PSEUDOCOMPACIDAD Y COMPACIDAD NUMERABLE DEL PRODUCTO DE DOS ESPACIOS TOPOLOGICOS

por

J. L. Blasco Olcina (*)

Abstract. Following Frolík we use $\mathfrak{C}$ (resp. $\mathfrak{B}$) to denote the class of completely regular spaces X such that $X \times Y$ is countably compact (resp. pseudocompact), whenever Y is. In this paper we give new characterizations of $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{B}$. In the fourth section countably compact products of two countably compact spaces are studied. Characterizations of the sequentially compact and countably compact spaces are given in the fifth section.

Notación. En este artículo la palabra *espacio* servirá para designar un espacio topológico de Hausdorff. Si X es un espacio completamente regular escribiremos βX para la compactación de Stone-Čech de X. El conjunto de los números naturales vendrá representado por N y se le supondrá provisto de la topología discreta. Escribiremos $|A|$ para el cardinal de un conjunto A.

1. Cardinalidad de algunos espacios en las clases $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{B}$.

El teorema que vamos a dar a continuación nos permitirá establecer unas cotas sobre el cardinal de algunos espacios de las clases $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{B}$.

Teorema 1.1. — *Si $N \subset Y \subset \beta N$ y $|Y| < 2^{2^{\aleph_0}}$, existe un espacio Z numerablemente compacto tal que $Y \times Z$ no es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que $|Y| < 2^{2^{\aleph_0}}$, entonces es obvio que $|Y \sim N| < 2^{2^{\aleph_0}}$ y por ([4], L. 2.9) existe un espacio Z numerablemente compacto ($= \aleph_0$-compacto) tal que

$$N \subset Z \subset \beta N \sim (Y \sim N)$$

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia y ha sido patrocinado por la Fundación Juan March.

Ahora bien el conjunto $\{(n, n) : n \in N\}$ es abierto en $Y x Z$ y como $Y \cap Z = N$ resulta que este conjunto es también cerrado en $Y x Z$, por lo tanto $Y x Z$ no es pseudocompacto.

COROLARIO 1.1. — *Si* $N \subset Y \subset \beta N$ y $Y \in \mathfrak{B}$, *entonces* $|Y| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Un subconjunto A de un espacio X se dice que es C-sumergible (resp. C^*-sumergible) en X si toda función real continua (resp. y acotada) en A se puede extender a una función continua en X.

COROLARIO 1.2. — *Si* Y *es un espacio de* $\mathfrak{C}$ *que contiene un subespacio* C^**-sumergible no pseudocompacto, entonces* $|Y| \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

DEMOSTRACION. Supongamos que X es C^*-sumergible en Y y que X no es pseudocompacto. Si H es una copia de N, C-sumergible en X ([6], C.1.21), se tiene que $\beta H = \overline{H}^{\beta X} = \overline{H}^{\beta Y}$ ya que $\overline{X}^{\beta Y} = \beta X$. Ahora bien como $Y \in \mathfrak{C}$ resulta que $\overline{H}^Y \in \mathfrak{C}$. Además $\overline{H}^Y \subset \beta H$, por lo tanto $|\overline{H}^Y| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

COROLARIO 1.3. — *Si* Y *es un espacio de* $\mathfrak{C}$ *que contiene un subespacio denso* C^**-sumergible separable no pseudocompacto, entonces* $|Y| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

2. UNAS CARACTERIZACIONES DE LAS CLASES DE FROLIK. — En ([5], T. 3.6) Frolík prueba lo siguiente:

(F) *Un espacio* X *completamente regular pertenece a* $\mathfrak{B}$ *si y sólo si dada una sucesión* $\{Un\}_{n=1}^{\infty}$ *de abiertos, no vacíos, disjuntos dos a dos, existe una subsucesión* $\{Un_k\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que cuando* $\mathcal{F}$ *es un filtro de subconjunto infinitos de* N *se verifica*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{\bigcup_{k \in F} Un_k}^X \neq \phi.$$

