UNAS APLICACIONES DE UN CALCULO FUNCIONAL HOLOMORFO EN DIMENSION INFINITA

por

JOAQUÍN M.ª ORTEGA ARAMBURU

Introducción

El cálculo funcional holomorfo sobre álgebras de Banach por funciones holomorfas en espacios de dimensión infinita introducido por L. Waelbroeck (5) se extiende a funciones holomorfas valoradas en un espacio de Banach. Una variante de este teorema ha sido enunciado recientemente por Taylor J. (4), independientemente de este trabajo y sin la publicación de las demostraciones. Dicho cálculo permite establecer dos generalizaciones de aplicaciones ya clásicas del «cálculo funcional holomorfo finito»: una generalización del teorema de Lévy-Wiener y un teorema de la función implícita para álgebras de Banach con funciones analíticas en espacios de dimensión infinita.

1. — *Extensión del cálculo funcional holomorfo en dimensión infinita de Waelbroeck a funciones valoradas en un espacio de Banach.*

Sean E y F espacios de Banach, A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Todos los espacios vectoriales que aparezcan se entenderán sobre los números complejos. Los elementos de $A \hat{\otimes} E$ se expresan como $a = \sum_{n\geq 0} a_n \otimes e_n$ con $\sum_{n\geq 0} ||a_n|| \cdot ||e_n|| < \infty$. Waelbroeck define Spec $a = \{\sum_{n\geq 0} a_n(x)\, e_n;\ x \in \text{Spec}\, A\}$ y establece un morfismo φ_a de álgebra de $O(\text{Spec}\ a)$ en A que transforma todo polinomio contínuo u en $u[a] = \sum u_k[a]$ donde u_k es la parte homogénea de grado k del polinomio y $u_k[a] = \sum_{n_1, \dots n_k} \check{u}_k(e_{n_1}, \dots, e_{n_k})\, a_{n_1} \dots a_{n_k}$; donde $\check{u}_k$ es la forma k-lineal simétrica contínua polar de u_k y $O\,(\text{Spec}\ a)$

designa el álgebra de los gérmenes de funciones holomorfas en Spec a. Este cálculo con alguna condición suplementaria es único.

Se trata de dar un cálculo funcional pero para funciones valoradas en un espacio de Banach F, es decir, de establecer un morfismo de O (Spec a; F) en $A \hat{\otimes} F$ que extienda y sea compatible con el anterior.

Obsérvese que la generalización no es trivial en el sentido de que $O\,(\text{Spec}\ a;\ F) = \varinjlim_{\text{Spec}\ a \subset U} O\,(U;\ F) = \varinjlim_{\text{Spec}\ a \subset U} O_b(U;\ F)$; $O_b(U;\ F)$ funciones holomorfas acotadas sobre los U-acotados. Por otra parte $O_b(U;\ F)$ contiene estrictamente a $O_b(U) \hat{\otimes}_\varepsilon F$ que, como ahora veremos, en condiciones muy generales, se puede identificar con $O_k(U;\ F)$, funciones holomorfas en U a valores en F tales que la imagen de todo U-acotado es un relativamente compacto de F. Tendremos entonces que el morfismo natural $O_b(U) \hat{\otimes} F \to A \hat{\otimes} F$ inducido a partir del morfismo continuo $O_b(U) \to A$ no da una extensión, como ocurría en el caso de ser E de dimensión finita, de un morfismo de $O_b(U;\ F)$ en $A \hat{\otimes} F$. Veamos la proposición anunciada:

Proposición 1

Sea U un abierto de un espacio de Banach E y F un segundo espacio de Banach que verifique la propiedad de la aproximación. Entonces $O_b(U) \hat{\otimes}_\varepsilon F \simeq O_k(U;\ F)$.

La demostración es standard. $O_b(U) \hat{\otimes}_\varepsilon F \simeq \mathcal{L}_e(F'_c;\ O_b(U))$. Establezcamos la aplicación $O_k(U;\ F) \xrightarrow{i} \mathcal{L}_e(F'_c;\ O_b(U))$ tal que a f asigna la aplicación $u \to u \circ f$. De ser la imagen por f de todo U-acotado un relativamente compacto se sigue la continuidad de dicha aplicación.

