

LES EQUATIONS  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1) x'^{[s]} + x = a$

par

FRANCINE DIENER

Nous nous proposons d'étudier la famille d'équations différentielles

$$(E_a^s) : \varepsilon x'' + (x^2 - 1) x'^{[s]} + x = a$$

dépendant de deux paramètres réels positifs  $s$  et  $a$ , où  $x'^{[s]}$  désigne la fonction impaire de  $x'$  qui vaut  $(x')^s$  si  $x'$  est positif;  $\varepsilon$  est un nombre réel infiniment petit. <sup>(1)</sup>

L'équation de VAN DER POL ( $s = 1, a = 0$ ) est l'un des exemples les plus connus d'équation différentielle possédant un cycle limite unique. L'usage des méthodes non classiques a fourni récemment une étude simplifiée des propriétés géométriques de cette équation [TU] et également une étude des équations  $(E_a^1)$  tout particulièrement pour  $a$  proche de la valeur 1 où il y a disparition du cycle limite [CDD]. Nous poursuivons ici cette étude. Son intérêt réside autant dans la description qu'elle donne, pour toutes les valeurs positives des paramètres  $s$  et  $a$ , des trajectoires des diverses équations considérées que dans la méthode qu'elle utilise. Cette méthode, introduite dans [RTU], consiste à choisir pour chaque valeur de  $s$  une «échelle» convenable du plan des phases de telle sorte qu'à cette échelle les phénomènes (par exemple la présence d'un cycle) apparaissent à

<sup>(1)</sup> Pour tous les termes non classiques, on se reportera à [N]. Précisons cependant

— quelques abréviations: i.p. pour «infiniment petit», i.g. pour «infiniment grand»,  $a \simeq b$  pour « $a$  équivalent à  $b$ », (i.e.  $a - b$  i.p.),  $a \ll b$  pour « $a < b$  et  $a \simeq b$ »;

— le sens de deux termes souvent utilisés: le *halo* d'un ensemble est constitué de tous les points infiniment proches de cet ensemble; l'*ombre* d'un ensemble est le standardisé (cf[N]) du halo de cet ensemble (i.e. l'unique ensemble standard dont les éléments standards sont les parties standard des éléments de l'ensemble).

distance finie et que, de plus, le champ associé à l'équation considérée soit alors infiniment proche d'un champ dont on connaît les solutions.

Nous montrons ainsi dans le premier chapitre que lorsque  $a = 0$ , les résultats obtenus pour  $s = 1$  se généralisent aux cas où  $0 \ll s \ll 2$ , en particulier l'existence d'un unique cycle limite stable.

Dans le second chapitre, nous verrons que ce même cycle existe encore tant que  $s$  reste inférieur à une valeur  $s_0$  de l'ordre de  $2 + 3/4 \varepsilon$ , pour disparaître ensuite en «explosant». Le troisième chapitre est consacré à l'étude du cas  $a \neq 0$ . On y montre que des cycles semblables aux canards du cas  $s = 1$  existent encore non seulement lorsque  $0 \ll s \ll 2$  mais également pour tout  $s$ . Nous verrons enfin dans le dernier chapitre que lorsque  $s$  tend vers 0 la période du cycle (dont la «forme» évolue légèrement avec  $s$  et  $a$ ) devient i.g., ce dernier n'existant plus lorsque  $s = 0$ .

#### I. — CAS OÙ $s$ EST VOISIN DE 1 (ET $a = 0$ ) : EXISTENCE D'UN CYCLE UNIQUE.

On étudie habituellement l'équation de VAN DER POL (cas où  $s = 1$ ) dans le plan de LIENARD, obtenu par le changement de variable  $u = \varepsilon x' + \frac{x^3}{3} - x$  [TU]. Lorsque  $\varepsilon$  est i.p., on comprend bien l'intérêt de ce choix: le cycle limite, que l'on peut localiser à distance finie dans le plan de LIENARD, passerait en effet par des points d'ordonnées i.g. dans le plan des phases. Cette difficulté disparaît cependant si l'on se place dans un «rapetissement» convenable du plan des phases. C'est cette façon de faire, qui présente l'avantage de se généraliser à des cas où  $s \neq 1$ , que nous allons appliquer dans ce chapitre aux équations considérées pour lesquelles  $s$  n'est pas trop éloigné de 1 et  $a$  est nul.

##### 1) Exemple 1 : l'équation $\varepsilon x'' + (x^2 - 1)(x')^{[1/s]} + x = 0$

L'étude de cette équation correspond, en posant  $x' = v$ , à l'étude dans le plan des phases  $(x, v)$  du champ:

$$v \begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{1}{\varepsilon} ((1 - x^2) v^{[1/s]} - x) \end{cases}$$

*Remarque préliminaire:* ce champ de vecteur ne vérifie pas la condition de LIPSCHITZ (de même que tous les champs associés aux équations considérées pour lesquelles  $s < 1$ ) au voisinage de la droite  $v = 0$ . Cependant, par tout point de cette droite, distinct de  $(0,0)$  passe une unique trajectoire, qui est le graphe d'une solution de l'équation  $\frac{dx}{dv} = \frac{\varepsilon v}{(1-x^2)v^{1/s} - x}$  qui vérifie la condition de LIPSCHITZ en  $x$ . L'unicité des solutions  $t \rightarrow (x(t), v(t))$  du champ  $v$  en découle, sauf peut être pour les solutions telles que  $(x(t_0), v(t_0)) = (0, 0)$ .

Considérons le «changement d'échelle»  $V = \frac{2}{\varepsilon^{1/3}} v$  (1). Le champ  $v$  devient:

$$\begin{cases} x' = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} V \\ V' = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} [(1-x^2)V^{1/s} - \varepsilon^{1/3}x] \end{cases}$$

champ qui a les mêmes trajectoires que

$$\mathcal{V}: \begin{cases} x' = V \\ V' = (1-x^2)V^{1/s} - \varepsilon^{1/3}x \end{cases}$$

Comme  $\varepsilon^{1/3}$  est i.p., ce champ  $\mathcal{V}$  est, sur l'ensemble des points finis du plan  $(x, V)$ , infiniment proche du champ  $\tilde{\mathcal{V}}$ , symétrique par rapport à l'origine et intégrable par quadrature:

$$\tilde{\mathcal{V}}: \begin{cases} x' = V \\ V' = (1-x^2)V^{1/s} \end{cases}$$

Les trajectoires du champ  $\tilde{\mathcal{V}}$  contenues dans les demi-plans  $V > 0$  et  $V < 0$  ont pour équations

$$V(x) = \frac{3}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} + C \right)^{2/3}, C \in \mathbf{R}$$

Tous les points de la droite  $D$  d'équation  $V = 0$  sont singuliers pour  $\tilde{\mathcal{V}}$ . Les trajectoires sont parcourues de gauche à droite lorsque  $V > 0$  et de droite à gauche lorsque  $V < 0$  (Figure 1). Comme  $\mathcal{V}$  et  $\tilde{\mathcal{V}}$  sont infiniment proches en tout point fini du plan, les ombres des trajec-

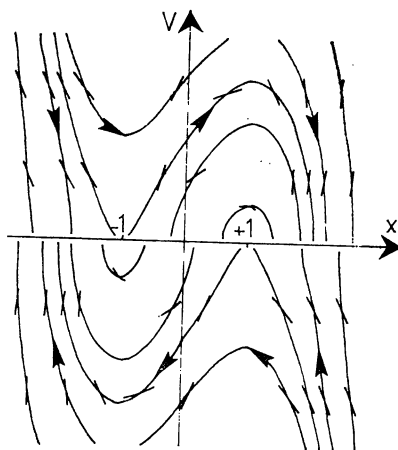


Figure 1: trajectoires de  $\tilde{\mathcal{V}}$  et segments de trajectoires de  $\mathcal{V}$ : dans  $\{x > 0\}$ , les trajectoires de  $\mathcal{V}$  coupent celles de  $\tilde{\mathcal{V}}$  en passant de la région supérieure à la région inférieure.

trajectoires de  $\mathcal{V}$  sont solutions de  $\tilde{\mathcal{V}}$  dans les demi plans  $V > 0$  et  $V < 0$ , en vertu du lemme général suivant:

*Lemme de l'ombre courte:* Soit  $\mathcal{V}$  un champ de vecteurs différentiable de  $\mathbf{R}^2$  infiniment proche (respectivement  $\varepsilon$ -proche, i.e.  $(\mathcal{V} - \tilde{\mathcal{V}})/\varepsilon$  fini) d'un champ standard  $\tilde{\mathcal{V}}$  en tout point d'un ouvert standard  $O$ . Soient  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  les trajectoires pour  $\mathcal{V}$  et  $\tilde{\mathcal{V}}$  respectivement d'un même point de  $O$ . Alors pour tout  $t$  fini, si  $\tilde{\gamma}(\tau) \in O$  pour tout  $\tau < t$ , on a  $\gamma(t) \simeq \tilde{\gamma}(t)$  (respectivement  $\gamma(t) \stackrel{\varepsilon}{\simeq} \tilde{\gamma}(t)$ , i.e.  $(\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t))/\varepsilon$  fini). En d'autres termes, l'ombre courte de  $\gamma$  (i.e. l'ombre des points de  $\gamma$  atteint en un temps fini) est égale à  $\tilde{\gamma}$  tant que  $\tilde{\gamma}$  ne sort pas de  $O$ .

En effet si  $\tilde{\mathcal{V}} \equiv 0$ , ce lemme découle du théorème des accroissements finis. Sinon, on se ramène à ce cas en redressant localement  $\tilde{\mathcal{V}}$ . ce redressement étant standard, il transforme  $\mathcal{V}$  en un champ i.p.. Remarquons que ce lemme s'applique encore si  $O$  n'est pas standard, mais réunion d'ouverts standard.

