LA PROYECCION PLANA GENERICA DE UNA RAMA DE CURVA ALABEADA

por

EDUARDO CASAS ALVERO

1. — INTRODUCCIÓN. Sea γ una rama de curva algebraica con origen en un punto p del espacio proyectivo complejo de dimensión tres, P_3. A principios del presente siglo se admitía como resultado establecido la coincidencia de la composición de γ (i. e., las multiplicidades en γ de p y los sucesivos puntos infinitamente próximos a p en γ) con la de su proyección plana desde un punto genérico del espacio. Se debe a Zariski (1) la observación de que tal resultado es, en general, falso. Mostraré aquí como pueden caracterizarse las ramas de curva alabeada cuya composición coincide con la de su proyección plana desde un punto genérico.

2. — TRANSFORMACIONES CUADRÁTICAS. Serán de utilidad las llamadas transformaciones cuadráticas de primera especie con cónica fundamental degenerada: una tal transformación, sea T, se obtiene refiriendo los planos de un segundo espacio proyectivo, P_3', a las cuádricas del sistema lineal engendrado por cuatro cuádricas linealmente independientes que tienen en común una cónica K (cónica fundamental de T) degenerada en dos rectas, y un punto O (centro de T), exterior al plano de K. Eligiendo los sistemas de referencia adecuados, las ecuaciones de la transformación son

$$x_0' = x_0 x_3 \quad x_1' = x_1 x_3 \quad x_2' = x_2 x_3 \quad x_3' = x_1 x_2$$

El centro es $(0,0,0,1)$ y la cónica fundamental es la $x_3 = 0$, $x_1 x_2 = 0$. Diremos que el punto doble de K, $q = (1,0,0,0)$, es el polo de la transformación. Se observa fácilmente que la transformación inversa,

(1) *Algebraic Surfaces* (1935), pág. 12 de la segunda edición, Springer Velag, 1971.

T^{-1}, es del mismo tipo, sean O' y K' sus centro y cónica fundamental: al plano ω de K' le llamaremos plano fundamental de T. La transformación T presenta las siguientes propiedades, que pueden verificarse directamente a partir de la expresión analítica anterior (2).

a) Los puntos del plano fundamental son los puntos del primer entorno de O en P_3, correspondientes a las direcciones que parten de O.

b) Los planos por O se transforman en planos por O', de manera que T induce una proyectividad entre las radiaciones de planos de vértices O y O'.

c) Las superficies de orden n que contienen a O como punto μ-uplo, se transforman en superficies de orden $2n - \mu$ que cortan a ω en una curva de orden μ (cuyos puntos corresponden a las direcciones de las generatrices del cono tangente en O) y la cónica K contada $n - \mu$ veces.

d) Las rectas por el polo q de T se transforman en rectas por el polo q' de T^{-1}, de modo que entre las radiaciones de rectas de vértices q y q', se induce una transformación cuadrática ordinaria entre espacios proyectivos de dimensión dos, cuyos puntos fundamentales son la recta Oq y las dos rectas que componen K.

e) El polo de T^{-1} es el punto del plano fundamental de T correspondiente a la dirección de la recta que une el centro con el polo de T.

Todas las transformaciones que se utilicen en adelante se entenderán cuadráticas de primera especie, con cónica fundamental degenerada, salvo mención explícita en contra.

3. — La demostración de Enriques. Enriques, en el libro IV, capítulo IV, de la Teoría Geométrica delle Equazioni, ya citada, da una demostración, necesariamente errónea, de la coincidencia de las composiciones de una rama de curva alabeada γ y su proyección desde un punto genérico. Interesa analizar dicha demostración, porque en su mismo orden de ideas se conseguirá la caracterización de las ramas de curva cuya composición coincide con la de su proyección desde un punto genérico.