TEOREMA 2.1. — *Un espacio* X *completamente regular pertenece a* $\mathfrak{B}$ *sí y sólo si cuando* Z *es un subespacio pseudocompacto de* βN *que contiene a* N*, el producto* $X \times Z$ *es pseudocompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X \notin \mathfrak{B}$, entonces por (F) existe una sucesión $\{Un\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos, no vacíos, disjuntos dos a dos, tal que cuando N_0 es un subconjunto infinito de N, existe un filtro $\mathcal{F}(N_0)$ de partes infinitas de N_0 para el cual

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}(N_0)} \overline{\bigcup_{n \in F} Un}^X = \phi.$$

Sea $\widehat{\mathcal{F}(N_0)}$ el filtro sobre N para el que $\mathcal{F}(N_0)$ es una base y sea $\mathcal{U}_{N_0}$ un ultrafiltro que contenga a $\widehat{\mathcal{F}(N_0)}$.

Consideremos el subespacio de βN

$$Y = N \cup \{P_{N_0} \in \beta N \sim N : \mathcal{U}_{N_0} \text{ converge a } P_{N_0},\ N_0 \subset N,\ N_0 \text{ infinito}\}$$

y veamos que es pseudocompacto. Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos en Y no vacíos, disjuntos dos a dos, y sea

$$N_0 = \{n_k \in N : n_k \in N \cap A_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

Por hipótesis existe un ultrafiltro $\mathcal{U}_{N_0}$ sobre N que converge a $P_{N_0} \in Y$ y tal que $N_0 \in \mathcal{U}_{N_0}$. Por lo tanto $P_{N_0} \in \overline{N_0}^{\beta N}$ y P_{N_0} es un punto adherente a $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Veamos ahora que $X x Y$ no es pseudocompacto probando que la sucesión de abiertos $\{U_n x \{n\}\}_{n=1}^{\infty}$ es localmente finita en $X x Y$. Si $x \in X$ y $P_{N_0} \in Y \sim N$, sabemos que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{U}_{N_0}} \overline{\bigcup_{n \in F} U_n}^{X} = \phi$$

por lo que existe un entorno V de x y $F_0 \in \mathcal{U}_{N_0}$ tales que $V \cap (\bigcup_{n \in F_0} Un) = \phi$. Ahora bien $\overline{F_0}^{\beta N}$ es un entorno de P_{N_0} en βN y se tiene que

$$(V x \{\overline{F_0}^{\beta N} \cap Y\}) \cap (U_n x \{n\}) = \phi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Nota. La demostración de T.3.6 de ([5]) creemos que no es correcta, sin embargo su tesis es cierta como acabamos de probar.

A continuación vamos a dar una caracterización análoga para la clase $\mathfrak{C}$, siendo la demostración mas sencilla que la del teorema anterior.

Teorema 2.2. — *Un espacio X completamente regular pertenece a $\mathfrak{C}$ sí y sólo si cuando Z es un subespacio $\aleph_0$-compacto de βN que contiene a N, el producto $X x Z$ es $\aleph_0$-compacto.*

Demostración. Supongamos que Y es $\aleph_0$-compacto, que X satisface la condición del teorema (por lo tanto es $\aleph_0$-compacto) y que $X x Y$ no es $\aleph_0$-compacto, Entonces existen dos copias de N, $N_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \subset X$, $N_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{b_n\} \subset Y$ de forma que el conjunto

$\{(a_n, b_n) : n \in N\}$ es cerrado en $X x Y$ (1). Evidentemente $\overline{N_2}^Y$ es $\aleph_0$-compacto y $X x \overline{N_2}^Y$ no lo es. Si τ es la aplicación $n \to b_n$ de N sobre N_2, sea $\bar{\tau}$ la extensión de Stone de τ, que va de βN sobre $\overline{N_2}^{\beta Y}$. Si $Z = \bar{\tau}^{-1} (\overline{N_2}^Y)$, se tiene que Z es $\aleph_0$-compacto, ya que $\bar{\tau}|_Z$ es continua, cerrada y $\bar{\tau}^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in \overline{N_2}^Y$ ([4], P.1.1). Como $X x \overline{N_2}^Y$ es la imagen continua de $X x Z$, resulta que $X x Z$ no es $\aleph_0$-compacto.

