^k_{k-1}$ la restriction $\beta_1 | \bar{J}_k M$, étant $(\bar{J}_k M, \bar{J}_{k-1} M, \bar{\varrho}^k_{k-1})$ une surmersion. Plus généralement, par restriction des projections $\tilde{\varrho}^k_h$ on a les surmersions $\bar{\varrho}^k_h : \bar{J}_k M \to \bar{J}_h M$. La surmersion $\bar{J}_k W = (\bar{J}_k M, N, \bar{\alpha}_k)$ sera appellée le prolongement semi-holonome d'ordre k de la surmersion W. L'espace des jets infinis semi-holonomes de W est défini par $\bar{J}_\infty M = \lim$ proj $(\bar{J}_k M, \bar{\varrho}^k_h)$.

Si l'on regarde $\bar{X}_k \in \bar{J}_k M \subset J_1 \bar{J}_{k-1} M$ comme l'application linéaire $\bar{X}_k : T_{\bar{\alpha}_k(\bar{X}_k)} N \to T_{\bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{X}_k)} \bar{J}_{k-1} M$, la condition de semi-holonomie veut dire que:

$$\bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{X}_k) = T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2} \circ X_k : T_{\bar{\alpha}_k(\bar{X}_k)} N \to T_{\bar{\varrho}^k_{k-2}(\bar{X}_k)} \bar{J}_{k-2} M.$$

Pour trouver la notion de jet holonome il faut répéter la notion de contact au premier ordre au lieu de réitérer le fonteur J_1. Nous supposerons définis les prolongements holonomes d'ordre h, pour $k > h \geqslant 1$, de la surmersion W, comme les surmersions $J_h W = (J_h M, N, \alpha_h)$, ainsi que les morphismes de pré-faisceaux $j^h : \Gamma_{\text{loc}} W \to \Gamma_{\text{loc}} J_h W$ et les morphismes de faisceaux $j_h : J_\lambda W \to J_\lambda J_h W$.

Étant donnés deux éléments $X, Y \in J_\lambda W$ on dit qu'ils définissent le même jet à l'ordre k $(k > 1)$, si les germes $j^{k-1}(X), j^{k-1}(Y) \in J_\lambda J_{k-1} W$ définissent le même jet à l'ordre 1. La relation d'équivalence «*définir le même jet à l'ordre k*» sur $J_\lambda W$ donne lieu à l'ensemble quotient $J_k M$, qui s'appelle espace des jets (holonomes) d'ordre k de W, auquel se lui donne une structure différentiable et on a les surmersions canoniques $\alpha_k : J_k M \to N$ et $\beta_k : J_k M \to M$, la projection $\varrho_k : J_\lambda W \to J_k M$ et les surmersions canoniques qui font les diagrammes

$$\begin{tikzcd} & J_\lambda W \arrow[dl, "\varrho_k"'] \arrow[dr, "\varrho_h"] & \\ J_k M \arrow[rr, "\varrho^k_h"] & & J_h M \end{tikzcd} \qquad (k \geqslant h)$$

commutatifs. Par passage à la limite on a

$J_\infty M = \lim \operatorname{proj} (J_k M, \varrho^k_h)$, que l'on appelle l'espace de jets (holonomes) infinis.

Nous appellerons à la surmersion $J_k W = (J_k M, N, \alpha_k)$ le k-*essiémé prolongement holonome* de W. Il existe de même un morphisme de pré-faisceaux $j^k : \sigma \in \Gamma_{\text{loc}} W \to j^k \sigma \in \Gamma_{\text{loc}} J_k W$ et un morphisme de faisceaux $j^k : [\sigma]_p \in J_\lambda W \to [j^k \sigma]_p \in J_\lambda J_k W$.

La definition de jet holonome entraîne que $J_k M \subset J_1 J_{k-1} M$, ce que permet identifier chaque élément $X_k \in J_k M$ à l'application linéaire $X_k : T_{\alpha_k(X_k)} N \to T_{\varrho^k_{k-1}(X_k)} J_{k-1} M$.

Si l'on considère le morphisme de surmersions sur $N : \varrho^k_{k-1} : J_k W \to J_{k-1} W$, et on fait opérer sur lui le fonteur (J_1, j_1), on a le diagramme commutatif suivant $(k \geqslant 1)$:

$$\begin{array}{ccc} J_1 J_k M & \xrightarrow{j_1 \varrho^k_{k-1}} & J_1 J_{k-1} M \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} \\ J_k M & \xrightarrow{\varrho^k_{k-1}} & J_{k-1} M \end{array}$$

le noyeau de la double flèche $(\beta_1, j_1 \varrho^k_{k-1})$ est appelé l'espace des jets sesquiholonomes d'ordre $k+1$ de la surmersion W, et sera noté par $\check{J}_{k+1} M$; étant les restrictions de β_1 et $\alpha_1 : \check{\beta}_1 : \check{J}_{k+1} M \to J_k M$ et $\check{\alpha}_1 : \check{J}_{k+1} M \to N$ des surmersions. La surmersion $\check{J}_{k+1} W = (\check{J}_{k+1} M, N, \check{\alpha}_1)$ est appelée le *prolongement sesquiholonome d'ordre* $k+1$ de la surmersion W.