La aplicación i es inyectiva y la topología inducida por $\mathcal{L}_e(F'_c;\ O_b(U))$ en $O_k(U;\ F)$ es la de la convergencia uniforme sobre los U-acotados. Puesto que $O_k(U;\ F)$ contiene a $O_b(U) \otimes F$ que es denso en $\mathcal{L}_e(F'_c;\ O_b(U))$ y de la completitud de $O_k(U;\ F)$ se sigue el isomorfismo de i.

Sin ser entonces obvio el establecimiento del morfismo buscado puede, no obstante, seguirse en el mismo la línea trazada por L. Waelbroeck (5) con las naturales precisiones del caso:

En primer lugar si $a = \sum_n a_n \otimes e_n \in A \hat{\otimes} E$ con $\sum_n ||a_n||\ ||e_n|| < \infty$

y u_k es un polinomio homogéneo de grado k, continuo de E en F, se puede definir un elemento de $A \hat{\otimes} F$ mediante:

$$u_k[a] = \sum_{n_1, \ldots, n_k} a_{n_1} \ldots a_{n_k} \otimes \check{u}_k(e_{n_1}, \ldots, e_{n_k})$$

ya que

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k} ||a_{n_1} \ldots a_{n_k}|| \, ||\check{u}_k(e_{n_1}, \ldots, e_{n_k})|| \leqslant \sum_{n_1, \ldots, n_k} ||a_{n_1}|| \ldots ||a_{n_k}|| \, ||\check{u}_k|| \, ||e_{n_1}|| \ldots ||e_{n_k}|| \leqslant$$
$$\leqslant ||\check{u}_k|| \, (\sum_n ||a_n|| \, ||e_n||)^k.$$

Proposición 2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad; E y F espacios de Banach y $a \in A \hat{\otimes} E$. Sea U la bola en E de centro el origen y radio $r > e||a||$. Existe una aplicación φ_a lineal continua de $O_b(U; F)$ en $A \hat{\otimes} F$ tal que la imagen de un polinomio u_k es $u_k[a]$. φ_a es morfismo de $O_b(U)$-módulos, donde $A \hat{\otimes} F$ es un $O_b(U)$-módulo vía el morfismo continuo natural de álgebras de $O_b(U)$ en A.

En efecto, si $f \in O_b(U; F)$; $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n(z)$ su desarrollo de Taylor en el origen. Se verifica, supuesto $r > e$ y $||a|| < 1$, lo que no supone restricción:

$||f_n|| \leqslant K/e^n$, y, de la identidad polar, $||\check{f}_n|| \leqslant n^n/n! \, ||f_n|| \leqslant K$. Puede entonces definirse $f[a] = \sum_{n \geq 0} f_n[a]$ ya que $||f_n[a]||_{A \hat{\otimes} F} \leqslant K(\sum_n ||a_n|| \, ||e_n||)^n$ y $\sum_n ||a_n|| \, ||e_n||$ puede tomarse menor que 1.

Es una comprobación directa verificar que la aplicación $f \to f[a]$ cumple las condiciones de la proposición.

Para proseguir la construcción debemos establecer dos lemas.

Lema 1

Sea E_1 un espacio vectorial de dimensión finita, E_2 y F espacios de Banach; U_1 un abierto de E_1 y U_2 una bola abierta centrada en el origen en E_2. Se verifica:

$$O_b(U_1 \times U_2; F) \simeq O(U_1; O_b(U_2; F)) \simeq O(U_1) \hat{\otimes}_\pi O_b(U_2; F)$$

El segundo isomorfismo se sigue de ser E_1 de dimensión finita. En cuanto al primero, sea $f \in O_b(U_1 \times U_2; F)$, para cada x de U_1 la función de U_2 en F $y \to f(x, y)$ es holomorfa y fijados B_1 (resp. B_2) conjunto U_1-acotado (resp. U_2-acotado), existe $\varrho > 1$ y V abierto con $B_2 \subset V \subset U_2$ y $B_\varrho(0)V$ U_2-acotado y por tanto

$$L = \sup_{\substack{x \in B_1 \\ y \in V \\ |\lambda| \leq \varrho}} ||f(x, \lambda y)|| < \infty$$

de donde se verifica la desigualdad:

$$||f(x, y) - \sum_{m=0}^{l} 1/m!\, d^m f(x, 0)\, [y]|| \leqslant \frac{L}{\varrho^l(\varrho - 1)} \underset{l \to \infty}{\to} 0$$

que nos expresa, en particular, que la función $x \to f(x, y)$ es límite en $O(U_1; O_b(U_2; F))$ de las funciones $x \to \sum_{m=0}^{l} 1/m!\, d^m f(x, 0)\, [\;]$ que son de dicho espacio. Luego la función $x \to f(x, y)$ es holomorfa de U_1 en $O_b(U_2; F)$.