Sea γ una rama de curva alabeada con origen en un punto $p \in P_3$. Enriques considera una transformación T_1 con centro en p y cónica

(2) Véase también Enriques-Chirini, *Teoria Geométrica delle equazioni*, N. Lanichelli, Bologna, 1915-24, libro IV, cap. IV.

fundamental (degenerada en dos rectas) elegida genéricamente. Sea γ_1 la transformada de γ, cuyo origen será un punto p_1 del plano fundamental ω_1 de T_1, punto del primer entorno de p en γ. Si q y q_1 son los polos de T_1 y T^{-1}, sean γ' y γ_1' las proyecciones de γ y γ_1 desde q y q_1, respectivamente. Según la propiedad d del § 2, γ_1' se obtiene de γ' por medio de una transformación cuadrática ordinaria entre planos, uno de cuyos puntos fundamentales es el origen p' de γ', mientras los dos restantes han sido elegidos genéricamente: consecuentemente, el origen p_1' de γ_1' es el punto del primer entorno de p' en γ'. La demostración prosigue ahora por inducción sobre el número de puntos múltiples sucesivos de γ: las composiciones de γ_1 y γ_1' coinciden por hipótesis de inducción, con lo que también coinciden las de γ y γ'. El punto débil de la demostración fue puesto en evidencia por Zariski (c. f. la cita de la introducción): a pesar de tomar q en posición general, no puede asegurarse que q_1 esté en posición general de γ_1, lo que impide aplicar la hipótesis de inducción a γ_1 y su proyección desde q_1.

A pesar de ello, efectuemos la transformación T_1 tomando como polo q un punto cualquiera del espacio no situado sobre la tangente a γ y como cónica fundamental, K_1, un par de rectas genéricas por q. La hipótesis de que q no está sobre la tangente a γ permite asegurar que el origen p_1 de γ_1 no coincide con q_1 (e, § 2). Efectuemos una nueva transformación T_2 con centro en p_1, polo en q_1 y cónica fundamental, K_2, compuesta por dos rectas genéricas por q_1. Sea $\gamma_2 = T_2(\gamma_1)$, p_2 el origen de γ_2 y q_2 el polo de T_2^{-1}: p_2 y q_2 son distintos sí y sólo si la tangente a γ_1 no contiene a q_1; en este caso, podemos proseguir con una nueva transformación de centro p_2 y polo q_2 : supongamos efectuadas de esta forma $i + 1$ transformaciones $T_1, \ldots, T_{i+1}$; para cada j, $j \leqslant i + 1$, el centro de T_j será el origen p_{j-1} de γ_{j-1}, su polo, el polo q_{j-1} de T_{j-1}^{-1}, la cónica fundamental será un par de rectas genéricas por q_{j-1} y designaremos por γ_j la transformada $T_j(\gamma_{j-1})$. En particular, suponemos que, para cada $j < i + 1$, p_j y q_j son distintos, en caso contrario no podría efectuarse T_{j+1}.

Para cada j, $j < i + 1$, sea γ_j' la proyección de γ_j desde q_j: cada γ_j' se obtiene de la precedente, γ'_{j-1}, por medio de una transformación cuadrática ordinaria del plano, uno de cuyos puntos fundamentales es el origen p_{j-1} de γ'_{j-1} mientras los dos restantes están en posición general. De este modo, así como los $p_1, \ldots, p_i$ son los puntos en el primer, ..., iésimo entorno de p en γ, $p_1', \ldots, p_i'$, orígenes de $\gamma_1', \ldots,$

γ_i', son los puntos en el primer, ..., iésimo entorno de p' en γ': quedan pues en evidencia parte de las composiciones de γ y γ'.