*Description des trajectoires de  $\mathcal{V}$ :* Pour connaître complètement les ombres des trajectoires de  $\mathcal{V}$ , il reste à examiner comment ces trajectoires traversent le halo de  $D$ . Pour cela remarquons que, dans le demi-plan  $x > 0$ , les trajectoires de  $\mathcal{V}$  coupent celles de  $\tilde{\mathcal{V}}$  en pas-

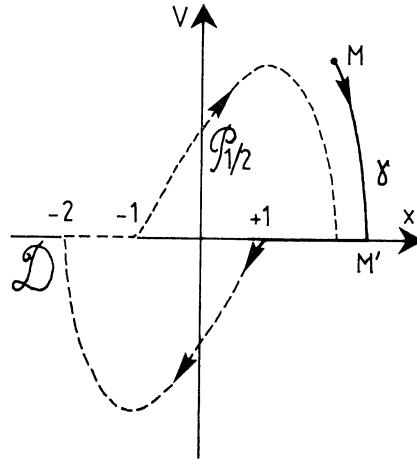


Figure 2: trajectoire d'un point  $M$  de  $\{x > 0, V > 0\}$ ; en pointillés, l'ombre  $\mathcal{P}_{1/2}$  du cycle.

sant de la région supérieure à la région inférieure, la situation étant inversée dans le demi plan  $x < 0$  (figure 1). Soit  $\mathcal{P}_{1/2}$ , la courbe, tracée en pointillés sur la figure 2, constituée de morceaux de trajectoires de  $\tilde{\mathcal{V}}$  et de segments de la droite  $D$ . Examinons la trajectoire d'un point  $M$  du quadrant  $V > 0$  et  $x > 0$ , extérieur à la courbe  $\mathcal{P}_{1/2}$ . Son ombre est confondue avec celle de la trajectoire  $\gamma$  de  $M$  pour le champ  $\tilde{\mathcal{V}}$  tant qu'elle ne rencontre pas le halo de  $D$ . Elle doit ensuite, en vertu de la remarque précédente sur la transversalité des champs  $\mathcal{V}$  et  $\tilde{\mathcal{V}}$ , couper  $D$  en un point  $M'$  du halo de  $\gamma$  (Figure 2). Puis, restant dans le halo de  $D$ , elle «longe»  $D$  dans le sens des  $x$  décroissants jusqu'à la monade du point de coordonnées  $(1, 0)$ . Toujours en vertu de la même remarque, elle doit alors quitter le halo de  $D$  pour «suivre» la courbe  $\mathcal{P}_{1/2}$ . Elle ne quitte plus ensuite le halo de  $\mathcal{P}_{1/2}$ .

On peut décrire de façon semblable les trajectoires des autres points du plan  $(x, V)$ . On en déduit que le halo de  $\mathcal{P}_{1/2}$  est stable et donc qu'il contient un cycle limite. On montre l'unicité de celui-ci, l'absence d'un autre cycle limite contenu dans le halo du point singulier  $(0, 0)$  ou infiniment grand, de la même façon que lorsque  $s = 1$  [TU].

2) *Généralisation de l'exemple 1 aux équations  $(E_0^s)$  pour lesquelles  $0 \ll s \ll 2$ .*

Lorsque l'on remplace le changement d'échelle (1) par  $V = \frac{1}{\varepsilon^{2-s}} v$  (2), on constate qu'on peut mener une étude géométrique des trajectoires, rigoureusement semblable à la précédente, pour toutes les équations  $(E_0^s)$  pour lesquelles  $0 \ll s \ll 2$ . Les champs  $\mathcal{V}_0^s$  et  $\tilde{\mathcal{V}}_0^s$  s'écrivent à l'échelle (2)

$$\mathcal{V}_0^s \begin{cases} x' = V \\ V' = (1 - x^2) V^{2s} - \varepsilon^{\frac{s}{2-s}} x \end{cases} \quad \tilde{\mathcal{V}}_0^s \begin{cases} x' = V \\ V' = (1 - x^2) V^{2s} \end{cases}$$

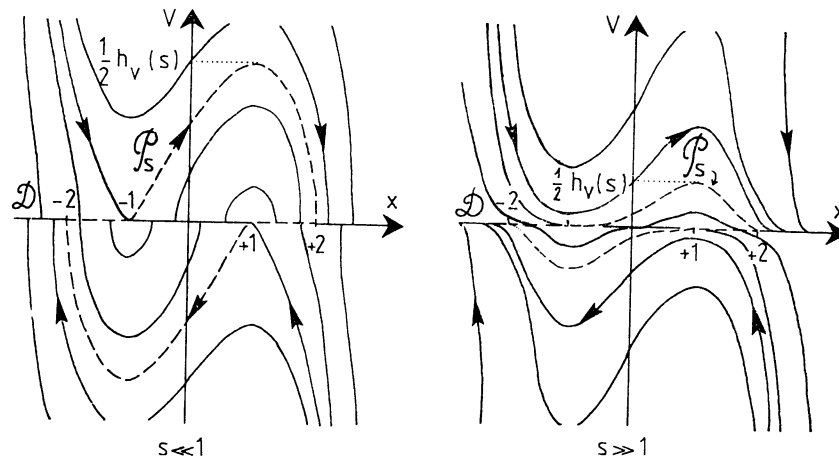


Figure 3: formes du cycle en fonction de  $s$ .

Désignons par  $\mathcal{P}_s$  les courbes tracées en pointillés sur la figure 3 constituées de morceaux de solutions de  $\tilde{\mathcal{V}}_0^s$  et de segments de la droite  $D$ . Comme précédemment  $\mathcal{P}_s$  est l'ombre d'un cycle limite unique. Remarquons que les trajectoires de  $\tilde{\mathcal{V}}_0^s$  et la droite  $D$  se rencontrent tangentiellement lorsque  $s \gg 1$  et perpendiculairement lorsque  $s \ll 1$ . Signalons enfin que pour tout  $s$  tel que  $0 \ll s \ll 2$  la «largeur» de  $\mathcal{P}_s$  est toujours égale à 4 alors que sa «hauteur» vaut:

$$h_v(s) = 2 \left[ \frac{4}{3} (2 - s) \right]^{\frac{1}{2-s}}.$$

**THÉORÈME 1:** Lorsque  $0 \ll s \ll 2$ , l'équation  $(E_0^s)$  possède une unique solution périodique d'amplitude équivalente à 4 vers laquelle tendent toutes les autres solutions, à l'exception de la solution singulière  $x \equiv 0$  qui est instable. Dans le plan des phases, à l'échelle (2), cette solution périodique est contenue dans le halo de la courbe  $\mathcal{P}_s$ .

Lorsque  $0 \ll s \ll 2$ , la situation géométrique est donc la même que dans le cas  $s = 1$ , à condition de se placer à la «bonne» échelle. Signalons que pour prouver l'instabilité du point singulier  $(0, 0)$ , il ne suffit pas de regarder la partie linéaire du champ  $\mathcal{V}_0^s$  car  $(0, 0)$  est un centre pour cette partie linéaire dès que  $s \neq 1$ . On peut conclure en examinant le champ sur les courbes de niveau de la fonction  $L(x, V) = x^2 + \varepsilon^{\frac{s}{2-s}} V^2$  par exemple.

**LIMITES DE CETTE GÉNÉRALISATION:**

a) Lorsque  $s$  est i.p. (strictement positif), le nombre  $b = \varepsilon^{\frac{s}{2-s}}$  n'est pas nécessairement i.p. (il est compris entre 0 et 1 et tend vers 1 quand  $s$  tend vers 0). L'étude précédente est encore valable pour les valeurs de  $s$  telles que  $b$  soit i.p.. Mais lorsque  $b$  n'est pas i.p., les champs  $\mathcal{V}_0^s$  et  $\tilde{\mathcal{V}}_0^s$  ne sont plus infiniment proches. Dans ce cas, il faudra mener une autre étude (voir plus loin: (IV)).

b) Lorsque  $s \simeq 2$  (et  $s < 2$ ) les ombres des trajectoires de  $\mathcal{V}_0^s$  ont pour équations dans les demi-plans  $V > 0$  et  $V < 0$

$$V(x) = \begin{cases} e^{(x - x^2/3 + c)} & \text{si } V > 0 \\ e^{-(x - x^2/3 + c)} & \text{si } V < 0 \end{cases}$$

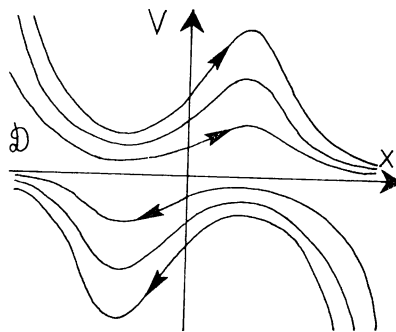


Figure 4: ombres des trajectoires de  $\mathcal{V}_0^s$  lorsque  $s \simeq 2$ .

En effet lorsque  $s \simeq 2$  (et  $V > 0$ )

$$\left[ (2-s) \left( x - \frac{x^3}{3} + c \right) \right]^{1/(2-s)} \simeq e^{(x - x^3/3 + c)}.$$

Les courbes  $\mathcal{P}_s$ , qui apparaissent dans les dessins précédents (Figures 2 et 3), ont «disparu» dans le halo de  $D$  (leur «hauteur» tendant vers 0 lorsque  $s$  tend vers 2). Les raisonnements du type précédent ne permettent plus de montrer l'existence d'un cycle. On peut seulement dire que si un cycle limite existe (comme nous le verrons plus loin) et si sa «largeur» n'est pas i.g., il aura, à cette échelle (2), une «hauteur» i.p.

## II. CAS OÙ $s$ EST VOISIN DE 2 OU SUPÉRIEUR À 2: EXPLOSION DU CYCLE

Au chapitre précédent il est apparu, en examinant la «hauteur» du cycle lorsque  $s \ll 2$ , que l'échelle (2) ne convenait plus pour l'étude des trajectoires de  $\mathcal{V}_0^s$  lorsque  $s$  devient infiniment proche de 2. Nous allons voir, dans ce chapitre, tout d'abord sur deux exemples, puis dans le cas général, que, pour de telles valeurs de  $s$ , il convient, pour faire «apparaître» les phénomènes dans la partie finie du plan des phases, de choisir un changement d'échelle de type «exponentiel».