Recíprocamente, toda función $g \in O(U_1, O_b(U_2; F))$ define una función de $U_1 \times U_2$ en F que es G-holomorfa y de tipo acotado, luego define un elemento de $O_b(U_1 \times U_2; F)$. Por otra parte, trivialmente, las topologías coinciden.

Lema 2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. $a = a_1 \oplus a_2$ un elemento de $A \hat{\otimes} (E_1 \oplus E_2)$; E_1 espacio vectorial de dimensión finita y E_2 de Banach. Sea U un abierto de $E_1 \oplus E_2$ que contiene a uno del tipo $U_1 \times U_2$ donde U_1 es un entorno de Spec a_1 y U_2 es la bola abierta de E_2 de centro el origen y radio $r > e\, ||a_2||$; F un espacio de Banach. Existe entonces un morfismo continuo $O_b(U; F) \to A \hat{\otimes} F$ de $O_b(U)$-módulos que asocia a todo polinomio homogeneo continuo u, $u[a]$.

La demostración se sigue como en (5) o en (1) combinando el morfismo $O(U_1) \to A$ del cálculo operacional finito respecto a $a_1 \in A \hat{\otimes} E_1$ y el morfismo $O_b(U_2; F) \to A \hat{\otimes} F$ establecido en la proposición 2 y teniendo en cuenta el lema 1.

Obsérvese que si U_1 es un abierto polinomialmente convexo el morfismo en las condiciones del lema 2 es único ya que al determinar la imagen de los polinomios y ser la aplicación continua queda determinado el morfismo sobre $O(U_1) \otimes C$ y sobre $C \otimes O_b(U_2; F)$ que engendran un sub-$O_b(U)$-módulo denso en $O_b(U_1 \times U_2; F)$.

Teorema 1 (de existencia)

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad, E y F dos espacios de Banach. Para cada $a \in A \hat{\otimes} E$ existe un morfismo φ_a de $O(\text{Spec } a)$-módulo de $O(\text{Spec } a; F)$ en $A \hat{\otimes} F$ (este último es un $O(\text{Spec } a)$-módulo vía el morfismo establecido por Waelbroeck de $O(\text{Spec } a)$ en A) que transforma todo polinomio homogéneo contínuo u en $u[a]$ y cuya restricción a $O_b(U; F)$ para cada $U \supset \text{Spec}$ a es continua.

Nuevamente la demostración puede desarrollarse en forma parecida a la de (5) o (1) por lo que la describimos muy brevemente:

Sea U un entorno abierto de Spec a en E; $\varepsilon > 0$ tal que U contiene un ε-entorno de Spec a. Para cada $\eta > 0$ podemos descomponer $a = a_1 + a_2$ con $a_1 \in A \otimes E_1$, E_1 de dimensión finita y $||a - a_1|| < \eta$. Sea U_1 un η-entorno de Spec a_1 en E_1 y U_2 la bola de centro 0 y radio r en E con r y η que verifiquen:

$$r = \varepsilon - 2\eta > 0 \qquad \varepsilon - 2\eta > e\,\eta$$

de manera que $r > e||a_2||$ y que $U_1 + U_2$ está contenido en el ε-entorno de Spec a.

Podemos entonces definir un morfismo:

$$O_b(U; F) \to O_b(U_1 \times U_2; F) \qquad f \to g(z_1, z_2) = f(z_1 + z_2)$$

que es continuo. Componiéndolo con el morfismo $O_b(U_1 \times U_2; F) \to$ $\to A \hat{\otimes} F\, g \to g[a_1, a - a_1]$ inducido por $a_1 \oplus (a - a_1) \in A \hat{\otimes} (E_1 \oplus$ $\oplus E)$ según el lema 2 se obtiene una aplicación continua que es morfismo de $O_b(U)$-módulos y tal que si u es un polinomio homogéneo continuo, su imagen es $u[a]$.