Por otra parte, cada γ_j', para $j < i$, es proyección de γ_j desde un punto exterior a la tangente, puesto que, si $p_j q_j$ es tangente a γ_j, por e, § 2, $q_{j+1} = p_{j+1}$ contra la hipótesis si $j < i$. De este modo, para $j < i$, las multiplicidades de p_j y p_j' en γ_j y γ_j', respectivamente, coinciden. Las multiplicidades de p_i y p_i' coinciden sí y sólo si la tangente a γ_j no coincide con $p_j q_j$, es decir, sí y sólo si $p_{i+1} \neq q_{i+1}$, que es el caso en que puede proseguirse con una nueva transformación, T_{i+2}, con centro en p_{i+1} y polo en q_{i+1}. Tenemos

PROPOSICIÓN 1. *Sea γ una rama de curva alabeada con origen en p, q un punto del espacio, exterior a la tangente a γ y γ' la proyección plana de γ desde q. Las composiciones de γ y γ' coinciden hasta el iésimo entorno sí y sólo si pueden efectuarse transformaciones $T_1, \ldots, T_{i+2}$, con centro y polo de T_1 en p y q, respectivamente, de manera que si $\gamma_j = T_j(\gamma_{j-1})$, $\gamma_0 = \gamma$, p_j es el origen de γ_j y q_j el polo de T_j^{-1}, T_{j+1} tiene centro en p_j, polo en q_j y cónica fundamental compuesta por dos rectas genéricas por q_j.*

DEMOSTRACIÓN. Acabamos de observar que, en la hipótesis de existencia de la sucesión de transformaciones, las composiciones coinciden hasta el iésimo entorno. Recíprocamente, de no poder completar la construcción hasta $i + 2$ transformaciones, se alcanzará j, $j < i + 2$, para el que $p_j = q_j$, en cuyo caso $p_{j-1} q_{j-1}$ es tangente a γ_{j-1} y con ello la multiplicidad de p'_{j-1} es superior a la de p_{j-1}, con $j - 1 \leq i$.

4. — PUNTOS SEMISATÉLITES Y SATÉLITES. Conviene recordar ahora como, entre los puntos infinitamente próximos a un punto p de p_3, se distingue entre puntos libres, semisatélites y satélites (3).

Sea p_s un punto del s-ésimo entorno de p en p_3, precedido por los puntos $p_1, \ldots, p_{s-1}$ del primer, ..., $(s - 1)$-entorno de p. Supongamos que p_s se ha obtenido tras efectuar s transformaciones cuadráticas de primera especie, $T_1, \ldots, T_s$, con cónica fundamental degenerada y centros respectivos $p, \ldots, p_{s-1}$; para cada i, sea ω_i el plano fundamental de T_i:

(3) Véase E. Casas, *La noción de satelitismo en el espacio*, Actas de las IV jornadas matemáticas hispano-lusitanas (Jaca, 1977).

a) p_s es libre si no existe i, $0 < i < s$, tal que

$$p_{i+1} \in T_{i+1}(\omega_i), \quad p_{i+2} \in T_{i+2} T_{i+1}(\omega_i), \ldots, \quad p_s \in T_s \ldots T_{i+1}(\omega_i) \quad (1)$$

b) Si p_s no es libre, sea i el menor entero para el que se verifican relaciones del tipo de las (1): p_s es semisatélite si no existe j, $i < j < s$, con

$$p_{j+1} \in T_{j+1}(\omega_j), \quad p_{j+2} \in T_{j+2} T_{j+1}(\omega_j), \ldots, \quad p_s \in T_s \ldots T_{j+1}(\omega_j) \quad (2)$$

c) p_s será satélite si no es libre ni semisatélite, es decir, si existen i, j, con $0 < i < j < s$, de manera que se verifiquen (1) y (2).

No hay posibilidad de que, simultaneamente a (1) y (2) se verifique un tercer grupo de relaciones

$$p_{t+1} \in T_{t+1}(\omega_t), \quad p_{t+2} \in T_{t+2} T_{t+1}(\omega_t), \ldots, \quad p_s \in T_s \ldots T_{t+1}(\omega_t)$$

para un tercer t, $0 < t < s$, $t \neq i$, $t \neq j$.

Los puntos en el primer entorno de p son todos libres. Si p_s es un punto en el s-ésimo entorno de p, los puntos del primer entorno de p_s aparecen en el plano fundamental de una transformación centrada en p_s, presentando las siguientes configuraciones:

Si p_s es libre, en su primer entorno aparece una recta de puntos semisatélites, siendo libres los restantes.