- 1) *Exemple 2: l'équation*  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1)(x')^{[2]} + x = 0$  (rappel:  $(x')^{[2]} = \text{sgn}(x') \cdot |x'|^2$ )

Soit  $u$  le champ de vecteurs correspondant dans le plan des phases:

$$u \begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{1}{\varepsilon} ((1 - x^2)(v)^{[2]} - x) \end{cases}$$

et considérons le changement d'échelle  $U = v^{[s]}$  (3)

$$i.e. \quad U = \begin{cases} v^s & \text{si } v > 0 \\ -|v|^s & \text{si } v < 0 \\ 0 & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

Il transforme le champ  $u$  en un champ  $\mathcal{U}$ , vertical sur la droite  $\{U = 0\}$  et égal en dehors de cette droite à:



$$\mathcal{U} \begin{cases} x' = U^{[1/\varepsilon]} \\ U' = (1 - x^2) U^{[1/\varepsilon + 1]} - x |U|^{1 - 1/\varepsilon} \end{cases}$$

Les trajectoires de  $\mathcal{U}$ , dans le complémentaire de la droite  $\{U = 0\}$  sont donc solutions de l'équation:

$$\frac{dU}{dx} = (1 - x^2) |U| - x U^{[1 - 2/\varepsilon]}$$

Comme  $U^{[1 - 2/\varepsilon]}$  est i.p. si  $|U| \gg 1$  (et i.g. si  $|U| \ll 1$ ), on connaît, en appliquant le lemme de l'ombre courte et par intégration directe, les ombres des trajectoires de  $\mathcal{U}$  dans le complémentaire des halos des droites  $D^+$  et  $D^-$  d'équation  $U = 1$  et  $U = -1$  respectivement:

- Dans la bande  $\mathcal{B}$  définie par  $|U| \ll 1$ , les ombres des trajectoires sont verticales.
- Par contre dans la région  $\mathcal{R}$  définie par  $|U| \gg 1$ , elles ont pour équations:

$$U(x) = \begin{cases} e^{(-\frac{x^2}{3} + x + c)} & \text{si } U > 0 \\ -e^{-(-x^2/3 + x + c)} & \text{si } U < 0, c \in \mathbb{R} \text{ (Figure 5)} \end{cases}$$

(le sens de parcours est celui des  $x$  croissants si  $U > 0$  et décroissants si  $U < 0$ ).

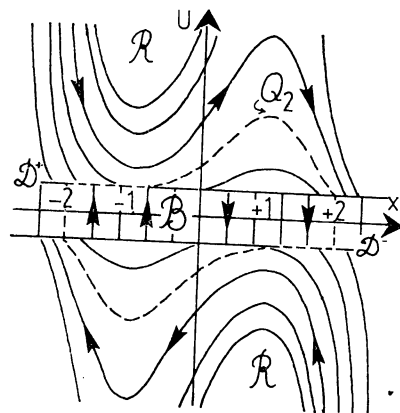


Figure 5: ombres des trajectoires de  $\mathcal{U}$ ; en pointillés, l'ombre  $Q_2$  du cycle.

Pour connaître complètement les ombres des trajectoires de  $\mathcal{U}$ , il reste à examiner comment ces trajectoires traversent les halos des droites  $D^+$  et  $D^-$ . En comparant, lorsque  $|U| > 1$ , la pente du champ  $\mathcal{U}$  à celle du champ infiniment proche  $\tilde{\mathcal{U}}: \begin{cases} x' = 1 \\ U' = (1 - x^2) |U| \end{cases}$ , on déduit, comme dans l'exemple 1, que toutes les trajectoires de  $\mathcal{U}$  qui proviennent d'un point fini du plan sont contenues après un temps fini dans le halo de la courbe  $Q_2$  représentée en pointillés sur la figure 5.

Il existe donc, comme lorsque  $s \ll 2$ , un cycle limite, contenu dans le halo de la courbe  $Q_2$ , qui est stable (et donc unique) pour les mêmes raisons que lorsque  $s = 1$ . A l'exception de la solution singulière  $x = U = 0$ , toutes les solutions de  $\mathcal{U}$  s'enroulent sur ce cycle.

2) *Exemple 3: l'équation  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1)(x')^{[2+\varepsilon]} + x = 0$*

Le début de l'étude est le même que pour l'exemple précédent: on utilise encore le changement d'échelle (3)  $U = v^{[\varepsilon]}$  qui transforme le champ

$$\mathcal{U} \begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{1}{\varepsilon} ((1 - x^2)(v)^{[2+\varepsilon]} - x) \end{cases}$$

en un champ  $\mathcal{W}$ , vertical sur la droite  $\{U = 0\}$  et égal en dehors de cette droite à

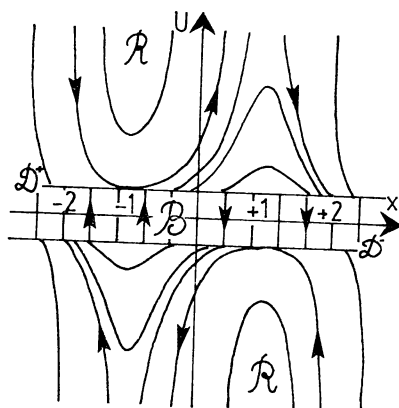
$$\mathcal{W} \begin{cases} x' = U^{[1/\varepsilon]} \\ U' = (1 - x^2) U^{\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}} - x |U|^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \end{cases}$$

Ses trajectoires sont donc solutions lorsque  $U \neq 0$  de l'équation:

$$\frac{dU}{dx} = (1 - x^2) U^2 - x U^{1-\frac{2}{\varepsilon}}$$

Comme  $U^{1-\frac{2}{\varepsilon}}$  est i.p. si  $|U| \gg 1$  (et i.g. si  $|U| \ll 1$ ), on en déduit que les ombres des trajectoires sont verticales dans la bande  $\mathcal{B}$  et ont pour équations dans  $\mathcal{R}$ :

$$U(x) = - \left( -\frac{x^3}{3} + x + c \right)^{-1}, c \in \mathbf{R}$$

Figure 6: ombres des trajectoires de  $\mathcal{W}$ .

La traversée du halo des droites  $D^+$  et  $D^-$  se faisant de la façon habituelle, on constate que toutes les trajectoires tendent vers l'infini ou, plus précisément, que leurs ombres courtes atteignent des points d'ordonnée i.g.. Cependant cela ne prouve pas encore que ces trajectoires sont non bornées car, il pourrait exister un cycle qui, à l'échelle  $(x, U)$  passe par des points d'ordonnées i.g. Pour montrer qu'un tel cycle n'existe pas, on peut, par exemple «compactifier» le plan  $\mathbf{R}^2$  des  $(x, U)$  en la bande  $\mathbf{R} \times [-\pi/2, +\pi/2]$  par le changement de variable  $U = \operatorname{tg} \hat{U}$ . On constate alors que le champ, prolongé aux droites d'équation  $\hat{U} = \pm \pi/2$ , est transverse à celles-ci en tout point d'abscisse différent de  $+1$  ou  $-1$ .

### 3) Généralisation des exemples 2 et 3 aux équations $(E_0^s)$ pour lesquelles $s \geq 2$

Pour toutes les équations  $(E_0^s)$  correspondant à des valeurs de  $s \geq 2$ , il est possible de faire une étude semblable à celle des exemples 2 et 3 en se plaçant toujours à l'échelle (3)  $U = v^{[\varepsilon]}$ . L'équation s'écrit, pour  $U \neq 0$ ,  $\frac{dU}{dx} = (1 - x^2) |U|^{\frac{s-2}{\varepsilon} + 1} - x U^{1 - \frac{2}{\varepsilon}}$ .

Les ombres des trajectoires sont encore verticales dans la bande  $B$  et sont les ombres (1) dans  $\mathcal{R}$  (lorsque  $s \neq 2$ ) des combes;

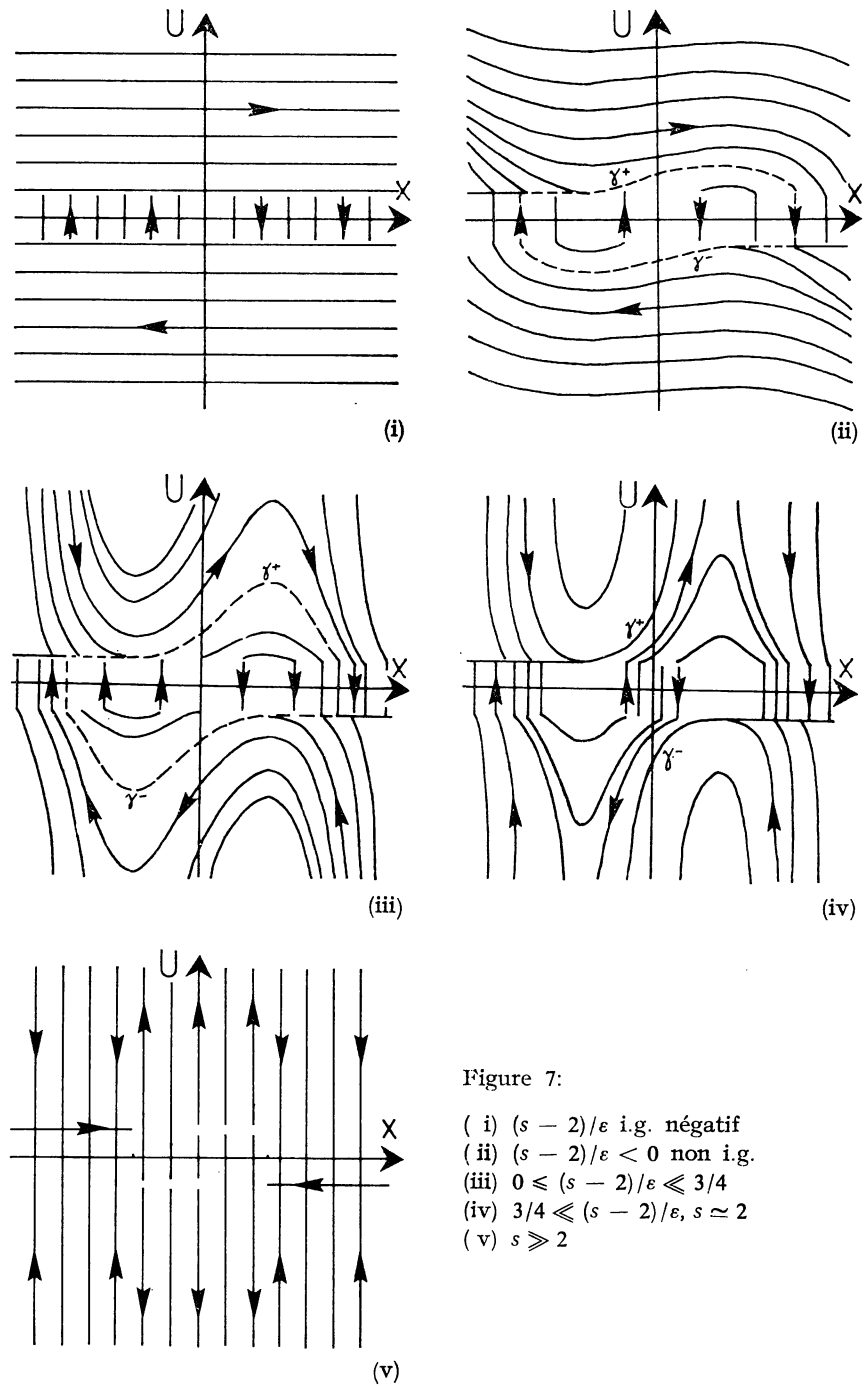


Figure 7:

