SOBRE LA EXISTENCIA DE TOPOLOGIAS T^f REGULARES

por

J. A. López Molina y M. López Pellicer (*)

ABSTRACT

In (1) Komura has given an example to show that $E_2(T^f)$ need not be a topological vector space (see (2)-21.8). In (3) Valdivia has shown that $E_2(T^f)$ need not be a regular topological space. Here we finden that the T^f topology of the example given by Komura is regular.

Sea $\langle E_2, E_1 \rangle$ un par dual y T una topología localmente convexa definida en E_1 y tal que $T_s(E_2) = \sigma(E_1, E_2) \leqslant T \leqslant T_b(E_2) = \beta(E_1, E_2)$. Se designa por T^f a la topología más fina en E_2 que coincide con $T_s(E_1)$ en cada subconjunto T-equicontinuo de E_2 (la notación es la usual en (2)-21.8). La topología T^f es Hausdorff, invariante por traslación y tiene una base de entornos del origen formada por conjuntos abiertos, absorbentes y equilibrados.

Y. Komura en (1)-§ 2, pág. 155-156, ha dado el primer ejemplo de una topología T^f no compatible con la estructura de espacio vectorial. M. Valdivia en (3) ha encontrado otras topologías T^f no regulares y por lo tanto no compatibles con la estructura de espacio vectorial.

En el ejemplo de Komura se considera $E_1 = \omega(A) = \prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ y $E_2 = \varphi(A) = \bigoplus_{\alpha \in A} R_\alpha$ donde cada R_α es un espacio vectorial real de dimensión uno y A un conjunto de índices cuyo cardinal es $2^{\aleph_0}$ [1]. Komura demuestra que si T es la topología producto definida en E_1, suponiendo todos los R_α con la topología ordinaria, entonces (E_2, T^f) no es un espacio vectorial topológico porque existe un T^f-

(*) Este trabajo ha sido realizado en el departamento de Teoría de Funciones y Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de Valencia, que dirige el profesor Dr. M. Valdivia.

[1] $\aleph_0$ es el cardinal del conjunto de los números naturales.

entorno de cero V, tal que para cualquier T^f-entorno de cero U se tiene $U + U \not\subset V$.

Nosotros vamos a probar que la topología T^f de Komura es regular.

Basta ver que todo entorno abierto de cero, contiene un entorno cerrado de cero.

Sea V un T^f-entorno abierto de cero en E_2. Para cada conjunto finito $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\} \subset A$, denotamos por $\varphi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ el espacio vectorial imagen de $\bigoplus_{i=1}^{n} R_{\alpha_i}$ por la inmersión canónica en E_2, y por $P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ la proyección de $\bigoplus_{\alpha \in A} R_\alpha$ sobre $\varphi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$. Como los T-equicontinuos de E_2 coinciden con los acotados de la suma directa topológica $\bigoplus_{\alpha \in A} R_\alpha$, se tiene que un conjunto en E_2 es T-equicontinuo si y **sólo** si está contenido en un producto finito de acotados en cada R_α.

Para cada $\alpha \in A$, sea $I_\alpha =]$-1,1$[$. Para cada parte finita $F = \{\alpha_1, .., \alpha_n\} \subset A$, como V es T^f-entorno de cero abierto, $V \cap \prod_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}$ es un abierto débil en $\prod_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}$ que contiene al cero. Luego para cada $\alpha_i \in F$, existe una bola abierta $B^F_{\alpha_i}$ en R_{α_i}, absolutamente convexa, de modo que todas las $B^F_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in F$, tienen el mismo radio $\neq 0$ y éste es menor o igual que 1 y tal que $\prod_{\alpha_i \in F} B^F_{\alpha_i} \subset V \cap \prod_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}$.

Sea

$V' = \cup \{\prod_{\alpha_i \in F} B^F_{\alpha_i}, F$ parte finita $\subset A\} \subset V$.