Il faut remarquer que pour $k > h > 1$ et dim$N > 1$ les projections, que l'on peut définir, $\check{\varrho}^k_h : \check{J}_k M \to \check{J}_h M$ ne sont plus surjectives puisqu'elles prennent valeur sur $J_h M \subsetneqq \check{J}_h M$ $(h > 1$ et dim $N > 1)$. Pour le cas du deuxième prolongement on a $\check{J}_2 W = \bar{J}_2 W$.

Si l'on regarde $\check{X}_{k+1} \in \check{J}_{k+1} M \subset J_1 J_k M$ comme l'application linéaire $\check{X}_{k+1} : T_{\check{\alpha}_1 (\check{X}_{k+1})} N \to T_{\check{\beta}_1 (\check{X}_{k+1})} J_k M$, la condition de sesquiholonomie peut être interprétée comme:

$$\check{\beta}_1(\check{X}_{k+1}) = T\varrho^k_{k-1} \circ \check{X}_{k+1} : T_{\check{\alpha}_1 (\check{X}_{k+1})} N \to T_{\varrho^k_{k-1} (\check{\beta}_1 (\check{X}_{k+1}))} J_{k-1} M.$$

PROPOSITION 1. — *Si une section locale $\sigma_k \in \Gamma_{\text{loc}} J_k W$ est telle que $j^1\sigma_k \in \Gamma_{\text{loc}} \check{J}_{k+1} W \subset \Gamma_{\text{loc}} J_1 J_k W$, alors σ_k est holonome, c'est-à-dire, il existe $\sigma = \beta_k \circ \sigma_k \in \Gamma_{\text{loc}} W$ tel que $\sigma_k = j^k \sigma$.*

Démonstration: D'après l'interprétation ci-dessu, $j^1\sigma_k \in \Gamma_{\text{loc}} \check{J}_{k+1} W$ entraîne que $\varrho^k_{k-1} \circ \sigma_k \in \Gamma_{\text{loc}} J_{k-1} W$ est tel que $\sigma_k = j^1(\varrho^k_{k-1} \circ \sigma_k) \in$ $\in \Gamma_{\text{loc}} J_k W \subset \Gamma_{\text{loc}} J_k W$, d'où $\varrho^k_{k-1} \circ \sigma_k = j^1(\varrho^k_{k-2} \circ \sigma_k)$ et ainsi de suite. Donc $\sigma_k = j^k\sigma$ où $\sigma = \beta_k \circ \sigma_k$.

On peut vérifier aisément que $\tilde{J}_k, \bar{J}_k, J_k$ et $\check{J}_k$ sont des fonteurs de la catégorie des surmersions vers soi même.

Les relations qui peuvent être établies entre les différents prolongements à l'ordre k sont les suivantes:

$k = 1 \; J_1 M = \check{J}_1 M = \bar{J}_1 M = \tilde{J}_1 M,$

$k = 2 \; J_2 M \subset \check{J}_2 M = \bar{J}_2 M \subset \tilde{J}_2 M,$

$k > 2 \; J_k M \subset \check{J}_k M \subset \bar{J}_k M \subset \tilde{J}_k M,$

où les inclusions sont des subvariétés régulièrement immergées (c.f.[6]). Dans le cas dim $N = 1$, on a $J_k M = \check{J}_k M = \bar{J}_k M$.

II. Les identifications canoniques.

Reprenons le prolongement de premier ordre $J_1 W$ de la surmersion W, et soit $Z_1 \in J_1 M$ avec $Z = \beta_1(Z_1)$ et $z = \alpha_1(Z_1)$. Nous considerons la suite exacte d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow Q_Z M \longrightarrow T_Z M \xrightarrow{T\varrho} T_z N \longrightarrow 0$$

où l'on a appelé $Q_Z M$ au espace tangent à la fibre èn Z de la surmersion $\varrho : M \longrightarrow N$, c'est-à-dire $Q_Z M = \operatorname{Ker} T\varrho|_Z$; alors $Z_1 : T_z N \longrightarrow T_Z M$ est une section de la suite ci-dessus.

