DAS RINGSPEKTRUM MSOZ [1/2]

von

ROLF KULTZE

In [4] haben wir für C-orientierte Ringspektren E mit $1/2 \in E^0$ eine Abbildung v : MSOR $\to E$ zwischen Ringspektren konstruiert und in zwei Spezialfällen genauer studiert. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir Zusammenhänge zwischen v und der Conner-Floyd-Abbildung μ : MUR $\to E$, bestimmen die Struktur der Hopf-Algebra MSOR_* (MSOR) und beweisen ein exact functor theorem für MSOR_* -Moduln.

E sei wieder ein Ringspektrum mit $1/2 \in E^0$ und der C-Orientierung x^E. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $u^E = 1$ (zur Definition von u^E vgl. z.B. [4], S. 359). Bezeichnet g die Abbildung

$$g : CP^\infty \sim \mathrm{MSO}\,(2) \to S^2\mathrm{MSOR}$$

mit $R = Z[1/2]$ und wird $d_i \in E_*$ (MSOR) erklärt durch $d_i = g_*(\beta_{2i+1})$ $(i \geqq 0)$, so gilt nach [4], S. 360 $E_*\,(\mathrm{MSOR}) \cong E_*[d_1, d_2, ...]$. Weiter ist nach [2], Lemma 4.5 $E_*\,(\mathrm{MUR}) \cong E_*[b_1, b_2, ...]$.

Die Vertauschungsabbildung τ : MUR $\wedge$ MSOR $\to$ MSOR $\wedge$ MUR induziert einen Ringhomomorphismus

$$\tau_* : \mathrm{MUR}_*\,(\mathrm{MSOR}) \to \mathrm{MSOR}_*\,(\mathrm{MUR}),$$

den wir später benötigen. Bevor wir τ_* näher untersuchen, führen wir noch einige Bezeichnungen ein. $\eta_2 : \mathrm{MUR}_* \to \mathrm{MSOR}_*\,(\mathrm{MUR})$ werde durch $\mathrm{MUR} \sim S^0 \wedge \mathrm{MUR} \xrightarrow{\iota \wedge 1} \mathrm{MSOR} \wedge \mathrm{MUR}$ induziert. η_2 ist nach [2], §6 bekannt und wird dort η_R genannt. $\sum_{i \geq 0} m_i x^{i+1}$ bezeichne die zu $\sum_{i \geq 0} b_i x^{i+1}$ inverse Potenzreihe. Schließlich sei $c^{MUR} : \mathrm{MUR}_*\,(\mathrm{MUR}) \to \mathrm{MUR}_*\,(\mathrm{MUR})$ die Konjugation, die nach [2], Theorem 11.3 bekannt ist.

LEMMA 1: Für $\alpha \in \mathrm{MUR}_*$ gilt

$$\tau_*(\alpha d_i) = \eta_2(\alpha) m_{2i}.$$

BEWEIS: $\eta'_2 : \mathrm{MUR}_* \to \mathrm{MUR}_*\,(\mathrm{MUR})$ sei der Hurewicz-Homomorphismus. Dann ist

$$\begin{aligned} \tau_*(\alpha d_i) &= \tau_*(1 \wedge \mu)_*\,(\alpha b_{2i}) = (\mu \wedge 1)_*\, c^{MUR}\,(\alpha b_{2i}) = \\ &= (\mu \wedge 1)_*\,(\eta'_2(\alpha)\mathrm{m}_{2i}) = \eta_2\,(\alpha)\mathrm{m}_{2i}. \end{aligned}$$