- ( i )  $(s - 2)/\epsilon$  i.g. négatif
- ( ii )  $(s - 2)/\epsilon < 0$  non i.g.
- ( iii )  $0 \leq (s - 2)/\epsilon \leq 3/4$
- ( iv )  $3/4 \leq (s - 2)/\epsilon, s \approx 2$
- ( v )  $s \geq 2$

$$U(x) = \left[ \frac{2-s}{\varepsilon} \left( -\frac{x^3}{3} + x + c \right) \right]^{\frac{\varepsilon}{2|1-s|}}, c \in \mathbf{R} (*).$$

Parmi ces ombres, la courbe  $\gamma^+$  tangente à la droite  $D^+$  au point d'abscisse  $-1$  et la courbe  $\gamma^-$  tangente à la droite  $D^-$  au point d'abscisse  $1$  jouent un rôle particulier: en effet on constate (Figure 7) que lorsque ces courbes sont connexes, le champ possède un cycle limite contenu dans le halo de la courbe  $Q$ , (Figures 5 et 7 (ii) ou (iii)) constituée de segments de  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ ,  $D^+$  et  $D^-$  et de segments verticaux contenus dans  $B$  (cas de l'exemple 2). Au contraire, lorsque  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  possèdent, en un point d'abscisse  $x_0$ , tel que  $x_0 \ll 1$ , une asymptote verticale (cas de l'exemple 3) un tel cycle n'existe plus: le cycle «explose» pour une valeur  $s_0$  de  $s$  telle que  $\frac{s_0 - 2}{\varepsilon} \simeq \frac{3}{4}$ .

On remarquera aussi que dès que  $s > 2$ , il existe, pour tout  $x_0$ , une courbe d'équation (\*) qui possède une asymptote verticale d'équation  $x = x_0$ . On en déduit qu'il existe alors des trajectoires non bornées, en remarquant qu'aux points où  $x < 0$  et  $U > 0$  (resp.  $x > 0$  et  $U < 0$ ) le champ est plus «ascendant» (resp. plus «descendant») que les courbes d'équation (\*). Mais lorsque  $\frac{s-2}{\varepsilon}$  est i.p., les seules trajectoires non bornées sont des trajectoires de points d'ordonnées i.g.

#### LIMITES DE CETTE GÉNÉRALISATION:

a) Lorsque  $s < 2$  et  $s \simeq 2$ , on déduit du même changement d'échelle que les ombres des trajectoires vérifient encore les équations (\*) dans la région  $\mathcal{R}$ . Donc lorsque  $\frac{2-s}{\varepsilon}$  est fini ou i.p., la situation est la même que dans le cas où  $s = 2$ . Par contre, lorsque  $\frac{2-s}{\varepsilon}$  est i.g., les ombres des trajectoires sont horizontales dans cette région (Figure 7(i)). On ne peut donc pas conclure, par l'examen du champ à cette échelle, qu'il possède un cycle. Tout au plus peut-on affirmer qu'un tel cycle aurait à cette échelle, si sa «largeur» n'est pas i.g., une «hauteur» équivalente à 2.

(<sup>1</sup>) On appliquera encore le lemme de l'ombre courte, bien qu'ici on ne compare pas le champ considéré dans  $\mathcal{R}$  à un champ standard, car ce dernier est infiniment proche d'un champ standard.

b) Lorsque  $s \gg 2$ , au contraire, les ombres des trajectoires, vérifiant dans  $\mathcal{R}$  les équations (\*), sont verticales dans tout le complémentaire des halos de  $D^+$  et  $D^-$  (Figure 7(v)). Il est facile de voir alors, comme dans l'exemple 3, que le champ est totalement instable.

THÉORÈME 2: (i) Lorsque  $\frac{2-s}{\varepsilon}$  est fini et  $\frac{s-2}{\varepsilon} \ll \frac{3}{4}$ , l'équation  $(E_0^s)$  admet un cycle limite contenu dans le halo de  $Q_s$  à l'échelle  $(x, U)$ . Son amplitude (en  $x$ ) est équivalente à 4 et son amplitude en  $U$  tend vers l'infini quand  $s$  tend vers une valeur  $s_0$  telle que  $\frac{s_0-2}{\varepsilon} \simeq \frac{3}{4}$ . Si de plus  $s \leq 2$ , toutes les trajectoires (non singulières) s'enroulent sur ce cycle, alors que si  $s > 2$  il existe des trajectoires non bornées.

(ii) Lorsque  $\frac{s-2}{\varepsilon} \gg \frac{3}{4}$ , l'équation  $(E_0^s)$  ne possède pas de cycle et toutes les trajectoires (non singulières) sont non bornées.

#### 4) Compléments et remarques.

Valeurs de  $s$  pour lesquelles les études précédentes n'aboutissent pas:

Lorsque  $s$  est équivalent à 2 et  $\frac{2-s}{\varepsilon}$  est i.g., ni l'étude du champ à l'échelle (2), ni l'étude à l'échelle (3) ne permet de montrer l'existence d'un cycle. Pour l'établir, il convient de faire un nouveau changement d'échelle du même type que celui utilisé dans [RTU] pour prouver l'existence d'un cycle pour l'équation  $(E_0^1)$  de VAN DER POL, quelque soit  $\varepsilon$ , i.p. ou non.

L'équation  $(E_0^s)$ :  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1)(x')^{[s]} + x = 0$  se ramène dans le plan  $(x, V)$  au champ:

$$\mathcal{V}_0^s \begin{cases} x' = V \\ V' = (1 - x^2)(V)^{[s]} - x \varepsilon^{\frac{s}{2-s}} \end{cases}$$

Considérons le changement d'échelle  $X = \alpha x, W = \beta V$  (4) avec  $\alpha$  i.p. et  $\beta = \alpha^{\frac{3}{2-s}}$ . Dans ce «rapetissement» le champ  $\mathcal{V}_0^s$  s'écrit, après multiplication de ses composantes par  $\beta/\alpha$ :

$$\mathcal{W}_0^s \begin{cases} X' = W \\ W' = (\alpha^2 - X^2) (W)^{[s]} - \frac{s}{\varepsilon^{2-s}} \alpha^2 \left(\frac{1+s}{2-s}\right) X \end{cases}$$

En tout point fini du plan  $(X, W)$ , le champ  $\mathcal{W}_0^s$  est infiniment proche du champ

$$\tilde{\mathcal{W}}_0^s \begin{cases} X' = W \\ W' = (\alpha^2 - X^2) (W)^{[s]} \end{cases}$$

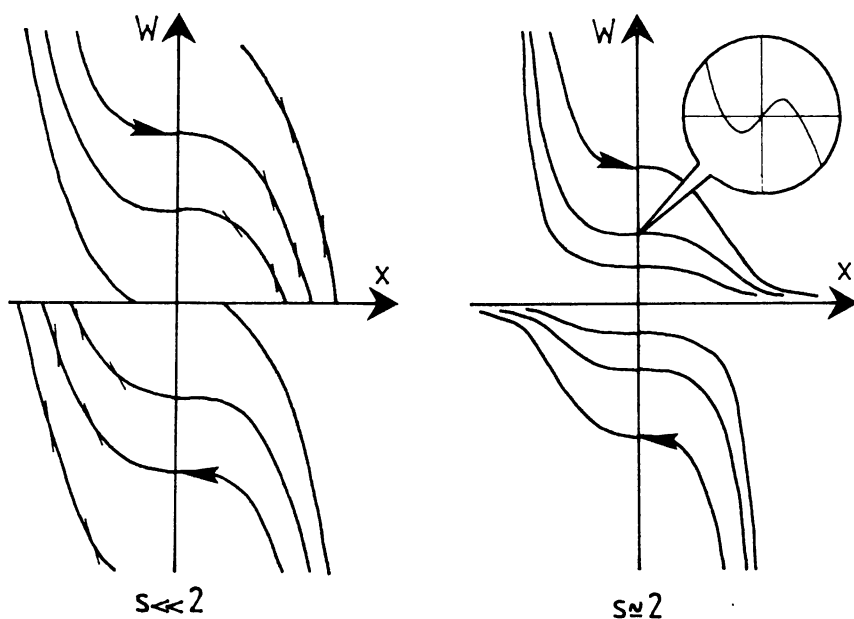


Figure 8: ombres des trajectoires de  $\tilde{\mathcal{W}}_0^s$  et segments de trajectoires de  $\mathcal{W}_0^s$ : quand  $s \ll 2$ , la monade de  $(0, 0)$  est stable.

Donc, en vertu du lemme de l'ombre courte, les trajectoires finies de  $\mathcal{W}_0^s$  auront même ombre, hors du halo de la droite  $W = 0$ , que les trajectoires de  $\tilde{\mathcal{W}}_0^s$  (Figure 8).

Quand  $s \simeq 2$ , on voit, en remarquant que le champ  $\mathcal{W}_0^s$  est «plus raide» que  $\tilde{\mathcal{W}}_0^s$  (Figure 8) et par les raisonnements habituels, que la monade de  $(0, 0)$  est stable. Comme la singularité  $(0, 0)$  est instable, on redémontre ainsi l'existence d'un cycle. Quand  $s \simeq 2$  (et  $s < 2$ ),

on constate que toutes les trajectoires se rapprochent de l'axe  $W = 0$ , sauf lorsqu'elles passent dans le halo de l'axe  $X = 0$  où elles s'en écartent infiniment peu. On refait un changement d'échelle  $Z = \delta X$ , en choisissant  $\delta$  de façon que dans le plan  $(Z, W)$  les trajectoires aient pour ombres des verticales, sauf dans le halo de l'axe  $W = 0$  (Figure 9) de façon que dans les parties de ce halo où  $WZ > 0$  et  $Z \simeq 0$ , la pente du champ soit i.g. La monade de  $(0, 0)$  est alors stable, d'où l'existence d'un cycle.