Lemme 2. — *Etant donnés X_1, $Y_1 \in J_1 M$ tels que $\beta_1(X_1) = \beta_1(Y_1) = Z$, la différence $X_1 - Y_1$ des relèvements correspondants détermine une application linéaire*

$$X_1 - Y_1 : T_z N \longrightarrow Q_Z M.$$

À l'ordre 1, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q_{Z_1} J_1 M \longrightarrow T_{Z_1} J_1 M \xrightarrow{T\beta_1} T_Z M \longrightarrow 0$$

où $Q_{Z_1} J_1 M = \operatorname{Ker} T\beta_1|_{Z_1}$ est l'espace tangent à la fibre de la surmersion $\beta_1 : J_1 M \longrightarrow M$, en Z_1.

Il résulte du lemme antérieur, une fois fixé $Z_1 \in J_1 M$, que pour tout élément $X_1 \in J_1 M$ avec $\beta_1(X_1) = \beta_1(Z_1) = Z$ on a l'homomorphisme $X_1' : V \in T_z N \longrightarrow (X_1(V) - Z_1(V)) \in Q_Z M$, ce qui donne une application différentielle

$$F_{Z_1} : (\beta_1)^{-1}(Z) \longrightarrow Q_Z M \otimes T_z^* N,$$

avec $f_{Z_1}(Z_1) = 0$.

LEMME 3. — *L'application f_{Z_1} est une bijection.*

Démonstration: Par construction, f_{Z_1} est injective. Soient $(x^i; y^s; y^s_j)$ les coordonnées dans une carte admissible, dont le domaine qui est β_1-saturé, contient Z_1; soient $(a^i; \beta^s; b^s_j)$ les coordonnées de ce point. Pour chaque X_1 dans la fibre $(\beta_1)^{-1}(Z)$, le relevement correspondant a les expressions

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_s y^s_i(X_1)\frac{\partial}{\partial y^s}$$

donc, l'homomorphisme $X_1' = X_1 - Z_1$ est donné par les équations

$$X_1'\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_s (y^s_i(X_1) - b^s_i)\frac{\partial}{\partial y^s}.$$

L'application f_{Z_1} est définie par

$$f_{Z_1}(X_1) = \sum_{j,s} (y^s_j(X_1) - b^s_j)\frac{\partial}{\partial y^s} \otimes dx^j.$$

Si $\omega \in Q_Z M \otimes T^*_z N$ a l'expression

$$w = \sum_{i,s} w^s_i \frac{\partial}{\partial y^s} \otimes dx^i.$$

il existe $X_1 \in (\beta_1)^{-1}(Z)$, celui qui a les coordonnées

$$y^s_i(X_1) = \omega^s_i + b^s_i, \text{ tel que } f_{Z_1}(X_1) = \omega.$$

Théorème 1. — *L'application tangente Tf_{Z_1} au point Z_1 est un isomorphisme*

$$T_1(Z_1) = Tf_{Z_1} : Q_{Z_1} J_1 M \longrightarrow Q_Z M \otimes T^*_z N.$$

Démonstration: Nous reprenons la démonstration du lemme 3. Par rapport à la base $\left\{\frac{\partial}{\partial y^s_j}\right\}$ de $Q_{Z_1} J_1 M$, l'application tangente prend la forme

$$Tf_{Z_1}\left(\frac{\partial}{\partial y^s_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^s} \otimes dx^j.$$

Ce qui montre que $\tau_1(Z_1)$ est un isomorphisme.

Dans le cas des prolongements non-holonomes d'ordre k, $\tilde{J}_k W$, les surmersions $\tilde{\varrho}^k_{k-1} : \tilde{J}_k M \longrightarrow \tilde{J}_{k-1} M$ donnent lieu, dans chaque élément $\tilde{Z}_k \in \tilde{J}_k M$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q_{\tilde{Z}_k} \tilde{J}_k M \longrightarrow T_{\tilde{Z}_k} \tilde{J}_k M \longrightarrow T_{\tilde{Z}_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} M \longrightarrow 0$$

où $\tilde{Z}_{k-1} = \tilde{\varrho}^k_{k-1}(\tilde{Z}_k)$. Soient $z = \tilde{\alpha}_k(\tilde{Z}_k)$ et $\tilde{Q}_{\tilde{Z}_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} M = Ker$ $T\tilde{\alpha}_{k-1}|_{\tilde{Z}_{k-1}}$

Du théorème 1 on deduit,

Corolaire. — Il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels.

$$\tilde{\tau}_k(\tilde{Z}_k) : Q_{\tilde{Z}_k} \tilde{J}_k M \longrightarrow \tilde{Q}_{\tilde{Z}_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} M \otimes T^*_z N.$$

Si l'on prend les prolongements semi-holonomes d'ordre k, $\bar{J}_k W$, de la même façon les surmersions $\bar{\varrho}^k_{k-1} : \bar{J}_k M \longrightarrow \bar{J}_{k-1} M$ donnent lieu, fixé $Z_k \in J_k M$ avec $Z_{k-1} = \varrho^k_{k-1}(Z_k)$. à la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q_{\bar{Z}_k} \bar{J}_k M \longrightarrow T_{\bar{Z}_k} \bar{J}_k M \longrightarrow T_{\bar{Z}_{k-1}} \bar{J}_{k-1} M \longrightarrow 0$$

où $Q_{\bar{Z}_k} \bar{J}_k M =$ Ker $T\bar{\varrho}^k_{k-1} |_{\bar{Z}_k}$.