Nach [4], S. 360 ist

$$\varkappa : E^*\,(\mathrm{MSOR}) \to \mathrm{Hom}^*{}_{E_*}\,(E_*\,(\mathrm{MSOR}),\, E_*)$$

ein Isomorphismus. $v : \mathrm{MSOR} \to E$ sei wieder erklärt durch

$$\varkappa(v)\;(1) = 1,\; \varkappa(v)\;(m) = 0,$$

wobei m ein Monom in den d_i $(i > 0)$ bezeichne. $x^{MSOR} \in \mathrm{MSOR}^2$ (CP^∞) ist definiert durch $x^{MSOR} = [g]$. Eine einfache Rechnung mit Kronecker-Produkten zeigt, daß

$$v_*(x^{MSOR}) = x^E + \sum_{i \geq 1} \alpha_{2i}(x^E)^{2i}, \tag{1}$$

wobei $\alpha_{2i} = \varkappa(v) g_*\,(\beta_{2i}) \in E_{4i-2}$. Um die Koeffizienten α_{2i} zu bestimmen, betrachten wir die formalen Gruppen $F^{MSOR}\,(x, y)$ und F^E (x, y) von MSOR und E. Bezeichnet $\varphi\,(x) \in E_*[[x]]$ die Potenzreihe $\varphi(x) = x + \sum_{i \geq 1} \alpha_{2i} x^{2i}$, so gilt nach [2], Lemma 2.13

$$\varphi(F^E(x, y)) = v_* F^{MSOR}(\varphi(x),\; \varphi(y)). \tag{2}$$

Hieraus kann man die Koeffizienten α_{2i} berechnen; man erhält z.B.

$$\alpha_2 = -\,a_{11}/2,\;\; \alpha_4 = (a_{11}^3 - \alpha_{13})/4.$$

Wir untersuchen nun Beziehungen zwischen v und μ. Das erste Resultat lautet wie folgt

SATZ 2: Die folgenden Aussagen über E sind äquivalent:

1) $\alpha_{2i}^E = 0$ für alle $i \geq 1$;

2) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{MUR} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\mu"'] & \mathrm{MSOR} \arrow[d, "v"] \\ & E \end{tikzcd}$$

ist h-kommutativ;

3) Die formale Gruppe $F^E(x, y)$ ist [2]-typisch.

BEWEIS: (Zur Definition von [2]-typischen formalen Gruppen vgl. [3], §3). 1) $\Rightarrow$ 2) : Nach Voraussetzung liefern μ und $v\mu$ die Potenzreihe $h(x) = x$. Daher ist $\mu \sim v\mu$ (vgl. [2], Lemma 4.6). 2) $\Rightarrow$ 3) : Sei $F(x, y) = \sum a_{ij}^E x^i y^j$. Wegen $v_* (x^{MSOR}) = x^E$ gilt $a_{ij}^E = v_* (a_{ij}^{MSOR})$, also ist $a_{ij}^E = 0$ für gerades $i + j$. Hieraus folgt $F^E(x, -x) = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1) : Man beachte, daß $F^{MSOR}(x, y)$ [2]-typisch und universell für [2]-typische formale Gruppen über R-Algebren ist (vgl. [3], Theorem 4.6, Theorem 5.6 und [4], Satz 7), und benutze (2).

SATZ 3: Für jedes C-orientierte Ringspektrum E mit $1/2 \in E^0$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MSOR} & \xrightarrow{v} & \mathrm{MUR} \\ & \searrow^{v} & \downarrow \mu \\ & & E \end{array}$$

h-kommutativ.

BEWEIS: Die Abbildungen v und μv liefern jeweils die Potenzreihe $x + \sum_{i \geq 1} \alpha_{2i} x^{2i}$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß somit $v \sim \mu v$.

COROLLAR 4: E sei ein C-orientiertes Ringspektrum mit $1/2 \in E^0$.

$$v_* : \mathrm{MSO}_*(X) \underset{MSO_*}{\otimes} E_* \to E_* (X)$$

ist genau dann ein Isomorphismus, wenn

$$\mu_* : \mathrm{MU}_*(X) \underset{MU_*}{\otimes} E_* \to E_*(X)$$

ein Isomorphismus ist.

BEWEIS: Aus [1], prop. 25, S. 38 folgt, daß v : MSOR $\to$ MUR einen Isomorphismus

$$\mathrm{MSOR}_*(X) \underset{MSOR_*}{\otimes} \mathrm{MUR}_* \to \mathrm{MUR}_*(X)$$

induziert. Hieraus folgt zusammen mit Satz 3 die Behauptung.