On déduit de ce qui précède que pour  $\varepsilon$  i.p. l'équation  $(E_0^s)$  possède un cycle limite stable pour tout  $s \in ]0, 2[$ , ce que nous cherchions à établir. Mais de plus, on voit facilement qu'il n'est pas indispensable que  $\varepsilon$  soit i.p.

*L'existence d'un cycle pour  $s \in ]0, 2[$  est donc également prouvée pour tout  $\varepsilon$ , i.p. ou non.*

Remarquons cependant que l'ombre du cycle étant à l'échelle (4) réduite au point singulier  $(0, 0)$ , ce raisonnement ne donne aucun renseignement descriptif sur ce cycle, en particulier sur son amplitude.

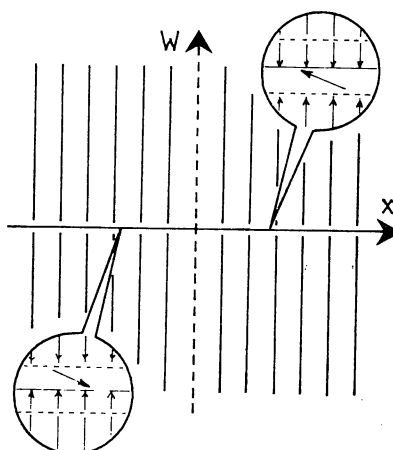


Figure 9

*Remarque sur la «hauteur» du cycle:*

Nous avons vu que la «hauteur» du cycle (ou amplitude en vitesse) est équivalente, à l'échelle  $(x, V)$ , à  $h_v(s) = 2 \left( \frac{4}{3} (2 - s) \right)^{\frac{1}{2-s}}$ . Donc,



en revenant à l'échelle de départ  $(x, v)$  elle sera égale à  $h(s) = (h_v(s) + \delta_s) \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2-s}}$  où  $\delta_s$  est le nombre i.p. représentant la différence de «hauteur» entre le cycle et son ombre  $\mathcal{P}_s$  à l'échelle  $(x, V)$ . Il est donc impossible d'évaluer, sans renseignements supplémentaires sur  $\delta_s$ , la «hauteur» réelle du cycle, c'est à dire son amplitude en vitesse; en particulier, le fait que  $h_v$  tende vers 0 quand  $s$  tend vers 2 ne prouve pas qu'il en soit de même pour cette amplitude. L'étude du champ à l'échelle  $(x, U)$  lorsque  $s \simeq 2$  ne fournit pas de renseignements plus précis sur celle-ci.

Cependant l'amplitude en vitesse du cycle tend nécessairement vers l'infini lorsque  $s$  croît vers la valeur  $s_0$  pour laquelle il y a explosion du cycle. Les études numériques faites pour les équations  $\frac{1}{20} x'' + (x^2 - 1) x'^{[s]} + x = 0$  avec  $s = 1,9$  et  $s = 1,91$  rendent compte de ce phénomène. On constate que pour des valeurs de  $s$  proche de 2, l'amplitude en vitesse du cycle atteint des valeurs si élevées que cela peut faire croire, lors d'une exploration numérique trop rapide, à l'absence de cycle; par exemple

pour  $s = 1,9$   $h \approx 625\,000$  et pour  $s = 2$   $h \approx 1,274 \times 10^{12}$  (1)

*Remarque sur l'unicité du cycle:*

Lorsque  $s = 1$ , la méthode utilisée pour montrer l'unicité du cycle dans le halo de  $\mathcal{P}$  [TU] consiste à montrer, en calculant son exposant caractéristique I, que tout cycle contenu dans ce halo est stable.

Le même calcul, dans le cas où  $0 \ll s \ll 2$  donne, pour cet exposant:

$$\varepsilon I \simeq 2 \int_{-2}^{+2} s(1-x^2) v^{[s-2]} dx$$

On conclut donc de la même façon en remarquant que, dans les portions du cycle où  $(1-x^2) > 0$ ,  $v$  est i.g.. Donc l'intégrale sur ces portions est i.p.. Par contre, elle n'est pas i.p. sur les portions où  $(1-x^2) < 0$ . I est donc négatif.

Lorsque  $s \simeq 2$ , ce raisonnement n'aboutit pas, sauf dans le cas où  $s = 2$  car on sait calculer l'intégrale considérée (exemple 2).

---

(1) Résultats numériques obtenus par J. L. CALLOT (Oran).

### III. CAS OÙ $a \neq 0$ : LES $s$ -CANARDS.

Introduisons dans l'équation le paramètre supplémentaire  $a$  (que l'on supposera positif). L'équation  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1) x'^{[s]} + x = a$  devient dans le plan des phases

$$\mathfrak{v}_a^s \begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{1}{\varepsilon} ((1 - x^2) v^{[s]} + a - x) \end{cases}$$

Remarquons que, comme dans le cas où  $s = 1$ , la solution singulière  $x \equiv a$  est, pour tout  $s > 0$ , instable lorsque  $a < 1$  et stable lorsque  $a \geq 1$ . Pour l'établir, il suffit d'examiner pour  $a \neq 1$  la pente du champ sur les courbes de niveau de la fonction  $L(x, v) = (x - a)^2 + \varepsilon v^2$ . Pour le cas où  $a = 1$ , on peut reprendre le raisonnement fait pour  $s = 1$  [CDD].

#### 1) Les $s$ -canards à l'échelle $(x, V)$

Soit  $\mathcal{V}_a^s$  l'expression du champ  $\mathfrak{v}_a^s$  à l'échelle (2)  $V = \frac{1}{\varepsilon^{2-s}} v$

$$\mathcal{V}_a^s \begin{cases} x' = V \\ V' = (1 - x^2) V^{[s]} + \varepsilon^{\frac{s}{2-s}} (a - x) \end{cases}$$

Ce champ est infiniment proche, en tout point fini du plan  $(x, V)$ , du champ:

$$\tilde{\mathcal{V}}_a^s \begin{cases} x' = V \\ V' = (1 - x^2) V^{[s]} \end{cases}$$

Donc, en vertu du lemme de l'ombre courte, les ombres des trajectoires en dehors du halo de la droite  $D$  d'équation  $V = 0$  sont les mêmes que pour  $a = 0$  (Figure 3). Seule la «traversée» du halo de la droite  $D$  peut être modifiée lorsque  $a \neq 0$ .

#### Description des trajectoires de $\mathcal{V}_a^s$ (Figure 10)

Elle est tout à fait semblable au cas  $s = 1$ : en comparant la pente des champs  $\mathcal{V}_a^s$  et  $\tilde{\mathcal{V}}_a^s$ , on constate que lorsque  $a \ll 1$ , la «traversée»

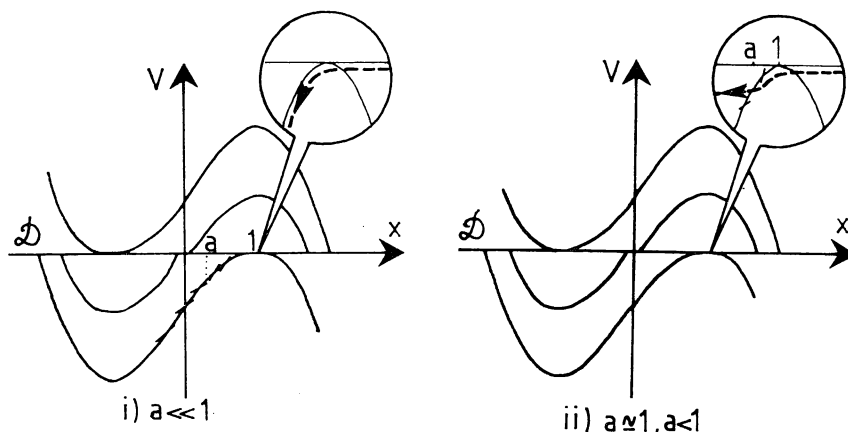


Figure 10: comportement respectif des trajectoires de  $\mathcal{V}_a^s$  et de  $\tilde{\mathcal{V}}_a^s$  dans la monade du point  $(1, 0)$  selon que  $a \simeq 1$  ou  $a \ll 1$ .

du halo de  $D$  s'effectue comme lorsque  $a = 0$  (figure 10(i)). Au contraire, lorsque  $a < 1$  et  $a \simeq 1$ , une trajectoire de  $\mathcal{V}_a^s$ , qui a coupé  $D$  en un point d'abscisse strictement supérieure à 1 et qui «longe»  $D$  de gauche à droite jusque dans la monade du point de  $D$  d'abscisse 1 (qui, dans ce cas, contient le point singulier) peut continuer à «longer»  $D$  au delà de ce point (Figure 10(ii)). Enfin lorsque  $a \geq 1$ , toutes les trajectoires tendent vers le point singulier  $(a, 0)$ .

*Définition des s-canards:* On appellera: <sup>(1)</sup>

- . *s-grand-cycle* une trajectoire périodique de  $\mathcal{V}_a^s$  contenue dans le halo de la courbe  $\mathcal{P}_s$  définie au chapitre I.

- . *s-canard* une trajectoire périodique de  $\mathcal{V}_a^s$  dont l'ombre, distincte de  $\mathcal{P}_s$  et non i.p. est donc de l'un des types indiqués sur la figure 11.

- . *cycle infiniment petit* une trajectoire périodique de  $\mathcal{V}_a^s$  contenue dans la monade du point singulier  $(a, 0)$ .

<sup>(1)</sup> On reprend la terminologie introduite dans le cas  $s = 1$ , bien que, dans le cas général, elle ne soit plus très évocatrice!