Al intentar establecer que los morfismos construidos anteriormente son compatibles con los morfismos restricción $O_b(U_2; F) \to O_b(U_1; F)$ si $U_1 \subset U_2$ fuerza a establecer un teorema de unicidad, lo que puede conseguirse sustituyendo los morfismos anteriores por otros definidos sobre funciones en abiertos polinomialmente convexos. Tras un teorema de Arens-Calderon se puede considerar un espacio de dimensión finita $\widetilde{E}_1$, una aplicación lineal $v_1 : \widetilde{E}_1 \to E_1$, un $b_1 \in A \otimes \widetilde{E}_1$ tal que $v_1[b_1] = a_1$ por el morfismo extensión $A \hat{\otimes} \widetilde{E}_1 \to A \hat{\otimes} E_1$ y un entorno abierto de Spec b_1 polinomialmente convexo V_1 tal que $v_1(V_1) \subset U_1$.

Podemos ahora definir un morfismo:

$$O_b(U; F) \overset{s_1}{\to} O_b(V_1 \times U_2; F) \qquad f \to s_1(f)\,(z_1, \xi) = f(v_1(z_1) + \xi)$$

y definir después $f[a] = s_1(f)\,[b_1, a - v_1[b_1]]$.

De esta manera se obtiene un morfismo continuo $f \to f[a]$ que es el ya obtenido. Se puede ahora seguir como en (1) para establecer la independencia de los representantes de los gérmenes en $O_b(\text{Spec } a; F)$ y el conjunto de propiedades enunciadas en el teorema.

También, como en (1) se puede dar un teorema de unicidad, pero ahora para funciones valoradas en F. Establecemos ya sin demostración:

Teorema 2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad, E un espacio de Banach. Si para cada $a \in A \hat{\otimes} E$ existe un morfismo φ_a: $O(\text{Spec } a; F) \to A \hat{\otimes} F$ continuo, de $O(\text{Spec } a)$-módulos, tal que:

a) $\varphi_a(u) = u[a]$ para todo polinomio homogéneo continuo u.

b) Para toda aplicación lineal continua $T : E \to \widetilde{E}$ ($\widetilde{E}$ de Banach) y toda $f \in O(\text{Spec } T[a]; F)$ se tiene $\varphi_a(f \circ T) = \varphi_{I \otimes T(a)}(f)$.

Entonces $\varphi_a(f) = f[a]$.

Teorema 3

Sean A y B dos álgebras de Banach conmutativas con unidad; E y F espacios vectoriales de Banach y φ un morfismo de álgebras de A en B. Si $a \in A \hat{\otimes} E$ entonces $\varphi \otimes I(a) \in B \hat{\otimes} E$ y para $f \in O(\text{Spec } a; F)$ se verifica $f[\varphi \otimes I(a)] = \varphi \otimes I(f[a])$

Corolario 1

Siguiendo las notaciones del teorema 3, si $a \in A \hat{\otimes} E$ y $f \in O(\text{Spec } a; F)$, existe un elemento $b \in A \hat{\otimes} F$ tal que $f \circ a^\wedge = b^\wedge$ y $\text{Spec} f[a] = f[\text{Spec } a]$

Corolario 2

Si A es un álgebra de Banach conmutativa unitaria y $a \in A \hat{\otimes} A$, existe un morfismo de álgebra continuo $O(\text{Spec } a;\ A) \to A$ que asocia a los polinomios homogéneos continuos u la imagen de $u[a]$ por el morfismo canónico $A \hat{\otimes} A \to A$.

Teorema 4

Sea A un álgebra de Banach, E_1, E_2, E_3 espacios de Banach. Sea $a \in A \hat{\otimes} E_1$, f una función holomorfa en un entorno de Spec a, a valores en E_2 y g una función holomorfa definida en un entorno de la imagen de f a valores en E_3. Entonces se verifica:

$$g[f[a]] = g \circ f[a]$$

En primer lugar observemos que las aplicaciones que asignan a cada elemento de $A \hat{\otimes} E_1$ con espectro en el dominio de definición de f (que sin restricción puede suponerse, como g, acotado), $g \circ f\,[a]$ o bien $g[f[a]]$ son funciones continuas (el lema de la pág. 45 de (1) puede traducirse directamente). Es pues suficiente probar la proposición en el caso en que $a \in A \hat{\otimes} E_1$ con E_1 de dimensión finita. En este caso y si f tomase valores en un espacio de dimensión finita se reduciría al caso clásico.

Para verificar el teorema en general procederemos por pasos sucesivos. En primer lugar si g es un polinomio homogeneo y f también lo es se reduce al caso clásico como hemos dicho antes o bien la comprobación es directa. Sea $f \in O_b(U; E_2)$, U bola de centro el origen en E_1 y radio $r > e\,||a||$.