Wir wissen bereits, daß E_* (MSOR) $\cong E_*[d_1, d_2, ...]$ mit $d_i = g_*$ (β_{2i+1}). Um die Polynome $g_* (\beta_{2i}) \in E_*$ (MSOR) zu berechnen, gehen wir von der Potenzreihe $\varphi(x) = x + \sum_{i \geq 1} \alpha_{2i} x^{2i}$ aus und bilden

$\varphi^{-1}(x) = \sum_{i\geq 1} \tau_i x^i$. Nach (1) ist

$$x^E = \varphi^{-1}(\varphi(x^E)) = \varphi^{-1}(v_*(x^{MSOR})) = \sum_{i\geq 1} \tau_i [v_*(x^{MSOR})]^i.$$

Hieraus ergibt sich

$$(x^E)^j = \sum_{i\geq j} \lambda_{ji} [v_*(x^{MSOR})]^i.$$

Nach [2], Lemma 2.15 gilt dann

$$v_*(\beta_i^{MSOR}) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_{ji} \beta_j^E, \tag{3}$$

also haben wir

$$\sum_{j=1}^{2i} \lambda_{j,2i}\, g_*(\beta_j^E) = g_* v_*(\beta_{2i}^{MSOR}) = v_* g_*(\beta_{2i}^{MSOR}).$$

Da aus Dimensionsgründen $g_*(\beta_{2i}^{MSOR}) = 0$, ergibt sich schließlich

$$g_*(\beta_{2i}^E) = -\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_{2k+1,2i}\, d_k^E - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{2k,2i}\, g_*(\beta_{2k}^E). \tag{4}$$

Hieraus kann man die $g_*(\beta_{2i})$ sukzessive berechnen. Man erhält z.B.

$$g_*(\beta_2) = \alpha_2,\ g_*(\beta_4) = \alpha_4 + 3\alpha_2 d_1,$$

$$g_*(\beta_6) = \alpha_6 + (3\alpha_4 - 14\alpha_2^3) d_1 + 5\alpha_2 d_2.$$

Für spätere Untersuchungen benötigen wir noch die Abbildungen

$$v_*^1 : \mathrm{MSOR}_*(\mathrm{MSOR}) \to E_*(\mathrm{MSOR})$$

$$v_*^2 : \mathrm{MSOR}_*(\mathrm{MUR}) \to E_*(\mathrm{MUR}).$$

Unter Benutzung von (3) ergibt sich

$$v_*^1(d_i^{MSOR}) = v_*^1 g_*(\beta_{2i+1}^{MSOR}) = g_* v_*(\beta_{2i+1}^{MSOR}) = \sum_{j=1}^{2i+1} \lambda_{j,2i+1} g_*(\beta_j^E) =$$

$$= \sum_{k=0}^{i} \lambda_{2k+1,2i+1}\, d_k^E + \sum_{k=1}^{i} \lambda_{2k,2i+1} g_*(\beta_{2k}^E). \tag{5}$$

Man erhält z.B. in Verbindung mit (4)

$$v_*^1(d_1) = d_1,\ v_*^1(d_2) = d_2 - 3a_{11}^2 d_1/4.$$

Nach [2], (4.4) gilt weiter

$$v_*^2(b_i^{MSOR}) = \sum_{j=0}^{i} \lambda_{j+1,i+1}\, b_j^E. \tag{6}$$

Man hat z.B.

$$v_*^2(b_1) = b_1 + a_{11}/2, \quad v_*^2(b_2) = b_2 + a_{11}b_1 + a_{11}^2/2.$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Hopf-Algebra $MSOR_*$ (MSOR). $h(x)$ sei die Potenzreihe $h(x) = \sum_{i\geq 0} d_i\, x^{2i+1}$ und $\eta_2 : MSOR_* \to MSOR_*$ (MSOR) der Hurewicz-Homomorphismus. η_2 kann man mit Hilfe der Formel

$$\eta_2 F^{MSOR}(x, y) = h(F^{MSOR}(h^{-1}(x), h^{-1}(y)))$$

berechnen; zum Beweis verwende man die Methoden von [2], §6. Man erhält z.B. $\eta_2(a_{12}) = 3d_1 + a_{12}$. Weiter sei $\sum_{i\geq 0} n_i x^{2i+1}$ die zu $h(x)$ inverse Potenzreihe und d_i^k die $4i$-dimensionale Komponente von $(\sum_{i\geq 0} d_i)^k$.

Satz 5: Es gilt $MSOR_*$ (MSOR) $\simeq MSOR_*[d_1, d_2, \ldots]$. Coprodukt

$$\Psi_{MSOR} : MSOR_*(MSOR) \to MSOR_*(MSOR) \underset{MSOR_*}{\otimes} MSOR_*(MSOR),$$

Konjugation $c^{MSOR} : MSOR_*(MSOR) \to MSOR_*(MSOR)$, Coeins $\varepsilon : MSOR_*(MSOR) \to MSOR_*$ und $(\mu \wedge \mu)_* : MUR_*(MUR) \to MSOR_*(MSOR)$ haben die Eigenschaften

$$\Psi_{MSOR}(d_k) = \sum_{j+t=k} d_j^{2t+1} \otimes d_t$$

$$c_{MSOR}(d_k) = n_k$$

$$\varepsilon(d_k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

$$(\mu \wedge \mu)_*\,(b_i) = \begin{cases} d_k & i = 2k \\ 0 & i = 2k+1 \end{cases}$$

Beweis: Die ersten drei Gleichungen beweist man mit den

Techniken von [2], §11. Die letzte Gleichung folgt aus $g \sim \mu f$, wobei f : CP $\approx$ MU (1) $\to$ S²MUR.

Nunmehr sind wir in der Lage, den Homomorphismus

$$(v \wedge v)_* : \mathrm{MSOR}_* (\mathrm{MSOR}) \to \mathrm{MUR}_* (\mathrm{MUR})$$

zwischen Hopf-Algebren zu berechnen, denn es gilt offenbar

$$(v \wedge v)_* = v_*^2 \; \tau_* \; v_*^1 \; c^{MSOR};$$

c^{MSOR} wird in Satz 5, v_*^1 in (5), τ_* in Lemma 1 und v_*^2 in (6) beschrieben. Man erhält z.B. $(v \wedge v)_*(d_1) = b_2 - 2b_1^2 - a_{11}b_1$.

Unser nächstes Ziel ist die Herleitung eines exact functor theorem für MSOR_*-Moduln. Bekanntlich ist $\mathrm{MU}_* \simeq Z[x_1, x_2, \ldots]$ mit dim $x_i = 2i$; man kann annehmen, daß $x_{p-1} = [CP^{p-1}]$ für jede Primzahl p. Für $n \in N$ und ungerades p sei $I(p, n) \subset \mathrm{MUR}_* \simeq R[x_1, x_2, \ldots]$ das Ideal

$$I(p, n) = (p, x_{p-1}, \ldots, x_{p^{n-1}-1}).$$

Aus [5], Theorem 2.7 ergibt sich durch Lokalisierung

Lemma 6: Die invarianten, endlich erzeugten Primideale von MUR_* sind genau die Ideale O und $I(p, n)$ mit $p \neq 2$ und $n \in N$.

MUR_0 sei wieder das in [4], S. 363 untersuchte Ringspektrum von Adams; insbesondere gilt $\mathrm{MUR}_{0*} \simeq R[x_2, x_4, \ldots]$. Weiter ist $\mathrm{MSOR}_* \simeq R[y_1, y_2, \ldots]$ (dim $y_i = 4i$). Für v : MSOR $\to \mathrm{MUR}_0$ hat man nach [4], S. 363

$$v_*(y_i) = x_{2i}. \tag{7}$$

Für $n \in N$ und ungerades p sei $J(p, n) \subset \mathrm{MSOR}_*$ das Ideal

$$J(p, n) = (p, y_{(p-1)/2}, \ldots, y_{(p^{n-1}-1)/2}).$$

Lemma 7: Die invarianten, endlich erzeugten Primideale von MSOR_* sind genau die Ideale O und $J(p, n)$ mit $p \neq 2$ und $n \in N$.