3. PROYECCIONES α-CERRADAS. — En lo sucesivo α será un cardinal infinito.

Se dice que un espacio X es α-compacto si cuando $\{F_i\}_{i \in I}$, $|I| \leqslant \alpha$, es una familia de cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección $\bigcap_{i \in I} F_i$ no es vacía. Como consecuencia de que todo subespacio cerrado de un espacio α-compacto es a su vez α-compacto, se deduce que: *Todo subespacio cerrado de cardinal $\leqslant \alpha$, en un espacio α-compacto es compacto.*

Diremos que una aplicación φ de un espacio X en un espacio Y es α-cerrada si cuando M es un subconjunto cerrado de X y $|M| \leqslant \alpha$, entonces $\varphi(M)$ es cerrado en Y.

Dados dos espacios X, Y, escribiremos π_y para la proyección de $X x Y$ sobre Y, y la misma notación será usada para los subconjuntos de Y.

Si $\mathcal{C}$ es una familia de cerrados de un espacio X, definimos una topología $\sigma(\mathcal{C})$ sobre X diciendo que un conjunto A es cerrado si la intersección $A \cap F$ es un cerrado de X para todo $F \in \mathcal{C}$. El k-espacio (resp. s-espacio) asociado a X, denotado por kX (resp. sX), será X con la topología $\sigma(\mathcal{K})$ (resp. $\sigma(\mathcal{S})$), donde $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{S}$) es la familia de los subconjuntos compactos (resp. sucesiones convergentes con su límite) de X. Un espacio X se dice que es un k-espacio (resp. s-espacio o espacio sucesional) si $X = kX$ (resp. $X = sX$). Es obvio que todo s-espacio es un k-espacio, sin embargo βN no es un s-espacio ya que sus subconjuntos compactos infinitos tiene cardinalidad $2^{2^{\aleph_0}}$ ([10], T.3.3.).

PROPOSICIÓN 3.1. — *Sea $\mathcal{C}$ una familia de cerrados de un espacio X y supongamos que X está provisto de la topología $\sigma(\mathcal{C})$. La proyección π_x de $X x Y$ sobre X es α-cerrada sí y sólo si para todo $F \in \mathcal{C}$ la proyección π_F de $F x Y$ sobre F es α-cerrada.*

---

(1) Una prueba directa de esto no es difícil sin embargo para una demostración ver ([4], T.3.3.).

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es evidente ya que los conjuntos de C son cerrados en X. La suficiencia es consecuencia de la definición de la topología $\sigma(C)$ y de que si $A \subset X x Y$, entonces $\pi_E(A_0) = E \cap \cap \pi_x(A)$, donde $A_0 = A \cap (E x Y)$, $E \in C$.

COROLARIO. — *Si X es un k-espacio y Y es α-compacto, entonces la proyección π_x es α-cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior basta probar que si K es un espacio compacto y Y es α-compacto, la proyección π_K es α-cerrada. Como el producto $K x Y$ es α-compacto ([4], T.1.3), si H es un subconjunto cerrado de $K x Y$ y $|H| \leqslant \alpha$, entonces H es compacto. Como π_K es continua, $\pi_K(H)$ será compacto y por lo tanto cerrado en K.

4. PRODUCTOS DE ESPACIOS α-COMPACTOS. — El interés de las aplicaciones α-cerradas reside en el hecho de que una condición necesaria y suficiente para que un producto de dos espacios $\aleph_0$-compactos sea $\aleph_0$-compacto es que una de las proyecciones sea $\aleph_0$-cerrada, como vamos a probar a continuación. Una generalización de esta condición para el caso $\alpha > \aleph_0$ veremos que no es probable.