$f(x) = \sum\limits_n f_n(x)$, de donde $f[a] = \sum\limits_n f_n[a]$. De aquí que $g[f[a]] =$ $= \check{g}(f[a], \ldots, f[a]) = \sum\limits_l \sum\limits_{n_1+\ldots+n_r=l} \check{g}(f_{n_1}[a], \ldots, f_{n_r}[a]) = \sum\limits_l \sum\limits_{n_i+\ldots+n_r=l} \check{g}(f_{n_1}, \ldots, f_{n_r})\,[a] = (g \circ f)\,[a]$.

Siguiendo las notaciones del lema 2 sea $f \in O(U_1) \hat{\otimes} O_b(U_2; E_2)$, veamos que $g[f[a_1, a_2]] = (g \circ f)\,[a_1, a_2]$. En efecto, si

$$\begin{aligned} f = \sum f_i \otimes g_i,\ g[f[a_1, a_2]] &= \sum \check{g}(f_{i_1}[a_1]g_{i_1}[a_2], \ldots, f_{i_r}[a_1]\, g_{i_r}[a_2]) = \\ &= \sum f_{i_1}[a_1] \cdots f_{i_r}[a_1]\, \check{g}(g_{i_1}[a_2], \ldots, g_{i_r}[a_2]) = \\ &= \sum f_{i_1} \cdots f_{i_r}\, \check{g}(g_{i_1}, \ldots, g_{i_r})\,[a_1, a_2]. \end{aligned}$$

Sea ahora f definida en un entorno de Spec a. Siguiendo las notaciones del teorema 1:

$f[a] = Sf[a_1, a - a_1]$ con $Sf(z_1, z_2) = f(z_1 + z_2)$, función definida en $U_1 \times U_2$.

Se tendrá $g[f[a]] = g[Sf[a_1, a - a_1]] = S(g \circ f)[a_1, a - a_1] = (g \circ f)[a]$.

Está pues demostrado en el caso de ser g polinomio y el caso en que f tenga recorrido de dimensión finita.

Sea ahora g holomorfa en una bola de centro el origen de E_2 y radio mayor que $e\|f[a]\|$. De esta manera si $g(z) = \sum_n g_n(z)$ $g[f[a]] =$

$$= \sum_n g_n[f[a]] = \sum_n (g_n \circ f)[a] = (g \circ f)[a].$$

Por último el caso general de g se reduce a los dos anteriores. Sean $\varphi_1 : E_2 \to E'_2$ $\varphi_2 : E_2 \to E_2$ lineales, E'_2 subespacio de dimensión finita de E_2, las aplicaciones asociadas a g y a $f[a]$ y que permiten definir $g[f[a]]$ como

$$g[f[a]] = (Sg)\,((I \otimes \varphi_1) f[a], (I \otimes \varphi_2) f[a]).$$

Por otra parte:

$$g(f(x)) = g(\varphi_1 f(x) + \varphi_2 f(x)) = Sg(\varphi_1 f(x), \varphi_2 f(x))$$

De aquí, teniendo en cuenta los casos anteriores se sigue la demostración del teorema.

2 Extensión del teorema de Lévy- Wiener

Teorema 5

Sea $\sum_{i \in Z} a_i$ una serie absolutamente convergente de elementos de un espacio de Banach E y sea f una función holomorfa definida en un entorno del compacto de $E\{\sum_{i \in Z} a_i z^i;\ |z| = 1\}$ con valores en un espacio de Banach F. Entonces, la función $g(z) = f(\sum_{i \in Z} a_i z^i)$ admite una expresión $\sum_{i \in Z} b_i z^i$ donde $b_i \in F$ y $\sum_{i \in Z} b_i$ constituye una serie absolutamente convergente en F. Puede darse un teorema análogo para series en que el conjunto de índices recorrido es el de los números naturales, es decir, si g es una función definida en $D = \{z \in C;\ |z| \leqslant 1\}$

a valores en E, holomorfa en su interior, con desarrollo de Taylor en el origen absolutamente convergente para $z = 1$ y f es una función holomorfa en un entorno de $g(D)$, a valores en F, entonces $f \circ g$ admite un desarrollo de Taylor en el origen $\sum_{i \geq 0} b_i z^i$ con $\sum_{i \geq 0} ||b_i|| < \infty$.