Beweis: Man beachte $\mathrm{MUR}_* \simeq \mathrm{MUR}_{0*}[x_1, x_3, \ldots]$ und bestimme unter Benutzung von Lemma 6 mit den Techniken von [7], §6 die invarianten, endlich erzeugten Primideale von MUR_{0*}. Aus (7) ergibt sich dann die Behauptung.

$\mathcal{U}$ sei die Kategorie der Comoduln über MSOR_* (MSOR), die endlich präsentierte MSOR_*-Moduln sind. Für $\mathcal{U}$ gilt das Filtrierungstheorem [6], Theorem 3.3'; hieraus ergibt sich zusammen mit Lemma 7 wie in [7]

SATZ 8: G sei ein MSOR_*-Modul. Der Funktor $M \to M \otimes_{MSOR_*} G$ auf $\mathcal{U}$ ist genau dann exakt, wenn G die Eigenschaften hat:
1) $p : G \to G$ ist monomorph für alle ungeraden Primzahlen p.
2) $\cdot y_{(p^n-1)/2} : G/J(p, n)G \to G/J(p, n)\ G$ ist monomorph für alle ungeraden Primzahlen p und $n \in N$.

Wir benutzen nun Satz 8, um ein universelles Koeffiziententheorem herzuleiten. KR bezeichne wieder das Ringspektrum der komplexen K-Theorie mit Koeffizienten in R. $KR^*(-)$ spaltet nach [1], S. 91 wie folgt

$$KR^*(-) \cong K_0^*(-) \oplus K_1^*(-).$$

$K_0^*(-)$ ist eine C-orientierte, multiplikative Cohomologietheorie mit der Periode 4. Die Abbildung $v_* : \mathrm{MSOR}_* \to K_{0*} \cong R$ (die Theorien seien im folgenden Z_4-graduiert) macht R zu einem MSOR_*-Modul. Wegen $v_*(y_{(p-1)/2}) = 1$ (man benutze das Diagramm von Satz 2) sind die Bedingungen 1) und 2) von Satz 8 erfüllt. Daher ist $\mathrm{MSOR}_*(X) \otimes_{MSOR_*} R$ eine Homologietheorie auf der Kategorie der endlichen CW-Komplexe und somit

$$v_* : \mathrm{MSOR}_*(X) \otimes_{MSOR^*} R \to K_{0*}(X)$$

ein Isomorphismus. Dies ist äquivalent zu einem Resultat von Adams (vgl. [1], S. 113, exercise 20).

LITERATUR

[1] J.F. ADAMS, *Lectures on generalized cohomology*, Lecture Notes in Math. 99, 1-138, Springer (1969).

[2] J.F. ADAMS, *Quillen's work on formal groups and complex cobordism*, University of Chicago lecture notes (1970).

[3] S. ARAKI, *Typical formal groups in complex cobordism and K-theory*, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ., 6, Kinokuniya Book-Store 1973.

[4] R. KULTZE, *Die 1/2-Lokalisierung des Spektrums MSO*, manuscr. math. 22, 359-364 (1977).

[5] P.S. LANDWEBER, *Annihilator ideals and primitive elements in complex bordism*, Illinois J. Math. 17, 273-284 (1973).

[6] P.S. LANDWEBER, *Associated prime ideals and Hopf-algebras*, J. Pure and Applied Algebra 3, 43-58 (1973).

[7] P.S. LANDWEBER, *Homological properties of comodules over* $MU_*(MU)$ *and* $BP_*(BP)$, Am. J. Math. 98, 591-610 (1976).

ROLF KULTZE

Math. Seminar der
J.W. Goethe-Universität
6000 Frankfurt a. M.