Soit $\bar{X}_k \in \bar{J}_k M$, tel que $\bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{X}_k) = \bar{Z}_{k-1}$.

LEMME 4. — *La différence $\bar{X}_k - \bar{Z}_k$ des relèvements correspondants est une application linéaire*

$$\bar{X}_k - \bar{Z}_k : T_{\bar{\alpha}_k(\bar{Z}_k)} N \longrightarrow Q_{\bar{Z}_{k-1}} \bar{J}_{k-1} M.$$

Démonstration: En effet, on sait déjà que $\bar{X}_k - \bar{Z}_k$ est une application linéaire de $T_{\bar{\alpha}_k(\bar{Z}_k)} N$ dans Ker $T\bar{\alpha}_{k-1}|_{\bar{Z}_{k-1}}$ puisque $\bar{J}_k M \subset J_1 \bar{J}_{k-1} M$, mais en considérant l'application tangente $T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2}$ on a $T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2} \circ (X_k - Z_k) = T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2} \circ X_k - T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2} \circ Z_k = \bar{\varrho}^k_{k-1}(X_k) - \bar{\varrho}^k_{k-1}(Z_k) = 0$.

Or, la restriction de l'application $f_{\bar{Z}_k} : (\beta_1)^{-1}(\bar{Z}_{k-1}) \longrightarrow$ Ker $T\bar{\alpha}_{k-1} \otimes T^*_z N$ (où $z = \bar{\alpha}_k(\bar{Z}_k)$) à la fibre $(\bar{\varrho}^k_{k-1})^{-1}(\bar{Z}_{k-1})$, quand on considère $\bar{Z}_k \in \bar{J}_k M \subset J_1 \bar{J}_{k-1} M$, est una application différentielle injective $f_{\bar{Z}_k} : (\bar{\varrho}^k_{k-1})^{-1}(\bar{Z}_{k-1}) \longrightarrow Q_{\bar{Z}_{k-1}} \bar{J}_{k-1} M \otimes T^*_z N$, avec $f_{\bar{Z}_k}(\bar{Z}_k) = 0$, donc l'application tangente $Tf_{\bar{Z}_k}$ au point $\bar{Z}_k$ est un morphismo injectif et par des raisons de dimension on a la suivante

PROPOSITION 2. — *L'homomorphisme*

$$Tf_{\bar{Z}_k} : Q_{\bar{Z}_k} \bar{J}_k M \longrightarrow Q_{\bar{Z}_{k-1}} \bar{J}_{k-1} M \otimes T^*_z N$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dans le cas où l'on considère les prolongements sesquiholonomes d'ordre $k+1$, $\check{J}_{k+1} W$, il n'y a plus de surmersions $\check{\varrho}^{k+1}_k : \check{J}_{k+1} M \longrightarrow \check{J}_k M$ sauf les cas $k = 0, 1$ ou $\dim N = 1$, qui coïncident avec les prolongements semi-holonomes; mais on peut construire les suites exactes

$$0 \longrightarrow Q_{\check{Z}_{k+1}} \check{J}_{k+1} M \longrightarrow T_{\check{Z}_{k+1}} \check{J}_{k+1} M \longrightarrow T_{Z_k} J_k M \longrightarrow 0$$

pour tout $\check{Z}_{k+1} \in \check{J}_{k+1} M$ avec $\check{\beta}_1(\check{Z}_{k+1}) = Z_k \in J_k M$, où $Q_{\check{Z}_{k+1}} \check{J}_{k+1} M = \operatorname{Ker} T\check{\beta}_1|_{\check{Z}_{k+1}}$.

Pour des raisons similaires à celles exposées pour les prolongements semi-holonomes, on a le suivant

LEMME 5. — *Étant donnés $\check{X}_{k+1}, \check{Y}_{k+1} \in (\check{\beta}_1)^{-1}(Z_k)$, la différence des relèvement linéaires est un homomorphisme*

$$\check{X}_{k+1} - \check{Y}_{k+1} : T_{\check{\alpha}_k(\check{Z}_k)} N \longrightarrow Q_{Z_k} J_k M,$$

où $Q_{Z_k} J_k M = \operatorname{Ker} T\varrho^k_{k-1}|_{Z_k}$.