Si p_s es semisatélite, en su primer entorno aparecen dos rectas cuyos puntos son semisatélites, a excepción del común que es satélite; los restantes puntos son libres.

Si p_s es satélite, en su primer entorno está determinado un triángulo cuyos vértices son puntos satélites, los puntos de los lados son semisatélites y los restantes puntos del plano son libres.

Los puntos libres, semisatélites y satélites pueden caracterizarse, independientemente de las transformaciones utilizadas en la definición, de la siguiente forma: sea p_s en el s-ésimo entorno de p, precedido por $p_1, \ldots, p_{s-1}$; designemos por γ una rama de curva con origen en p que contenga a p_s y sean $\mu = \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{s-1}$ las multiplicidades de $p, p_1, \ldots, p_{s-1}$ en γ:

α) Si p_s no es libre, existe i, $0 < i < s$, de modo que, cualquiera que sea γ, $\mu_{i-1} > \mu_i + \ldots + \mu_{s-1}$. Recíprocamente, si se tiene una tal desigualdad para una sola rama γ, p_s no es libre.

β) Si p_s es satélite, existen i, j, $0 < i < j < s$, de manera que, cualquiera que sea γ, $\mu_{i-1} > \mu_i + \ldots + \mu_{s-1}$, $\mu_{j-1} > \mu_j + \ldots + \mu_{s-1}$. Recíprocamente también, si se dan dichas desigualdades para una sola rama γ, p_s es satélite.

Los enteros i, j que aparecen en la caracterización, corresponden a sus homónimos en la definición anterior.

Se observa inmediatamente que cada vez que sobre una rama aparece un descenso de multiplicidad, de un punto al sucesivo, aparecen uno o más puntos semisatélites. En particular, sobre una rama singular aparecen siempre puntos semisatélites, pudiendo aparecer o no puntos satélites.

5. — Puntos seguidores de satélites. No basta con la distinción entre puntos libres, semisatélites y satélites para caracterizar las ramas de curva cuya composición coincide con la de su proyección genérica. Caracterizaremos ahora a determinados puntos semisatélites que tomarán el nombre de seguidores de satélites.

Conviene advertir en primer lugar que si p_s es un punto del s-ésimo entorno de p, al considerar los puntos del primer entorno de p_s como los puntos del plano fundamental ω_{s+1} de una transformación centrada en p_s, el primer entorno de p_s adquiere una estructura de plano proyectivo que tiene carácter intrínseco, i. e., independiente de las transformaciones utilizadas. En efecto, los puntos de ω_{s+1} están en correspondencia biyectiva con las clases de ramas de curva, con origen en p y que contienen a p_s, que definen intrínsecamente los puntos del primer entorno de p_s (4); cada recta de ω_{s+1} está formada por los puntos del primer entorno de p_s en una superficie por p que contiene a p_s como punto simple y recíprocamente, el primer entorno de p_s en una tal superficie es una recta de ω_{s+1}. De esta forma, el hecho de que tres puntos de ω_{s+1} estén alineados tiene un sentido intrínseco al considerarlos como puntos del primer entorno de p_s: cada superficie por p que contiene a p_s como punto simple, al contener a dos de ellos, contiene al tercero. De aquí que, si p_s se alcanza por otras transformaciones y se construye su primer entorno mediante una transformación de plano fundamental ω'_{s+1}, se tenga una proyectividad entre ω_{s+1} y ω'_{s+1} por la que se corresponden los puntos que representan un mismo punto infinitamente próximo a p.

Sea ahora p_{s-1} un punto no libre en el $(s-1)$-entorno de p: en el primer entorno de p_{s-1} aparecen uno o tres puntos satélites; sea p_s un punto no satélite del primer entorno de p_{s-1} y q_s uno de

(4) Véase Van der Waerden, *Infinitely near points*, Ind Mat., 12 1950.

los puntos satélites de dicho entorno: diremos que el punto h_{s+1} del primer entorno de p_s, correspondiente a la dirección de la recta $p_s q_s$, es un punto seguidor del satélite q_s. Definiendo inductivamente, si h_r es seguidor del satélite q_s, en el primer entorno de p_{r-1}, sea p_r un punto cualquiera del primer entorno de p_{r-1}, distinto de h_r: el punto h_{r+1}, del primer entorno de p_r, que corresponde a la dirección de la recta $p_r h_r$, se dirá también seguidor del satélite q_r.