TEOREMA 4.1. — *Si el producto $X x Y$ es α-compacto entonces la proyección π_x es α-cerrada. Si X, Y son espacios $\aleph_0$-compactos y π_x es $\aleph_0$-cerrada, el producto $X x Y$ es $\aleph_0$-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de la primera afirmación es la misma que para π_K en el corolario de P.3.1. Veamos entonces la segunda. Si H es un subconjunto cerrado numerable de $X x Y$, entonces $\pi_x(H)$ es cerrado en X y por lo tanto es compacto. El espacio $\pi_x(H) x Y$ es $\aleph_0$-compacto ([4], T.1.3) y como H es cerrado en ese producto, será compacto. Por ([6], 5.H.5) se deduce que $X x Y$ es $\aleph_0$-compacto.

Como vamos a ver con un ejemplo, la caracterización ([6], 5.H.5) de los espacios $\aleph_0$-compactos no es válida en general para $\alpha > \aleph_0$, con lo cual conjeturamos que las proyecciones α-cerradas no caracterizan los productos α-compactos, cuando $\alpha > \aleph_0$.

EJEMPLO. Sea X el conjunto de todos los ordinales no mayores que el primer ordinal no numerable ω_1 provisto de la topología para la cual los puntos distintos de ω_1 son aislados y una base de entornos de ω_1 es la familia de los conjuntos de la forma $\{\sigma \in X : \alpha \leqslant \sigma \leqslant \omega_1\}$, $\alpha \in X \sim \{\omega_1\}$. Como todo punto de X posee una base de entornos abiertos y cerrados a la vez, se deduce que X es completamente regular. Evidentemente todo conjunto de la forma $A(\alpha_0) = \{\sigma \in X : 1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha_0\}$, $\omega_0 \leqslant \alpha_0 < \omega_1$ es homeomorfo a N y C-sumergible en X, por lo tanto $\overline{A(\alpha_0)}^{\beta X} = \beta(A(\alpha_0)) \approx \beta N$.

Sea $Y = \beta X \sim \{\omega_1\}$. Vamos a probar en primer lugar que si A es un subconjunto cerrado infinito de Y, entonces $|A| \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$. En efecto, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una copia de N contenida en $A \cap Y$. Como $x_n \neq \omega_1$ existen entornos disjuntos V_n y W_n de x_n y ω_1 respectivamente, por lo que para un $\alpha_n < \omega_1$ se verifica que $x_n \in \overline{A(\alpha_n)}^{\beta X}$. Si $\alpha_0 = \sup. \{\alpha_n : n \in N\}$ se tiene $x_n \in \overline{A(\alpha_0)}^{\beta X}$, $n = 1,2, \ldots$ y $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}}^{\beta X} \subset \overline{A(\alpha_0)}^{\beta X} \subset Y$. De aquí se deduce que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}}^{\beta X} \subset A$ y por lo tanto $|A| \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$, ya que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}}^{\beta X}$ es un subconjunto compacto infinito de $\overline{A(\alpha_0)}^{\beta X}$.

Como $X \sim \{\omega_1\}$ se puede considerar como una red en Y sin subredes convergentes resulta que Y *no es $\varkappa_1$-compacto, sin embargo todo subconjunto cerrado de Y cuyo cardinal sea $\leqslant \varkappa_1$ es finito y por lo tanto compacto.*

Como consecuencia del corolario de P.3.1 se deduce el siguiente resultado:

COROLARIO. — *Si kX y Y son espacios $\varkappa_0$-compactos, el producto $X x Y$ es $\varkappa_0$-compacto.*

NOTA. El corolario anterior ha sido dado por Noble ([8], T.1.2) y Franklin ([3]), generalizando C.1.10.1 de ([2]).

A continuación vamos a dar un ejemplo de un espacio X en la clase $\mathfrak{C}$ tal que su k-espacio asociado, kX, no es pseudocompacto. Suponiendo la hipótesis del continuo el conjunto $P(N)$ de P-puntos de $\beta N \sim N$ no es vacío. Sea $X = \beta N \sim P(N)$, entonces como ha probado Isiwata ([7], E.3.1) $X \in \mathfrak{C}$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $P(N)$ es denso en $\beta N \sim N$ ([6], 9.M.3) se deduce N corta a los subconjuntos compactos de X en conjuntos finitos. Entonces N es abierto y cerrado en kX.

5. Caracterizaciones de la compacidad sucesional y de la $\varkappa_0$-compacidad por proyecciones.

Lema 5.1. — *Si la proyección π_y de $X x Y$ sobre Y es $\varkappa_0$-cerrada y Y contiene una copia de N no cerrada, entonces X es $\varkappa_0$-compacto.*

Demostración. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión infinita sin puntos de acumulación en X y $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{b_n\}$ es una copia no cerrada de N en Y, el conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(a_n, b_n)\}$ es cerrado en $X x Y$ y $\pi_y(A)$ no es cerrado.

Proposicion 2.5. — *Sea X un espacio, entonces sX es $\varkappa_0$-compacto si y sólo si para todo espacio infinito $\varkappa_0$-compacto Y la proyección π_Y de $Y x s X$ sobre Y es $\varkappa_0$-cerrada.*

Demostración. La suficiencia es consecuencia del lema anterior. Recíprocamente, por ser sX un k-espacio $\varkappa_0$-compacto, el producto $Y x sX$ es $\varkappa_0$-compacto y por T.4.1 la proyección π_Y es $\varkappa_0$-cerrada.

Noble ([9], T.4.1) caracteriza los espacios sucesionalmente compactos como aquellos X tales que sX es $\varkappa_0$-compacto; de la proposición anterior se deduce entonces:

Teorema 5.3. — *Un espacio X es sucesionalmente compacto si y solo si para todo espacio Y $\varkappa_0$-compacto infinito la proyección π_Y de $Y x sX$ sobre Y es $\varkappa_0$-cerrada.*

Como consecuencia de L.5.1 y T.4.1 se tiene la siguiente caracterización de los espacios $\varkappa_0$-compactos.

Teorema 5.4. — *Si K es un espacio compacto infinito, la proyección π_K de $K x X$ sobre K es $\varkappa_0$-cerrada si y sólo si X es $\varkappa_0$-compacto.*

Teniendo en cuenta que si X es sucesional y Y es $\varkappa_0$-compacto la proyección π_x es cerrada, ([1], p. 77) se deduce:

Corolario. — *Si K es un espacio compacto sucesional infinito las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es $\varkappa_0$-compacto.*
(2) *π_K es $\varkappa_0$-cerrada.*
(3) *π_K es cerrada.*

BIBLIOGRAFIA

[1] FLEISCHER, I and FRANKLIN, S. P. — «*On compactness and projections*» Contributions to Extension Theory of Topological Structures. (Proc. Sympos., Berlin, 1967) p. 77-79.

[2] FRANKLIN, S. P. — «*Spaces in which sequences suffice*» Fund. Math. 57, 107-15 (1965).

[3] FRANKLIN, S. P. — «*On products of countably compact spaces*» Proc. Amer. Math. Soc. 48, 236-38 (1975).

[4] FROLIK, Z. — «*The topological product of countably compact spaces*» Czech. Math. J. 10, 329-38 (1960).

[5] FROLIK, Z. — «*The topological product of two pseudocompact spaces*» Czech. Math. J. 10, 339-49 (1960).

[6] GILLMAN, L. and JERISON, M. — «*Rings of continuous functions*» Princeton, Van Nostrand 1960.

[7] ISIWATA, T. — «*Some classes of countably compact spaces*» Czech. Math. J. 14, 226-28, (1964).

[8] NOBLE, N. — «*Countably compact and pseudocompact products*» Czech. Math. J. 19, 390-97 (1969).

[9] NOBLE, N. — «*The continuity of functions on Cartesian products*» Trans. Amer. Math. Soc. 149, 187-98 (1970).

[10] WALKER, R. C. — «*The Stone-Čech compactification*» Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Heidelberg-New York-Berlin: Springer 1974.