On a de même une application différentielle injective $f_{\check{Z}_{k+1}} : (\check{\beta}_1)^{-1}(Z_k) \longrightarrow Q_{Z_k} J_k M \otimes T^*_z N$, où $z = \alpha_k(Z_k)$, avec $f_{\check{Z}_{k+1}}(\check{Z}_{k+1}) = 0$, pour chaque $\check{Z}_{k+1}$ fixé.

PROPOSITION 3. — *L'homomorphisme*

$$Tf_{\check{Z}_{k+1}} : Q_{\check{Z}_{k+1}} \check{J}_{k+1} M \longrightarrow Q_{Z_k} J_k M \otimes T^*_z N$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Pour les prolongements holonomes d'ordre k, $J_k W$, si l'on rappelle l'inclusion $J_k M \subset \check{J}_k M$, la même construction que nous avons faite précedemment montre qu'étant donnés $X_k, Y_k \in J_k M$, avec $\varrho^k_{k-1} (X_k) = \varrho^k_{k-1} (Y_k) = Z_{k-1}$, la différence des relèvements qui les caractérisent, détermine une application linéaire

$X_k - Y_k : T_z N \longrightarrow Q_{Z_{k-1}} J_{k-1} M$, où $z = \alpha_{k-1} (Z_{k-1})$, ce que permet aussi de construire pour tout $Z_k \in J_k M$ fixé, une application différentielle injective

$$f_{Z_k} : (\varrho^k_{k-1})^{-1} (Z_{k-1}) \longrightarrow Q_{Z_{K-1}} J_{k-1} M \otimes T^*_z N$$

avec $f_{Z_k} (Z_k) = 0$.

PROPOSITION 4. — *La différentielle au point* Z_k

$$Tf_{Z_k} : Q_{Z_k} J_k M \longrightarrow Q_{Z_{k-1}} J_{k-1} M \otimes T^*_z N$$

est un homomorphisme injectif d'espaces vectoriels.

D'après la proposition 3, on déduit cette proposition du fait que $J_k M \subset \check{J}_k M$ et $Q_{Z_k} J_k M \subset Q_{Z_k} \check{J}_k M$.

Si l'on prend les coordonnées $(x^i; y^s; y^s_\alpha)$ d'une carte admisible dont le domaine contient Z_k, et sont $(a^i; b^s; b^s_\alpha)$ les coordonées du point fixé, on trouve pour f_{Z_k} l'expression (c.f. [7])

$$f_{Z_k} (X_k) = \sum_{\substack{i,\ s \\ |\beta| = k-1}} (y^s_{\beta+1_i} - b^s_{\beta+1_i}) \frac{\partial}{\partial y^s_\beta} \otimes dx^i.$$

Par rapport à la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^s}, |\alpha| = k \right\}$ de l'espace tangent vertical $Q_{Z_k} J_k M$, Tf_{Z_k} prend la forme

$$Tf_{Z_k} \left(\frac{\partial}{\partial y^s} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial y^s_{\alpha-1_i}} \otimes dx^i \quad (\text{pour } \alpha_i \neq 0),$$

qui coïncide avec celle qui a donnée Kuranishi [5] et qu'il désigne avec le nom d'*identification fondamentale*. Nous avons obtenu ici cette identification de façon géométrique, où le caractère intrinsèque est immédiat.

Je suis obligé de remercier M. Germán Ancochea de la remarque suivante:

REMARQUE: On pourrait aussi déterminer le caractère intrinsèque de l'identification fondamentale en observant que, dans un changement de coordonées des cartes admissibles $(x^i; y^j; y^j_\alpha) \longrightarrow (x'^r; y'^s; y'^s_\beta)$, on a des expressions du type $y'^s_\beta = \sum A^{js}_{\alpha\beta}(x; y)\, y^j_\alpha + F^s_\beta(x^i; y^j; y^\gamma_j)$, $|\alpha| = |\beta| = k$, $|\gamma| < k$; et par récurrence on montre que

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha_j} = \sum_{o,\beta} A^{js}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y'^s_\beta}$$

et $$\sum_i \frac{\partial}{\partial y^j_{\alpha-1_i}} \otimes dx^i = \sum_{s,\beta} A^{js}_{\alpha\beta}\left(\sum_r \frac{\partial}{\partial y'^s_{\beta-1_r}} \otimes dx'^r\right).$$

Par recollemant des resultats exposés dans ce paragraphe, nous avons obtenue le suivant

THÉORÈME 2. — *Étant donnée une surmersion W et ses prolongements non-holonomes $\tilde{J}_k W$, semi-holonomes $\bar{J}_k W$, sesquiholonomes $\check{J}_k W$ et holonomrs $J_k W$, on vérifie:*

1) *Pour tout $\tilde{Z}_k \in \tilde{J}_k M$, il existe un isomorphisme canonique:* $\tilde{\mathcal{T}}_k(\tilde{Z}_k) : Q_{\tilde{Z}_k} \tilde{J}_k M \longrightarrow \tilde{Q}_{\tilde{Z}_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} M \otimes T^*_z N$.

2) *Pour tout $\bar{Z}_k \in \bar{J}_k M$, il existe un isomorphisme canonique:* $\bar{\mathcal{T}}_k(\bar{Z}_k) : Q_{\bar{Z}_k} \bar{J}_k M \longrightarrow Q_Z M \otimes (\otimes^k T^*_z N)$.

3) *Pour tout $\check{Z}_k \in \check{J}_k M$, il existe un isomorphisme canonique:* $\check{\mathcal{T}}_k(\check{Z}_k) : Q_{\check{Z}_k} \check{J}_k M \longrightarrow Q_Z M \otimes S^{k-1} T^*_z N \otimes T^*_z N$.

4) *Pour tout $Z_k \in J_k M$, el existe un isomorphisme canonique:* $\mathcal{T}_k(Z_k) : Q_{Z_k} J_k M \longrightarrow Q_Z M \otimes S^k T^*_z N$.

Démonstration: La partie 1) est le corolaire au théorème 1. D'après la proposition 2, si l'on répète le raisonnement en décalant k en une unité jusqu'à $k = 0$, alors on a l'isomorphisme $\bar{\mathcal{T}}_k(\bar{Z}_k)$ de 2). Par la proposition 4 on a un homomorphisme injectif de $Q_{Z_k} J_k M$ dans $Q_{Z_{k-1}} J_{k-1} M \otimes T^*_z N$, par récurrence on obtient une application injective $\mathcal{T}_k(Z_k) : Q_{Z_k} J_k M \longrightarrow Q_Z M \otimes (\otimes^k T^*_z N)$ et dont l'image est contenue dans $Q_Z M \otimes S^k T^*_z N$; par des raisons de dimension il résulte l'isomorphisme d'espaces vectoriels exprimé dans 4). Après la proposition 3 et la partie 4) de ce théorème on a 3).

III. LA STRUCTURE AFFINE DES FIBRÉS DE JETS.

Étant donnée une surmersion W, nous avons construit les prolongements non-holonomes $\tilde{J}_k W$, semi-holonomes $\bar{J}_k W$, sesquiholonomes $\check{J}_k W$ et holonomes $J_k W$. Nous avons consideré les surmersions $(\tilde{J}_k M, \tilde{J}_{k-1} M, \tilde{\varrho}^k_{k-1})$, $(\bar{J}_k M, \bar{J}_{k-1} M, \bar{\varrho}^k_{k-1})$, $(\check{J}_k M, J_{k-1} M, \check{\beta}_1)$ et $(J_k M, J_{k-1} M, \varrho^k_{k-1})$ et nous avons identifié, dans le théorème 2, les espaces tangentes aux fibre de ces surmersions, dans chaque point, à des espaces vectoriels qui ne dépendent pas du point choisi. Le lemme 1 est valable s'il s'agite de deux éléments $\tilde{X}_k$, $\tilde{Y}_k$ $\tilde{J}_k M$, avec $\tilde{\varrho}^k_{k-1}(\tilde{X}_k) = \tilde{\varrho}^k_{k-1}(\tilde{Y}_k)$, c'est-à-dire $\tilde{Z}_k = a\tilde{X}_k + b\tilde{Y}_k$ est tel que $\tilde{Z}_k \in \tilde{J}_k M$ si et seulement si $a + b = 1$.

LEMME 6. — *Étant donnés deux éléments* $\bar{X}_k, \bar{Y}_k \in \bar{J}_k M$ *avec* $\bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{X}_k) = \bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{Y}_k)$, *(resp.* $\check{X}_k, \check{Y}_k \in \check{J}_k M$ *avec* $\check{\beta}_1(\check{X}_k) = \check{\beta}_1(\check{Y}_k)$*) et* $a, b \in \mathbf{R}$ *tels que* $a + b = 1$, *alors* $\bar{Z}_k = a\bar{X}_k + b\bar{Y}_k \in \bar{J}_k M$ *(resp.* $\check{Z}_k = a\check{X}_k + b\check{Y}_k \in \check{J}_k M$*).*

Démonstration. — Dans le cas semi-holonome on a $\bar{Z}_k \in J_1 \bar{J}_{k-1} M$ avec $\beta_1(\bar{Z}_k) = \bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{X}_k)$, par le lemme 1. Mais $T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2} \circ \bar{Z}_k = a(T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2} \circ \bar{X}_k) + b(T\bar{\varrho}^{k-1}_{k-2} \circ \bar{Y}_k) = a\,\bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{X}_k) + b\,\bar{\varrho}^k_{k-1}(\bar{Y}_k) = \beta_1(\bar{Z}_k)$, entraîne $\bar{Z}_k \in \bar{J}_k M$. Pour le cas des prolongements sesquiholonomes on répete le même raisonemant.

LEMME 7. — *Étant donnés deux éléments* $X_k, Y_k \in J_k M$ *avec* $\varrho^k_{k-1}(X_k) = {}^k_{k-1}(Y_k) = Z_{k-1}$, *et* $a, b \in \mathbf{R}$ *tels que* $a + b = 1$, *alors* $Z_k = aX_k + bY_k \in J_k M$.

Démonstration. — On sait déjà que $Z_k \subset \check{J}_k M$, par le lemme anterieur, mais il faut construir la section $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}} W$ tel que $j^k_\sigma(z) = Z_k$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\text{loc}} W$ tels que $X_k = j^k\sigma_2(z)$ et $Y_0 = j_0\sigma_2(z)$. Dans un voisinage du point $Z = \sigma_1(z)$ on prend des coordonnées fibrées $(x^i; y^s)$ de façon que la section σ_1 est donnée par les équations $y^s = 0$. La section σ_2 sera exprimée par équations du type $y^s = f^s(x^i)$. Si nous prenons la section σ, donnée par les fonctions $y^s = bf^s(x^i)$ on a $j^k\sigma(z) = Z_k$. On remarque que les fonctions $bf^s(x^i)$ prennent valeur dans le domaine de la carte fibré puisque $f^s(z) = 0$.

PROPOSITION 5. —

1) *Pour tout* $\widetilde{Z}_{k-1} \in \widetilde{J}_{k-1} M$, *la fibre* $(\widetilde{\varrho}^k_{k-1})^{-1} (\widetilde{Z}_{k-1})$ *est un espace affine sur l'espace vectoriel* $\widetilde{Q}_{\widetilde{Z}_{k-1}} \widetilde{J}_{k-1} M \otimes T^*_z N$.

2) *Pour tout* $\overline{Z}_{k-1} \in \overline{J}_{k-1} M$, *la fibre* $(\overline{\varrho}^k_{k-1})^{-1} (\overline{Z}_{k-1})$ *est un espace affine sur l'espace vectoriel* $Q_Z M \otimes (\otimes^k T^*_z N)$.

3) *Pour tout* $Z_{k-1} \in J_{k-1} M$, *la fibre* $(\check{\beta}_1)^{-1} (Z_{k-1})$ *est un espace affine sur l'espace vectoriel* $Q_Z M \otimes S^{k-1} T^*_z N \otimes T^*_z N$.

4) *Pour tout* $Z_{k-1} \in J_{k-1} M$, *la fibre* $(\varrho^k_{k-1})^{-1} (Z_{k-1})$ *est un espace affine sur l'espace vectoriel* $Q_Z M \otimes S^k T^*_z N$.

Démonstration: On considère les applications suivantes:

$\widetilde{A} (\widetilde{Z}_{k-1}) : (\widetilde{\varrho}^k_{k-1})^{-1} (\widetilde{Z}_{k-1}) \times \widetilde{Q}_{\widetilde{Z}_{k-1}} \widetilde{J}_{k-1} M \otimes T^*_z N \longrightarrow (\widetilde{\varrho}^k_{k-1})^{-1} (\widetilde{Z}_{k-1})$,

$\overline{A} (\overline{Z}_{k-1}) : (\overline{\varrho}^k_{k-1})^{-1} (\overline{Z}_{k-1}) \times Q_Z M \otimes (\otimes^k T^*_z N) \longrightarrow (\overline{\varrho}^k_{k-1}) (\overline{Z}_{k-1})$,

$\check{A} (Z_{k-1}) : (\check{\beta}_1)^{-1} (Z_{k-1}) \times Q_Z M \otimes S^{k-1} T^*_z N \otimes T^*_z N \longrightarrow (\check{\beta}_1)^{-1} (Z_{k-1})$,

et $A (Z_{k-1}) : (\varrho^k_{k-1})^{-1} (Z_{k-1}) \times Q_Z M \otimes S^k T^*_z N \longrightarrow (\varrho^k_{k-1})^{-1} (Z_{k-1})$;

définies par les équations: $\widetilde{A}(\widetilde{Z}_{k-1}) (\widetilde{Z}_k, \omega) = (f_{\widetilde{Z}_k})^{-1} (\omega)$,

$\overline{A} (\overline{Z}_{k-1}) (\overline{Z}_k, \eta) = (f_{\overline{Z}_k})^{-1} (Tf_{\overline{Z}_k} \circ (\overline{\mathcal{T}}_k(\overline{Z}_k))^{-1} (\eta))$,

$\check{A} (Z_{k-1}) (\check{Z}_k, \eta) = (f_{\check{Z}_k})^{-1} (Tf_{\check{Z}_k} \circ (\check{\mathcal{T}}_k(\check{Z}_k))^{-1} (\eta))$, et

$A(Z_{k-1}) (Z_k, \eta) = (f_{Z_k})^{-1} (Tf_{Z_k} \circ (\mathcal{T}_k(Z_k))^{-1} (\eta))$, qui donnent les estructures rèspectives d'espace affine, d'aprés des lemmes 1, 3, 6 et 7 et du théorème 2.

THÉORÈME 3. —

1) *Le fibré* $(\widetilde{J}_k M, \widetilde{J}_{k-1} M, \widetilde{\varrho}^k_{k-1})$ *a une structure canonique de fibré affine sur le fibré vectoriel*

$(\widetilde{Q}\widetilde{J}_{k-1} M \otimes (\widetilde{J}_{k-1} M \times_N T^*N), \widetilde{J}_{k-1} M, \pi)$.

2) *Le fibré* $(\overline{J}_k M, \overline{J}_{k-1} M, \overline{\varrho}^k_{k-1})$ *a une structure canonique de fibré affine sur le fibré vectoriel*

$(\overline{J}_{k-1} M \times_M (QM \otimes (M \times_N \otimes^k T^*N)), \overline{J}_{k-1} M, \pi)$.

3) *Le fibré* $(\check{J}_k M, J_{k-1} M, \check{\beta}_1)$ *a une structure canonique de fibré affine sur le fibré vectoriel*

$$(J_{k-1} M \times_M (QM \otimes (M \times_N (S^{k-1} T^*N \otimes T^*N))), J_{k-1} M, \pi).$$

4) *Le fibré* $(J_k M, J_{k-1} M, \varrho^k_{k-1})$ *a une structure canonique de fibré affine sur le fibré vectoriel*

$$(J_{k-1} M \times_M (QM \otimes (M \times_N S^k T^*N)), J_{k-1}, \pi).$$

Démonstration: On définit les morphismes fibrés:

$\tilde{A} : (\tilde{J}_k M \times_{\tilde{J}_{k-1} M} \tilde{Q}\tilde{J}_{k-1} M) \otimes (\tilde{J}_k M \times_N T^*N) \longrightarrow \tilde{J}_k M$, sur $\tilde{J}_{k-1} M$;

$\bar{A} : \bar{J}_k M \times_M (QM \otimes (M \times_N \otimes^k T^*N)) \longrightarrow \bar{J}_k M$, sur $\bar{J}_{k-1} M$;

$\check{A} : \check{J}_k M \times_M (QM \otimes (M \times_N (S^{k-1} T^*N \otimes T^*N))) \longrightarrow \check{J}_k M$, sur $J_{k-1} M$;

et $A : J_k M \times_M (QM \otimes (M \times_N S^k T^*N)) \longrightarrow J_k M$, sur $J_{k-1} M$; tels que quand on fait leur restrictions aux fibres sur les points $\tilde{Z}_{k-1}$, $\bar{Z}_{k-1}$ et Z_{k-1} on a respectivement les applications $\tilde{A}(\tilde{Z}_{k-1})$, $\bar{A}(\bar{Z}_{k-1})$, $\check{A}(Z_{k-1})$ et $A(Z_{k-1})$ de la démonstration de la proposition précédente. Ces morphismes $\tilde{A}$, $\bar{A}$, $\check{A}$ et A définissent sur les fibrés ci-dessus les structures de fibrés affines voulues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHARLES EHRESMANN, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie*. Colloque International du C.N.R.S., *52*, Strasbourg, 1953.

[2] HUBERT GOLDSCHMIDT, *Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations*. Journal of Differential Geometry, *1* (1967), 269-307.

[3] ANTONIO KUMPERA, *Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie*, I et II. Journal of Differential Geometry, *10* (1975), 289-416.

[4] ANTONIO KUMPERA et DONALD SPENCER, *Lie equations*. Vol. I: General Theory. Annals of Mathematics Studies, Nº. *73*, Princeton University Press, Princeton N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972.

[5] MASATAKE KURANISHI, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*. Publicações da Sociedade Matemática de São Paulo, São Paulo 1967.

[6] PAULETTE LIBERMANN, *Sur les prolongements des fibrés principaux et des groupoïdes différentiables banachiques*. Analyse Globale. Séminaire de Mathématiques supérieures, été 1969, Les Presses de l'Université de Montreal, 1971.

[7] CEFERINO RUIZ, *L'identification fondamentale en théorie de jets*. Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris, t. *280* - Série A (1975), 1625-1627.

Ceferino Ruiz
Université de Paris 7,
U.E.R. de Mathématiques,
Couloir 45-55, 5º étage,
2, place Jussieu;
75005 Paris (France).

Departamento de Matemáticas,
Universidad Complutense;
Madrid (3) (España)