El carácter intrínseco de la noción de seguidor de satélite se sigue del de la noción de punto satélite y de la anterior observación acerca de la estructura canónica de plano proyectivo del primer entorno de cada punto infinitamente próximo a p. De hecho h_{s+1} viene caracterizado por ser el punto del primer entorno de p_s común a todas las superficies por p que contienen a p_{s-1} como punto simple, a p_s y a q_s; asimismo, h_{r+1} es el punto del primer entorno de p_r común a todas las superficies por p que tienen a p_{r-1} como punto simple y contienen a h_r y p_r.

Se observa que los seguidores de satélites son siempre puntos no libres, puesto que provienen de una dirección contenida en un plano fundamental: pueden ser puntos satélites (cuando p_s o p_r no son libres), en cuyo caso dejaremos de llamarles seguidores de satélite.

Interesa aquí el caso de un grupo de puntos sucesivos $p_{r+1}, \ldots,$ p_{r+j}, donde p_{r+1} es semisatélite precedido por puntos libres y ninguno de los restantes puntos es satélite o seguidor de satélite. En tales condiciones, en el primer entorno de cada p_{r+i}, $1 < i \leq j$ hay un solo punto seguidor de satélite que es satélite sí y sólo si p_{r+i} es semisatélite.

6. — El teorema de caracterización. Sea γ una rama de curva alabeada, singular y con origen en p, $\mu\,(>1)$ la multiplicidad de p en γ. Suceden a p sobre γ un número finito (posiblemente nulo) de puntos de multiplicidad μ, sean $p_1, \ldots, p_{r-1}$, a los que sucederá p_r de multiplicidad $\mu' < \mu$. Por lo enunciado en el § 4, $p_1, \ldots, p_r$ son puntos libres a los que sucede el primer punto semisatélite de γ, p_{r+1}.

Proposición 2. *La composición de γ y la de su proyección desde un punto genérico q del espacio, coinciden hasta el r-ésimo entorno.*

Demostración. Probaremos que la proyección de γ desde un punto genérico de una recta no apoyada en la tangente a γ presenta composición coincidente con la de γ hasta el r-ésimo entorno. Sea R

una recta no apoyada en la tangente: elijamos una referencia proyectiva de vértices A_0, A_1, A_2, A_3 con $A_0 = p$, A_2 y A_3 elegidos sobre R y A_1 no coplanario con los anteriores. Si x_0, x_1, x_2, x_3 son las coordenadas homogéneas en tal referencia, sean coordenadas afines con origen en p, $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, $z = x_3/x_0$. El plano $x = 0$ no contiene a la tangente a γ y corta por ello a γ con multiplicidad μ: podemos tomar $t = \sqrt[\mu]{x}$ como parámetro y γ admite una representación mediante series de potencias de la forma

$$x = t^\mu$$
$$y = a_1 t^\mu + a_2 t^{2\mu} + \ldots + a_{r-1} t^{(r-1)\mu} + a_r t^{(r-1)\mu+\mu'} + \ldots$$
$$z = b_1 t^\mu + b_2 t^{2\mu} + \ldots + b_{r-1} t^{(r-1)\mu} + b_r t^{(r-1)\mu+\mu'} + \ldots$$

con uno, por lo menos, de los coeficientes a_r, b_r, no nulo: en efecto por hipótesis, efectuando sucesivas transformaciones del tipo $(x, y, z) \to \to (x, y/x, z/x)$, situando cada vez el origen de coordenadas en el origen de la rama, deben obtenerse $r - 1$ puntos μ-uplos seguidos de un punto μ'-uplo; ello obliga a que en las expresiones $y(t)$, $z(t)$ no aparezcan otros términos que los de grado divisible por μ, hasta el de grado $(r-1)\mu + \mu'$, el cual debe aparecer efectivamente en una de las dos series por lo menos. Proyectando ahora γ desde $(0,0,\alpha,1)$ sobre el plano $z = 0$, se observa directamente, a la vista de la representación en serie de la proyección, que esta presenta $r - 1$ puntos μ-uplos sucediendo al origen, seguidos de un punto μ'-uplos si $a_r - \alpha b_r \neq 0$.