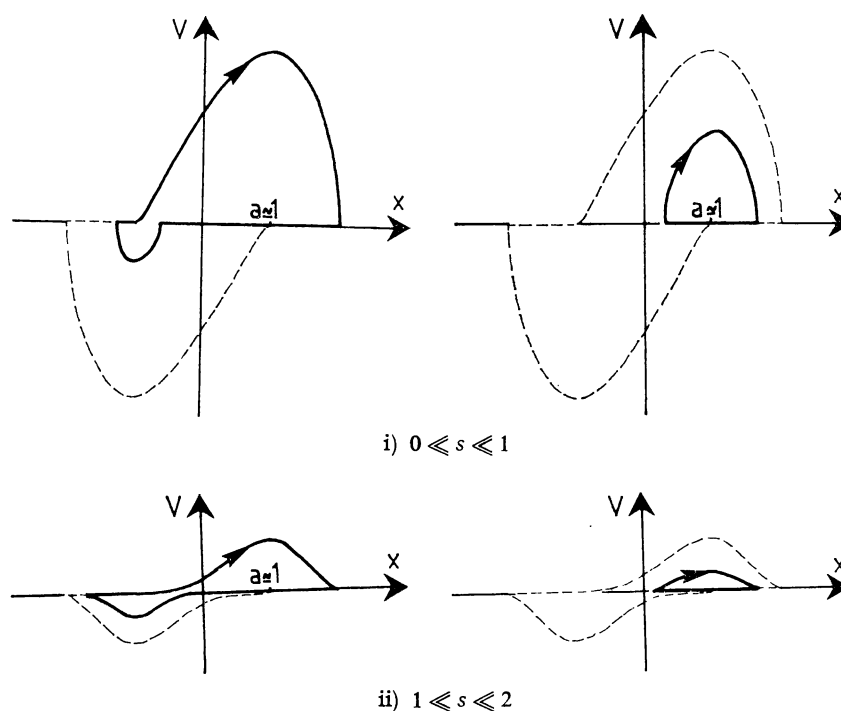


Figure 11: ombres des  $s$ -canards à l'échelle  $(x, V)$

**THÉORÈME 3:** Supposons que  $0 \ll s \ll 2$ :

(i) Si  $0 \leq a \ll 1$ , le champ  $\mathcal{V}_a^s$  possède un unique cycle limite d'amplitude équivalente à 4, contenu dans le halo de  $\mathcal{P}_s$  et vers lequel tendent toutes les trajectoires à l'exception du point singulier  $(a, 0)$  qui est instable.

(ii) Si  $a < 1$  et  $a \simeq 1$ , le champ  $\mathcal{V}_a^s$  possède un cycle limite qui est soit un  $s$ -grand cycle, soit un  $s$ -canard, soit un cycle i.p. vers lequel tendent toutes les trajectoires à l'exception du point singulier  $(a, 0)$  qui est encore instable. L'amplitude de la solution périodique correspondante a une partie standard comprise entre 0 et 4. De plus, pour tout  $s$ , et pour toute amplitude donnée, de partie standard comprise strictement entre 0 et 4, il existe une valeur de  $a$  telle que l'équation correspondante ait une solution périodique de cette amplitude.

(iii) Si  $a \geq 1$ , le champ  $\mathcal{V}_a^s$  n'a pas de cycle limite et la singularité est stable.

La démonstration de ce théorème est en tout point semblable à celle du cas  $s = 1$ , en particulier pour ce qui est de l'existence de  $s$ -canards de toute «largeur».

*Valeurs de  $a$  pour lesquelles le cycle est un  $s$ -canard:*

L'un des phénomènes les plus remarquables mis en évidence avec l'existence des canards lorsque  $s = 1$ , est l'extrême rareté des valeurs de  $a$  pour lesquelles de tels canards existent [CDD]. On retrouve cette propriété pour les  $s$ -canards:

THÉORÈME 4: Pour que le champ  $\mathcal{V}_a^s$  possède pour cycle un  $s$ -canard il faut que:  $\frac{1-a}{\varepsilon} \simeq \varphi(s)$ , où  $\varphi(s) = 1/(2^{\frac{s+2}{s}} \cdot s)$ .

Ce théorème montre la brutalité <sup>(1)</sup> avec laquelle les équations  $E_a^s$  passent, lorsque  $a$  varie, de la situation où elles ont une solution d'amplitude équivalente à 4 à la situation où la solution périodique est d'amplitude i.p.. Sa démonstration est la même que dans le cas  $s = 1$ .

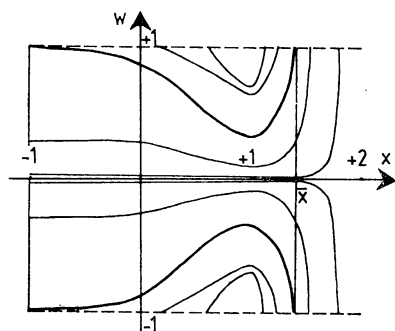


Figure 12

#### COMPORTEMENT DES TRAJECTOIRES AU VOISINAGE D'UN $s$ -CANARD:

Pour étudier l'évolution, en fonction de  $s$ , du comportement des trajectoires au voisinage d'un  $s$ -canard, nous généralisons l'étude

<sup>(1)</sup> Reprenant une remarque faite par J. L. CALLOT pour le cas  $s = 1$ , on peut même affirmer que l'ensemble des valeurs de  $a$  pour lesquelles le cycle de  $(E_a^s)$  est un  $s$ -canard a une longueur inférieure à  $\varepsilon^n$  pour tout  $n$  fini.

faite dans  $[B]$  pour le cas  $s = 1$ . Elle consiste à faire un agrandissement au voisinage d'une trajectoire  $\gamma$  de  $\mathcal{V}_a^s$  dont l'ombre est confondue avec  $D$  sur un segment  $[x_0, x_1]$  tel que  $x_0 \ll 1 \ll x_1$ . Une telle solution existe dès que le cycle est un  $s$ -canard. Soit  $v = f(x)$  l'équation de  $\gamma$  dans le plan des phases. On pose  $w = (v - f(x))^{[s]}$  et on examine les ombres des trajectoires du champ dans le plan  $(x, w)$  pour des valeurs de  $x$  comprises entre  $x_0$  et  $x_1$ . D'un bref calcul, il ressort qu'elles sont solutions de l'équation linéaire

$$w' = s(x+1)^{2/s}(x-1)w.$$

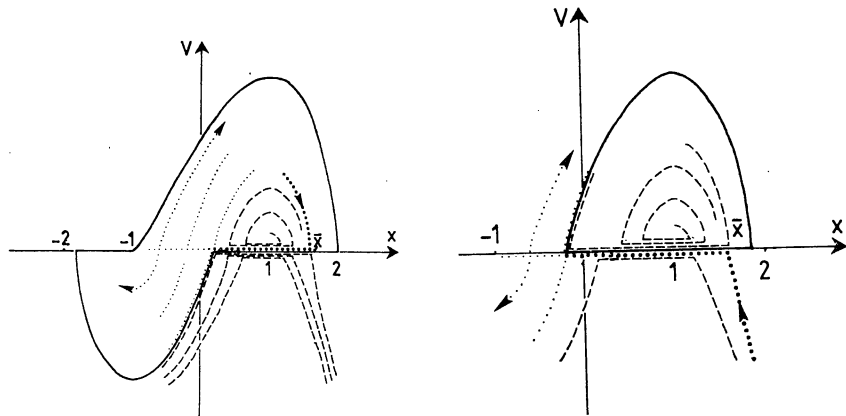


Figure 13: ombres des trajectoires voisines d'un  $s$ -canard

Supposons alors que  $\gamma$  est un morceau du  $s$ -canard et notons  $x_b, x_c$  et  $x_q$  les abscisses des trois points anguleux de son ombre dans le plan  $(x, V)$  ( $x_b = x_c$  pour un petit  $s$ -canard (à droite sur les figures 11(i) et 11(ii)). On voit en choisissant  $x_0 = x_c$  et  $x_1 = x_q$  qu'il existe une valeur  $\bar{x}$ ,  $1 \leq \bar{x} \leq 2$ , telle que les trajectoires qui pénètrent dans le halo du  $s$ -canard en un point d'abscisse  $x$ ,  $1 \ll x \ll \bar{x}$ , ressortent de ce halo (pour y entrer à nouveau «après un tour») alors que celles qui pénètrent dans ce halo en un point d'abscisse  $x$ ,  $\bar{x} \ll x \ll 2$ , ne le quittent plus (Figure 13).

Pour  $s = 1$ , on a  $\bar{x} = \frac{5}{3}$ . On montre en résolvant l'équation ci-

dessus que, lorsque  $s$  tend vers 0,  $\bar{x}$  tend vers 1 alors que lorsque  $s$  tend vers 2,  $\bar{x}$  tend vers  $x_q$ . Autrement dit, lorsque  $s$  est proche

de 0, presque toutes les trajectoires entrent définitivement dans le halo du cycle, alors qu'au contraire lorsque  $s$  est proche de 2, presque toutes en ressortent après y être entrées.

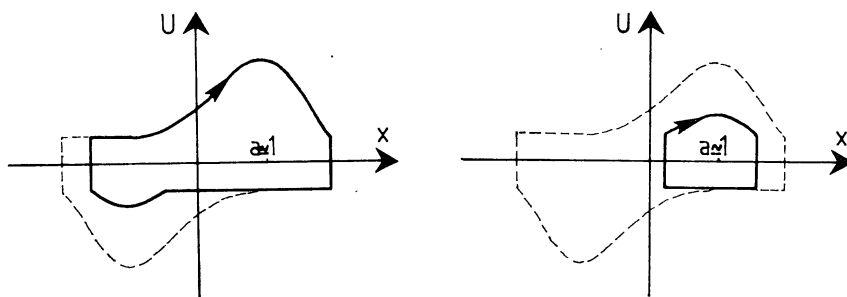


Figure 14: ombres des  $s$ -canards à l'échelle  $(x, U)$

2) Les  $s$ -canards à l'échelle  $(x, U)$

A l'échelle (3)  $U = v^{[\varepsilon]}$ , on remarque, en examinant le champ correspondant qui est vertical si  $U = 0$  et égal, en dehors de la droite  $\{U = 0\}$  à:

$$\begin{cases} x' = U^{[1/\varepsilon]} \\ U' = (1 - x^2) U^{\frac{[s-1]}{\varepsilon}} + (a - x) |U|^{1 - \frac{1}{\varepsilon}} \end{cases}$$

que la présence de  $a \neq 0$  ne change pas les ombres des trajectoires hors des halos des droites  $D^+$  et  $D^-$  (Figure 7). Ce n'est donc que lors de la «traversée» des halos de ces droites que les trajectoires pourront être «sensiblement» modifiées lorsque  $a \neq 0$ .

Les résultats obtenus après examen de ces «traversées» en fonction de  $a$ , lorsque le champ correspondant avec  $a = 0$  possède un cycle (c'est à dire lorsque  $\frac{s-2}{\varepsilon} \ll \frac{3}{4}$ ), sont semblables au cas précédent. Les  $s$ -canards, à cette échelle, auront les formes indiquées sur la figure 14.

3) Cas où  $s \simeq 2$  et où l'équation  $(E_0^s)$  ne possède pas de cycle: exemple 4.

Étudions l'équation  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1) (x')^{[2+\varepsilon]} + x = a$   $a < 1$ . Lorsque  $a \ll 1$ , on constate que, comme lorsque  $a = 0$ , la trajectoire  $\gamma$

d'un point  $M$  du halo de  $D^-$  d'abscisse  $x > 1$  doit quitter le halo de  $D^+$  au point  $A$  d'abscisse 1 pour suivre celui de  $\gamma^-$  et donc tendre vers l'infini (Figure 15).

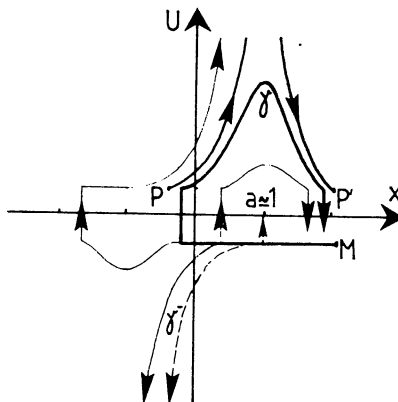


Figure 15: existence d'un cycle lorsque  $s = 2 + \varepsilon$  pour certaines valeurs de  $a \simeq 1$

Par contre, lorsque  $a \simeq 1$  cette trajectoire peut continuer à longer  $D^-$  au delà de  $A$ . Elle peut ensuite quitter le halo de  $D^-$  vers le bas ou vers le haut. Dans le premier cas, elle sera non bornée. Sinon, on voit qu'elle peut, puisque la singularité  $(a, 0)$  est instable, «piéger» un cycle (Figure 15). Remarquons que la «largeur» d'un tel cycle est inférieure à la longueur du segment  $PP'$  indiqué sur la figure 15, mais que la «hauteur» peut être arbitrairement grande. Ce cycle n'est pas symétrique par rapport à zéro et est toujours contenu dans le halo du demi plan  $\{U \geq -1\}$ .

On prouve l'existence de valeurs de  $a$  pour lesquelles l'équation considérée possède un cycle de la même manière que l'existence de  $s$ -canards lorsque  $s \ll 2$ : lorsque  $a = 0$ , la trajectoire du point  $M$  tend, dans le halo de  $\gamma^-$  vers l'infini; lorsque  $a = 1$ , elle tend vers le point singulier  $(a, 0)$ ; par dépendance continue du paramètre  $a$ , toutes les solutions intermédiaires doivent exister.

Le phénomène décrit dans l'exemple précédent se généralise à toutes les valeurs de  $s \geq 2$ :

**THÉORÈME 5:** Pour tout  $s \geq 2$ , il existe des valeurs de  $a$  pour lesquelles l'équation  $(E_a^s)$  possède une solution périodique. Lorsque l'équation



correspondante  $(E_0^s)$  (avec  $a = 0$ ) ne possède pas de cycle, son amplitude est strictement inférieure, en partie standard, à 3 et elle est i.p. dès que  $s \gg 2$ . L'amplitude en vitesse de cette solution est, à  $a$  fixé, d'autant plus grande que  $s$  est grand.

*Remarque:* les valeurs de  $a$  pour lesquelles un tel cycle existe sont aussi «rares» que celles pour lesquelles il existe des  $s$ -canards lorsque  $s \ll 2$ . On montre, en effet que pour qu'un tel cycle existe (si l'équation  $(E_0^s)$  n'en possède pas), il est nécessaire que  $\frac{1-a}{\varepsilon} \simeq \varphi(s)$ .

Pour illustrer ce théorème, nous avons traité quelques exemples numériquement. On peut ainsi constater l'existence d'un cycle pour  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ ,  $s = 3$  et  $a = 0,9975$ . Signalons cependant, que pour de telles valeurs de  $s$ , la convergence des autres trajectoires vers le cycle est beaucoup plus lente que lorsque  $s$  est proche de 1 et  $a = 0$ .

#### IV — CAS OÙ $s \simeq 0$ ET $a$ QUELCONQUE.

1) *Etude de l'équation  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1) x'^{[s]} + x = 0$  lorsque  $s \simeq 0$  et  $s > 0$*

Plaçons nous à l'échelle (2)  $V = \frac{s}{\varepsilon^{2-s}} v$ , où le champ correspondant s'écrit:

$$\mathcal{V}_0^s \begin{cases} x' = V \\ V' = (1 - x^2) V^{[s]} - \frac{s}{\varepsilon^{2-s}} x \end{cases}$$

Comme  $s \simeq 0$ , il est équivalent, en tout point fini du plan  $(x, V)$  n'appartenant pas au halo de la droite  $D$ , au champ intégrable:

$$\hat{\mathcal{V}}_0^s: \begin{cases} x' = V \\ V' = (\operatorname{sgn}(V)) (1 - x^2) - bx \quad \text{où } b = \frac{s}{\varepsilon^{2-s}}, b \in ]0, 1[ \end{cases}$$

Donc, en vertu du lemme de l'ombre courte, les trajectoires de  $\mathcal{V}_0^s$  ont même ombre, en dehors du halo de  $D$ , que les combes:

$$V(x) = \left[ 2 (\operatorname{sgn}(V)) \left( x - \frac{x^3}{3} \right) - bx^2 + C \right]^{1/2}, C \in \mathbf{R}.$$

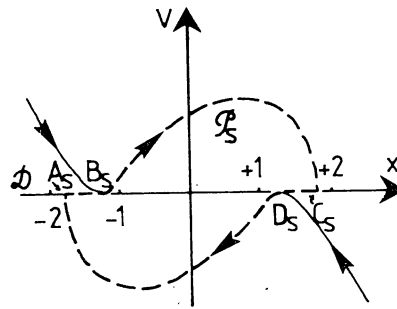


Figure 16: la courbe  $\mathcal{P}_s$ , ombre du cycle pour  $s \approx 0$ .

$$A_s = \left( \frac{1}{2} b - \sqrt{b^2 + 4}, 0 \right)$$

$$B_s = \left( -\frac{1}{2} (b + \sqrt{b^2 + 4}), 0 \right)$$

$$C_s = \left( -\frac{1}{2} b + \sqrt{b^2 + 4}, 0 \right)$$

$$D_s = \left( \frac{1}{2} (b + \sqrt{b^2 + 4}), 0 \right)$$

Pour connaître complètement ces ombres, il reste donc à examiner comment les trajectoires «traversent» le halo de  $D$ . Soit  $\mathcal{P}_s$  la courbe tracée en pointillés sur la figure 16, constituée de trajectoires de  $\hat{\mathcal{V}}_0^s$  et de segments de la droite  $D$ . Les raisonnements habituels <sup>(1)</sup> (examen du champ  $\mathcal{V}_0^s$  dans le halo de  $D$  et comparaison des champs  $\mathcal{V}_0^s$  et  $\hat{\mathcal{V}}_0^s$ ) prouvent que toutes les trajectoires de  $\mathcal{V}_0^s$  (sauf la trajectoire  $(0, 0)$ ) «s'enroulent» dans le halo de  $\mathcal{P}_s$ . D'où l'existence d'un cycle contenu dans ce halo.

Remarquons que les abscisses des points  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  et  $D_s$  varient en fonction de  $s$ . La partie standard de l'amplitude du cycle, en particulier, décroît de 4 à  $2\sqrt{5} - 1$  lorsque  $s$  tend vers 0.

*Evolution de la période du cycle lorsque  $s$  devient i.p.*

Pour calculer la période  $T_s$  de ce cycle (et celle des cycles des autres équations  $(E_0^s)$  qui en possèdent un), on considère le champ dans le plan des phases. Il s'écrit:

<sup>(1)</sup> On peut supposer que  $b$  n'est pas i.p. car sinon, le cas a été traité au chapitre (I).

$$\mathcal{V}_0^s \begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{1}{\varepsilon} ((1 - x^2)v^{[s]} - x) \end{cases}$$

Notons  $(H_s)$  la courbe d'équation  $v = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^{[1/s]}$ . L'examen du champ dans le plan des phases montre que les portions du cycle contenues dans la partie finie du plan des phases ont une ombre soit verticale, soit confondues avec  $(H_s)$  (Figure 17). On en déduit que les portions du cycle qui ne sont pas contenues dans le halo de  $(H_s)$  sont parcourues en un temps i.p. Donc pour la période  $T_s$  on a

$$T_s \simeq 2 \int_{-2}^1 \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^{[1/s]} dx \quad \text{si } s \simeq 0.$$

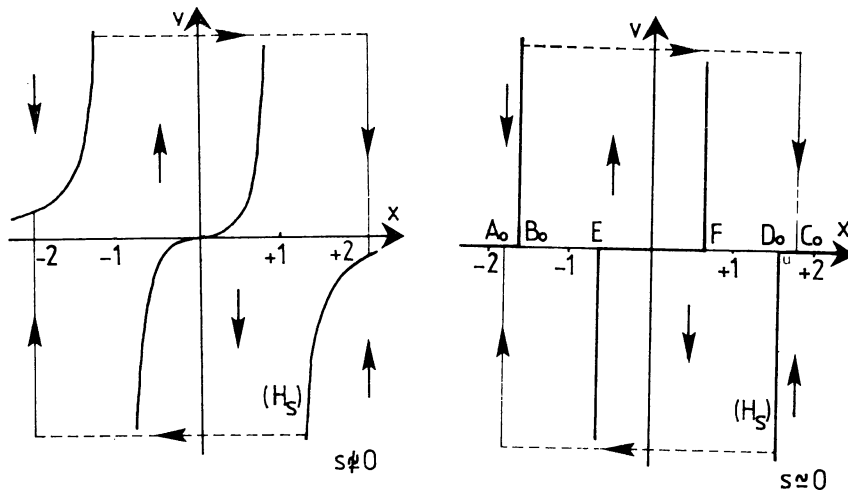


Figure 17: schéma du cycle dans le plan  $(x, v)$ : en pointillés les portions du cycle qui ne sont pas contenues dans la partie finie du plan des phases

$$A_0 = \left(\frac{1}{2} b - \sqrt{b^2 + 4}, 0\right)$$

$$B_0 = \left(-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), 0\right) = \lim_{s \rightarrow 0} B_s$$

$$C_0 = \left(-\frac{1}{2} b + \sqrt{b^2 + 4}, 0\right)$$

$$D_0 = \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), 0\right) = \lim_{s \rightarrow 0} D_s$$

Lorsque  $s \simeq 0$ , la courbe  $(H_s)$  a une ombre verticale sauf entre les points  $A_0$  et  $B_0$ ,  $E$  et  $F$ ,  $D_0$  et  $C_0$  où elle est horizontale (Figure 17). Le cycle contient donc des morceaux de longueur non i.p. parcourus à vitesse i.p. Donc la période  $T_s$  est i.g.

2) *Cas où  $s = 0$*

Soient

$$(i) \begin{cases} x' = V \\ V' = -x^2 - x + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (ii) \begin{cases} x' = V \\ V' = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

L'étude de l'équation  $(E_0^0)$  correspond, à l'échelle (2), sur  $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} - \{0\})$  à l'étude du champ qui coïncide avec (i) lorsque  $V > 0$  et avec (ii) lorsque  $V < 0$ . Ce champ ne se prolonge pas en un champ de vecteurs continu sur le plan  $(x, V)$  tout entier.

Pour décider du mouvement d'un point soumis à l'équation  $(E_0^0)$ , 1 est naturel d'adopter le principe suivant: soit  $\theta$  un «pas d'intégration» donné. La  $\theta$ -trajectoire d'un point du demi plan  $V > 0$  (resp.  $V < 0$ ) est définie comme suit: elle est confondue pendant l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + \theta]$  avec celle du champ (i) (resp. (ii)). Si, à l'instant  $t_0 + \theta$ , elle se trouve encore dans le demi plan  $V > 0$  (resp.  $V < 0$ ), on recommence pendant l'intervalle de temps  $[t_0 + \theta, t_0 + 2\theta]$ . Sinon, on change de champ de vecteurs. La trajectoire d'un point sera, lorsqu'elle existe, la limite des  $\theta$ -trajectoires lorsque  $\theta$  tend vers 0.

De cette façon, on montre qu'on obtient le comportement suivant: la trajectoire d'un point quelconque du demi-plan  $V > 0$  (resp.  $V < 0$ ) parvient après un temps fini sur l'axe  $V = 0$ , puis s'y arrête. Il n'y a donc pas de cycle.

Remarquons que ce comportement des trajectoires de  $(E_0^s)$  lorsque  $s = 0$  apparaît bien comme «limite» du comportement lorsque  $s \neq 0$  puisque, comme nous l'avons vu, la période du cycle devient i.g. lorsque  $s$  devient i.p. Les trajectoires mettent de plus en plus de temps pour traverser le halo de la droite  $D$  et finalement n'y parviennent plus.

3) *Etude des équations  $\varepsilon x'' + (x^2 - 1)(x')^{[s]} + x = a$ ,  $s \approx 0$  et  $a \neq 0$ : les canetons.*

A l'échelle (2), le champ correspondant s'écrit:

$$\mathcal{V}_a^s: \begin{cases} x' = V \\ V' = (1 - x^2) V^{[s]} + \frac{s}{\varepsilon 2^{-s}} (a - x) \end{cases}$$

Il est donc infiniment proche, en tout point fini du plan  $(x, V)$  n'appartenant pas au halo de  $D$ , du champ intégrable, mais non symétrique par rapport à zéro:

$$\hat{\mathcal{V}}_a^s: \begin{cases} x' = V \\ V' = (\operatorname{sgn}(V)) (1 - x^2) + a - bx \text{ où } b = \varepsilon^{\frac{s}{2-s}} \end{cases}$$

Les trajectoires de  $\mathcal{V}_a^s$  auront donc même ombre, en dehors du halo de  $D$ , que les combes:

$$V(x) = \left[ 2 (\operatorname{sgn}(V)) \left( x - \frac{x^3}{3} \right) + 2 abx - bx^2 + c \right]^{1/2}, c \in \mathbf{R}.$$

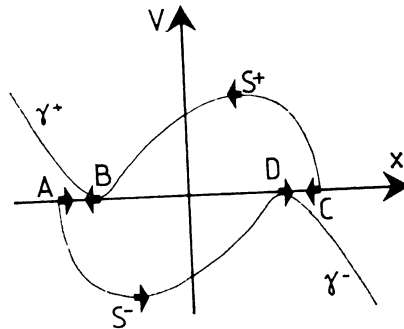


Figure 18: à  $s$  fixé, les abscisses de  $B$  et  $D$  décroissent lorsque  $a$  croît de 0 à 1, alors que celles de  $A$ ,  $C$ ,  $S^+$  et  $S^-$  croissent.

Contrairement au cas  $s \simeq 0$ , les ombres dépendent donc de  $a$  dès que  $b \simeq 0$ . Notons  $B$  et  $C$  (resp.  $D$  et  $A$ ) les intersections avec  $D$  de l'ombre de la trajectoire  $\gamma^+$  (resp.  $\gamma^-$ ) de  $\hat{\mathcal{V}}_a^s$  tangente à  $D$  au point d'abscisse  $-1$  (resp. d'abscisse 1) et  $S^+$  le maximum de l'ombre de  $\gamma^+$  compris entre  $B$  et  $C$  (resp.  $S^-$  le minimum de l'ombre de  $\gamma^-$  compris entre  $A$  et  $D$ ) (Figure 18). Les abscisses de ces points en fonction de  $a$  et de  $b$  sont les suivantes:

$$x_B \simeq -\frac{1}{2} \left( b + \sqrt{b^2 + 4(1 + ab)} \right), \quad x_A \simeq -\frac{1}{2} \left( b - \sqrt{b^2 + 4(1 - ab)} \right)$$

$$x_C \simeq -\frac{1}{2} \left( b + \sqrt{b^2 + 4(1 + ab)} \right), \quad x_{S^+} \simeq -\frac{1}{2} \left( b - \sqrt{b^2 + 4(1 + ab)} \right)$$

$$x_D \simeq \frac{1}{2} \left( b + \sqrt{b^2 + 4(1 - ab)} \right), \quad x_{S^-} \simeq \frac{1}{2} \left( b - \sqrt{b^2 + 4(1 - ab)} \right)$$

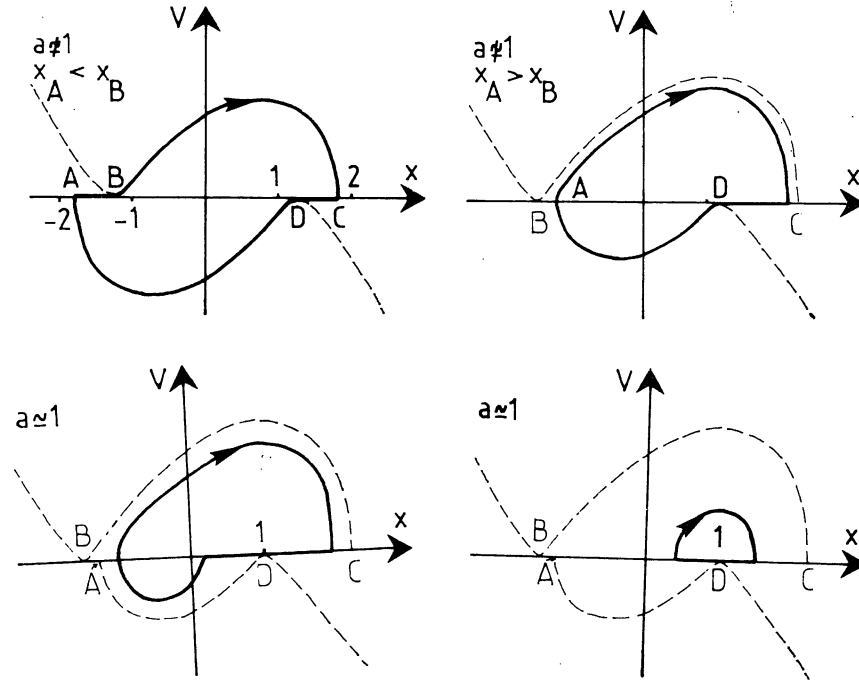


Figure 19: déformation du cycle à  $s$  fixé et  $a$  croissant de 0 à 1: successivement un  $s$ -canard et trois canetons.

On constate que, à  $s$  fixé (et donc  $b$ ), les abscisses des points  $B$  et  $D$  décroissent lorsque  $a$  croît de 0 à 1, alors que les abscisses des points  $A$ ,  $C$ ,  $S^+$  et  $S^-$  croissent. En particulier lorsque  $a$  croît de 0 à 1 les points  $A$  et  $B$  se rapprochent, puis se «croisent».

Dans tous les cas de figures, les raisonnements habituels montrent encore l'existence d'un cycle lorsque  $a < 1$ . Dès que  $x_A > x_B$ , les points  $B$  et  $C$  n'appartiennent plus au cycle qui a une forme particulière que nous appelons canetons. La déformation de ce cycle, lorsque  $a$  croît, se fait en deux étapes: lorsque  $a \simeq 1$ , il passe lentement de la forme habituelle (figure 19) à celle d'un caneton d'amplitude décroissante jusqu'à la valeur  $4 - b$ ; puis lorsque  $a \simeq 1$ , les ombres

des trajectoires du champ ne variant plus en fonction de  $a$  hors du halo de  $D$ , le caneton se déforme très brusquement de la même façon que les grands cycles du cas  $s \simeq 0$ , en passant par des cycles de formes intermédiaires pour «disparaître» finalement lorsque  $a = 1$  dans la singularité (Figure 19).

---

#### REFERENCES

- [B] BENOIT (E) Equation de Van der Pol avec terme forçant. Thèse-Paris (1979)
- [CDD] CALLOT (JL), DIENER (F) et DIENER (M) «Chasse au canard» publication IRMA (1977)
- [N] NELSON (E) Bull. Amer. Math. Soc. 83 n.º 6 1977 (p 1165-1198)
- [RTU] REEB (G), TROESCH (A) et URLACHER (E) «Analyse non standard» IRMA (1978)
- [TU] TROESCH (A) et URLACHER (E) «Analyse non standard et équation de Van der Pol» publication IRMA (1977)

Francine DIENER  
IRMA  
10 rue du Général Zimmer  
67 084. STRASBOURG - CEDEX

Département de Mathématique  
Université d'Oran  
BP 1524 Es Sénia  
ORAN (Algérie)

•