En efecto, basta aplicar el cálculo operacional construido anteriormente, tener en cuenta que el espectro de $1^1(Z)$ (resp. $1^1(N)$) es $\{z \in C;\ |z| = 1\}$ (resp. $\{z \in C;\ |z| \leqslant 1\}$) con representación de Gelfand $z \to \sum a_i z^i$, y, por último, que $1^1(Z) \hat{\otimes} E \simeq 1^1[Z; E]$ (resp. $1^1(N) \hat{\otimes} E \simeq 1^1[N; E]$).

Si $a = (a_i)$ pertenece, por ejemplo, a $1^1[Z; E] \simeq 1^1(Z) \hat{\otimes} E$, Spec $a = \{\sum_{i \in Z} a_i z^i;\ |z| = 1\}$, f estará definida en un entorno de Spec a y mediante el cálculo operacional $f(\sum_i a_i z^i)$ representará la función asociada a un elemento de $1^1(Z) \hat{\otimes} F \simeq 1^1[Z; F]$. Haciendo unas consideraciones análogas para $1^1[N, E]$ se acaba la demostración.

3 Teorema de la función implícita para álgebras de Banach por funciones holomorfas definidas en espacios de Banach.

Teorema 6

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad, E y F espacios de Banach. Sea $f \in A \hat{\otimes} E$ y h: Spec $A \to F$ una función contínua; G una función definida en un entorno de $X = \{(h(x), f^\wedge(x));$ $x \in \text{Spec}\, A\}$ a valores en F, holomorfa, con $dG_{|F \times \{0\}}$ biyectiva de F en F en todo punto de X y tal que para cada $x \in \text{Spec}\ A$, $G(h(x), f^\wedge(x)) = 0$. Existe entonces un único elemento $g \in A \hat{\otimes} F$ tal que $g^\wedge(x) = h(x)$ para $x \in \text{Spec}\ A$ y que bajo el cálculo operacional holomorfo ya definido verifica $G[g, f] = 0$.

Demostración de la existencia:

Obsérvese en primer lugar que, restringiendo si es preciso el dominio de definición de G, puede suponerse que G es de tipo acotado y que $dG_{|F \times \{0\}}$ es biyectiva en todo punto del dominio de definición de G.

Consideremos un punto $x_0 \in \text{Spec}\ A$. Puesto que $dG_{|F \times \{0\}}$ en $(h(x_0), f^\wedge(x_0))$ es biyectiva, por el teorema de la función implícita existen entornos de $h(x_0)$ en F y de $f^\wedge(x_0)$ en E y una única aplicación holomorfa del segundo en el primero $z \to 1(z)$ tal que $1(z)$ es el único punto de dicho entorno que verifica $G(1(z), z) = 0$. En particular, existe un entorno de $x_0 \in \operatorname{Spec} A$ tal que si $f^\wedge(x) = f^\wedge(y)$, x e y en dicho entorno, entonces $h(x) = h(y)$. De esta forma verificamos la existencia de un recubrimiento $\{U\}$ de Spec A tal que $h(x) = h(y)$ siempre que x e y pertenezcan al mismo abierto del recubrimiento y $f^\wedge(x) = f^\wedge(y)$.

Existe, entonces, un elemento $f^e \in A \hat{\otimes} (E \oplus E_1)$, E_1 de dimensión finita, tal que mediante la proyección natural sobre $A \hat{\otimes} E$ tenga f como imagen y si $f^{e\wedge}(x) = f^{e\wedge}(y)$ entonces $h(x) = h(y)$.

Podemos, por tanto, definir una función continua H sobre Spec f^e a valores en F mediante la relación $H(f^{e\wedge}(x)) = h(x)$.

La continuidad de H puede probarse tomando un cerrado de F, C y verificando que $H^{-1}(C) = f^{e\wedge}(h^{-1}(C))$ que es un compacto. No hay inconveniente en extender G a un entorno de $X \times E_1 \subset F \oplus (E \oplus E_1)$ mediante la composición con la proyección natural de $F \oplus (E \oplus E_1)$ en $F \oplus E$. Sea G^e esta extensión. Se tendrá: $G^e(H(w), w) = 0$ para $w \in f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)$.

Apliquemos de nuevo el teorema de la función implícita. Para cada $w_0 \in f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)$, sea $H(w_0) = \theta_0$; existe un entorno de θ_0, una bola de centro w_0 y una función H^{W_0} definida en esta y con valores en el primero tal que $H^{W_0}(w)$ es el único punto de él que verifica $G^e(H^{W_0}(w), w) = 0$, de manera que H^{W_0} coincide con H en la intersección de los dominios de definición de ambas. Sea $2\,\varepsilon$ el número de Lebesgue del recubrimiento de $f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)$ formado por las bolas anteriores al variar w_0 en $f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)$. Tomemos bolas de centro los diversos puntos de Spec A y radio ε y seleccionemos un recubrimiento parcial finito de $f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)$. Cada una de estas bolas $B(w_1, \varepsilon)$ será tal que $B(w_1, 2\,\varepsilon)$ estará contenida en alguna de las bolas sobre las que definíamos las H^{W_0}. Llamemos H^{W_1} a la restricción de esta a $B(w_1, \varepsilon)$. Si $B(w_1, 2\,\varepsilon)$ está contenida en dos bolas del tipo anterior, por el teorema de la función implícita aplicado a G^e en w_1 tendremos que las funciones H^W coincidirán en $B(w_1, \varepsilon)$.

Formemos $\bigcup_{w_1 \in f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)} B(w_1, \varepsilon)$ y definamos $\widetilde{H}$ sobre este entorno de $f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)$ mediante $H(z) = H^{W_i}(z)$ si $z \in B(w_i, \varepsilon)$. La definición es correcta pues si $B(w_i, \varepsilon) \cap B(w_j, \varepsilon) \neq \varnothing$, se tiene que $w_j \in B(w_i, 2\,\varepsilon)$ que está contenida en una de las bolas sobre las que estaba definida una de las funciones H^{W_i}. Análogamente la función definida en $B(w_j, \varepsilon)$ es la restricción de una H^{W_j}. Ambas están definidas en bolas que tienen al menos el punto w_j en común que es de $f^{e\wedge}(\operatorname{Spec} A)$ y sobre el que por lo tanto coinciden. Aplicando el teorema de la función implícita a G^e en este punto se sigue que H^{W_i} y H^{W_j} coinciden en la intersección de sus dominios de definición.

La función $\widetilde{H}$ construida es holomorfa y de tipo acotado pues hemos partido para construirla de un número finito de funciones H^{W_i} acotadas. Tiene sentido mediante el cálculo operacional establecer:

$$\widetilde{H}[f^e] \in A \hat{\otimes} F$$

Se verifica entonces, teniendo en cuenta el teorema 4:

$$\widetilde{H}[f^e]\,(x) = \widetilde{H}\,(f^e(x)) = H(f^e(x)) = h(x)$$

$$G[\widetilde{H}[f^e], f] = G^e[\widetilde{H}[f^e], f^e] = 0 \text{ pues } G^e(\widetilde{H}(w), w) = 0.$$

Demostración de la unicidad:

Sea $g_1 \in A \hat{\otimes} F$ con $G[g_1, f] = 0$ y $g_1^{\wedge}(x) = h(x)$. Se verificará $g_1 = g + r$ con $G[g + r, f] = 0, r^{\wedge}(x) = 0$ para $x \in \operatorname{Spec} A$. Sea U el dominio de definición de G, en el que se ha supuesto ya que en todo punto $d_1 G = dG_{|F \times \{0\}}$ es un isomorfismo y G es acotado. Existe un entorno V de X y un $\varepsilon > 0$ tal que si $(\theta, w) \in V$ y $||\theta_1|| \leqslant 2\,\varepsilon \cdot e$ entonces $(\theta + \theta_1, w) \in U$.

Desarrollemos la función G en la primera variable en un entorno de θ con $(\theta, w) \in V$ y agrupemos todos los términos a partir del segundo en la forma:

$$G(\theta + \theta_1, w) = G(\theta, w) + d_1\, G_{(\theta,W)}\,(\theta_1) + 1/2!\, d_1^2 G_{(\theta,W)}(\theta_1, \theta_1) + \dots .$$

Escribamos:

$$1_{2(\theta,W,\theta_1)}\,(\theta_2, \theta_3) = 1/2!\, d_1^2\, G_{(\theta,W)}\,(\theta_2, \theta_3) + 1/3!\, d_1^3\, G_{(\theta,W)}\,(\theta_2, \theta_3, \theta_1) + $$
$$+ 1/4!\, d_1^4\, G_{(\theta,W)}\,(\theta_2, \theta_3, \theta_1, \theta_1) + \dots$$

de manera que

$$G(\theta + \theta_1, w) = G(\theta, w) + d_1\, G_{(\theta,W)}\,(\theta_1) + 1_{2(\theta,W,\theta_1)}\,(\theta_1, \theta_1)$$