V' es un entorno de cero abierto para la topología T^f pues si F es una parte finita de A y para cada $\alpha_i \in F$, M_{α_i} es un acotado en R_{α_i}, vamos a ver que $V' \cap \prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i}$ es un abierto débil en $\prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i}$. Para ello veamos que ese conjunto es entorno de todos sus puntos en la topología inducida por la débil en $\prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i}$. En efecto, si $x \in V' \cap \prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i}$, existe una parte finita $F' \subset A$ tal que

$$x \in \prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i} \cap \prod_{\beta_i \in F'} B^{F'}_{\beta_i}.$$

Evidentemente, se puede suponer que todos los M_{α_i} tienen algún elemento no nulo, y entonces $F \subset F'$ con lo cual $x \in \prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i} \cap \prod_{\alpha_i \in F} B^{F'}_{\alpha_i} \subset \prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i} \cap \prod_{\beta_i \in F'} B^{F'}_{\beta_i} \subset \prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i} \cap V'$. Pero $\prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i} \cap \prod_{\alpha_i \in F} B^{F'}_{\alpha_i}$ es claramente un abierto débil en $\prod_{\alpha_i \in F} M_{\alpha_i}$ con lo cual V' es T^f-abierto y entorno de cero.

Por tanto $\frac{1}{2} V'$ también es T^f-entorno de cero. Si $\overline{\frac{1}{2} V'}$ es su T^f-clausura, $\overline{\frac{1}{2} V'}$ es T^f-entorno cerrado de cero. Veamos que $\overline{\frac{1}{2} V'} \subset V'$ y el teorema estará demostrado.

Sea $0 \neq x \in \overline{\frac{1}{2} V'}$. Entonces existe una mínima parte finita $F = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n\} \subset A$ tal que $x \in \varphi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ y una red en $\frac{1}{2} V'$ $\{x^\beta, \beta \in D\}$, $(D, \leq)$ conjunto dirigido tal que $\lim_{\beta \in D} x^\beta = x$ en la topología T^f. Pero la proyección $P_{\alpha_1 \alpha_2, \dots \alpha_n}$ es una aplicación continua de (E_2, T^f) sobre $\varphi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ dotado este último de su topología ordinaria. Luego $\lim_{\beta \in D} P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x^\beta) = P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x) = (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_n})$. Por construcción, si G es una parte finita de A todas las bolas $B^G_{\alpha_i}$ que intervienen en el producto $\prod_{\alpha_i \in G} B^G_{\alpha_i}$ tienen el mismo radio y éste es siempre $\leqslant 1$. Sea entonces

$s = sup$ {radio de las bolas $B^G_{\beta_i} \neq \{0\}$ / $\prod_{\beta_i \in G} B^G_{\beta_i} \subset V'$;
$F \subset G$, G finito $\subset A$}

Como $x \in \overline{\frac{1}{2} V'}$, si $\alpha_i \in F$, debe ser $|x_{\alpha_i}| \leqslant \frac{s}{2}$, pues x_{α_i} es el límite puntual de una red de puntos situados en bolas de radio $\leqslant \frac{s}{2}$, por ser $\frac{1}{2} V' = \cup \left\{ \frac{1}{2} (\prod_{\alpha_i \in G} B^G_{\alpha_i}),\ G \text{ finito y } G \subset A \right\}$. Entonces existe un número r tal que $\frac{s}{2} < r \leqslant s$ y un producto de bolas $\prod_{\alpha_i \in G} B^G_{\alpha_i}$, G parte finita de A, contenino en V' tal que el radio de $B^G_{\alpha_i}$ es r para cada $\alpha_i \in G$ y $F \subset G$. Luego $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) = x \in \prod_{\alpha_i \in F} B^G_{\alpha_i} \subset V'$ c.q.d.

Problema abierto: No sabemos si T^f es completamente regular.

BIBLIOGRAFÍA

(1) KOMURA, Y.; *Some examples on Linear Topological Spaces*. Math. Ann. *153*, 150-162 (1964).

(2) KÖTHE,; *Topological vector spaces* I. Springer Verlag. Berlin. Heidelberg. New York (1969).

(3) VALDIVIA, M.; *On certain topologies on a vector space*. Manuscripta Math. *14*, 241-247 (1974).

Universidad de Valencia. España.
Facultad de Ciencias.
Paseo al Mar 13.
Entregado a publicación el 2 de Marzo de 1976.