Conviene observar ahora que, si para una rama γ puede efectuarse una sucesión de transformaciones como la descrita en la proposición 1, de forma que llegue a superarse el primer punto semisatélite, las posiciones de los polos q_i quedan determinadas, independientemente de la elección del primer polo q.

PROPOSICIÓN 3. *Sea γ una rama de curva alabeada con origen en p, supongamos que entre los puntos $p_1, \ldots, p_{i-1}$, del primer, ..., $(i-1)$-ésimo entorno de p en γ, no se halla ningún punto satélite pero si algún punto semisatélite. Supongamos también que ha sido posible efectuar una sucesión de transformaciones $T_1, \ldots, T_i$, como la descrita en la proposición* 1; *independientemente de la elección del polo q de T_1, el polo de T_i^{-1}, q_i, adopta una posición bien determinada: q_i es el punto satélite o seguidor de satélite del primer entorno de p_{i-1}, según que p_{i-1} sea, respectivamente, semisatélite o libre.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea i, $i > 1$, el polo q_i de T_i^{-1} no es libre, puesto que al corresponder a la dirección de la recta $q_{i-1}\,p_{i-1}$ contenida en el plano fundamental ω_{i-1} de T_{i-1}, $q_i \in T_i(\omega_{i-1})$.

Supongamos que p_{i-1} es semisatélite: si p_{i-2} es libre, deberá ser $p_{i-1} \in T_{i-1}(\omega_{i-2})$, de ahí que, siendo, como hemos señalado, $q_{i-1} \in T_{i-1}(\omega_{i-2})$, la recta $p_{i-1}\,q_{i-1}$ sea la de puntos semisatélites del primer entorno de p_{i-2}, a cuya dirección corresponde el punto satélite del primer entorno de p_{i-1}: de $p_{i-1}\,q_{i-1} \subset T_{i-1}(\omega_{i-2})$ se tiene $q_i \in T_i\,T_{i-1}(\omega_{i-2})$ además de $q_i \in T_i(\omega_{i-1})$. Si p_{i-2} es semisatélite, haciendo inducción sobre el número de puntos que separan a p_{i-1} de su más inmediato antecedente libre, podemos suponer probado que q_{i-1} es el punto satélite del primer entorno de p_{i-2}: con ello la recta $p_{i-1}\,q_{i-1}$ es la recta de semisatélites del primer entorno de p_{i-2} que contiene a p_{i-1}, recta a cuya dirección corresponde, por T_i, el punto satélite del primer entorno de p_{i-1}.

Supongamos ahora que p_{i-1} es libre: si p_{i-2} es semisatélite, q_{i-1} es, por lo ya demostrado, el satélite del primer entorno de p_{i-2}; el punto q_i, que corresponde a la dirección de la recta $p_{i-1}\,q_{i-1}$, será, por definición, el seguidor de satélite del primer entorno de p_{i-1}. Si p_{i-2} es libre, por inducción sobre el número de puntos que separan a p_{i-1} de su más inmediato antecedente semisatélite, podemos suponer probado que q_{i-1} es el seguidor de satélite del primer entorno de p_{i-2}; de aquí, por la misma definición, q_i, correspondiente a la dirección de $p_{i-1}\,q_{i-1}$, es el seguidor de satélite del primer entorno de p_{i-1}.

Estamos ya en condiciones de obtener la caracterización de las ramas de curva alabeada cuya composición coincide con la de su proyección plana desde un punto genérico q.