Todas las funciones que aparecen en esta igualdad son holomorfas como funciones de (θ, w, θ_1), así como la aplicación $(\theta, w, \theta_1) \to 1_{2(\theta,W,\theta_1)}$ Esta última puede verse teniendo en cuenta que cada uno de los sumados lo es y que la convergencia es uniforme sobre los compactos pues

$$||1/m!\, d_1^m\, G_{(\theta,W)}\,|| \leqslant K/(2\,\varepsilon)^m\, e^m$$

de donde:

$$||1/m!\, d_1^m\, G_{(\theta,W)}(\ ,\ ,\theta_1, \ldots, \theta_1))|| \leqslant K/(2\,\varepsilon)^m\, ||\theta_1||^{m-2}$$

Tomando $||\theta_1|| < \varepsilon$ se verifica la convergencia uniforme sobre todo compacto.

Podremos aplicar el cálculo operacional y tendremos:

$$G[g + r, f] = G[g, f] + d_1\, G_{[g,f]}\,[r] + 1_{2_{[g,f,r]}}\,[r, r] = 0$$

luego

$$d_1\, G_{[g,f]}\,[r] + 1_{2_{[g,f,r]}}\,[r, r] = 0$$

Teniendo en cuenta el teorema 4, si
$d_1 G_{[g,f]} + 1_{2_{[g,f\,r]}}\,[r,\ ] \in A \hat{\otimes} \mathcal{L}(F, F)$ es el elemento que resulta mediante el cálculo operacional a partir de la función:

$$(\theta, w, \theta_1) \to d_1\, G_{(\theta,W)} + 1_{2_{(\theta,W,\theta_1)}}\,(\theta_1,\ )$$

se verifica que
$(d_1\, G_{[g,f]} + 1_{2_{[g,f,r]}} + [r,\ ])\,[r] = 0$ y donde este elemento debe interpretarse como la imagen de

$(d_1\, G_{[g,f]} + 1_{2_{[g,f,r]}}\,[r,\ ]) \oplus r \in A \hat{\otimes} (\mathcal{L}(F, F) \oplus F)$ vía el cálculo operacional definido mediante la aplicación:

$$\mathcal{L}(F, F) \oplus F \to F,\ (\alpha, e) \to \alpha(e).$$

Ahora bien, tomando θ_1 de norma suficientemente pequeña se podrá hacer $||1_{2_{(\theta,W,\theta_1)}}\,(\theta_1,\ )||$ arbitrariamente pequeño para (θ, w) en un entorno adecuado de $X \times \{0\}$ en que $1_{2_{(\theta,W,\theta_1)}}$ permanezca acotada. De esta manera para (θ, w, θ_1) en un entorno adecuado de $X \times \{0\}$ existirá $T_{(\theta,W,\theta_1)} \in \mathcal{L}(F, F)$ con:

$$T_{(\theta,W,\theta_1)} \circ (\mathrm{d}_1\, G_{(\theta,W)} + 1_{2_{(\theta,W,\theta_1)}}\,(\theta_1,\ )) = I$$

siendo $T_{(\theta,W,\theta_1)}$ función holomorfa en (θ, w, θ_1).

Tendremos entonces que:

$$T_{(\theta,W,\theta_1)} \circ (d_1\, G_{(\theta,W)} + 1_{2_{(\theta,W,\theta_1)}}\,(\theta_1,\ ))\,(\theta_1) = 0_1$$

Aplicando reiteradamente el teorema 4 se sigue que $r = 0$ y vale la unicidad de la solución.

BIBLIOGRAFIA

(1) CHIDAMI, M. *Calcul fonctionnel holomorphe en dimension infinie*, (Thése de Doctorat de 3ᵉ cycle, Université de Bordeaux 1977).

(2) GAMELIN T.W. *Uniform algebras*. Prentice Hall. 1969.

(3) HAYASHY, M. *Implicit Function Theorem for Banach Algebras*. London Math. Soc. (2) 13. 1976.

(4) TAYLOR, J. *Twisted products of Banach algebras and third Čech cohomology* L.N. Springer 575.

(5) WAELBROECK, L. *Topological Vector Spaces and Algebras*. L.N. Springer 1971.

(6) WAELBROECK, L. *The holomorphic Functional Calculus and Infinite Dimensional holomorphy*. L.N. Springer 364.