TEOREMA. *Sea γ una rama de curva alabeada con origen en un punto p del espacio proyectivo complejo de dimensión tres. La composición de γ coincide con la de su proyección plana desde un punto genérico del espacio sí y sólo si γ no contiene puntos satélites ni puntos seguidores de satélites.*

DEMOSTRACIÓN. Obviamente, si γ es no singular, su composición coincide con la de su proyección desde un punto genérico y, por otra parte, todos los puntos de γ son libres, de manera que no puede contener puntos satélites o seguidores de satélites. Bastará pues considerar el caso de las ramas singulares, que viene tratado en el siguiente.

LEMA. *Sea γ una rama de curva alabeada singular, con origen en un punto p. Sea $p_1, \ldots, p_r$ el grupo de puntos libres que suceden a p en γ; p_{r+1} será el primer punto semisatélite de γ. Sea q un punto genérico del espacio y γ' la proyección plana de γ desde q. Las composiciones de γ y γ' coinciden hasta e r-ésimo entorno; la condición necesaria y suficiente para que coincidan hasta el $(r+j)$-ésimo entorno, es que γ no contenga puntos satélites ni seguidores de satélites hasta el entorno $r+j+1$.*

DEMOSTRACIÓN. La proposición 2 asegura que las composiciones de γ y γ' coinciden hasta el r-ésimo entorno; por la proposición 1, pueden efectuarse transformaciones $T_1, \ldots, T_{r+2}$ en las condiciones de dicha proposición y con el polo de T_1 en q. Si tenemos en cuenta que p_{r+1} es semisatélite y aplicamos la proposición 3, el polo q_{r+2} de T_{r+2}^{-1} es el satélite del primer entorno de p_{r+1}. Sea p_{r+2} el punto que sigue a p_{r+1} en γ; la posibilidad de efectuar T_{r+3}, con centro en p_{r+2} y polo en q_{r+2}, equivalente a la coincidencia de composiciones hasta el $(r+1)$-entorno, por la proposición 1, equivale a $p_{r+2} \neq q_{r+2}$, es decir a que p_{r+2} no sea satélite, que es la condición del enunciado para $j=1$ (no cabe la posibilidad de que p_{r+2} sea seguidor de satélite ni de que ninguno de los puntos que le preceden sea satélite ni seguidor de satélite). Sea $j>1$ y supongamos, por inducción, probado el enunciado hasta $j-1$: si las composiciones coinciden hasta el entorno $r+j$, por la proposición 1, habrá sido posible efectuar transformaciones hasta T_{r+j+2}, con lo que, en particular, $p_{r+j+1} \neq q_{r+j+1}$. Por otra parte, las composiciones coinciden hasta el entorno $r+j-1$, aplicando la hipótesis de inducción, ninguno de los puntos hasta p_{r+j} es satélite o seguidor de satélite; podemos aplicar la proposición 3 para $i=r+$ $+j-1$: q_{r+j+1} será el satélite del primer entorno de p_{r+j} si este es semisatélite, o el seguidor de satélite de dicho entorno si p_{r+j} es libre; dado que $p_{r+j+1} \neq q_{r+j+1}$ y que en el primer entorno de p_{r+j} hay un solo satélite o un solo seguidor de satélite, p_{r+j+1} no puede ser satélite ni seguidor de satélite. Recíprocamente, supongamos que γ no contiene satélites ni seguidores de satélites hasta el punto p_{r+j+1}; por la hipótesis de inducción, las composiciones coinciden hasta el entorno $r+j-1$ y, por la proposición 1, se han podido efectuar $T_1, \ldots, T_{r+j+1}$; si aplicamos la proposición 3 para $i=r+j+1$, obtenemos que q_{r+j+1} es satélite o seguidor de satélite (según sea p_{r+j} semisatélite o libre), por lo tanto $q_{r+j+1} \neq$

$\neq p_{r+j+1}$ en virtud de la hipótesis, es posible efectuar T_{r+j+2} y, aplicando de nuevo la proposición 1, las composiciones coinciden hasta el entorno $r + j$.

Departamento de Geometría y
Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona