c-PRERRADICALES Y PREINTERIORES DE UNA CATEGORIA

por

J. L. Gómez Pardo y N. Rodríguez González

En [1] se define el concepto de I-nilpotencia en una categoría C con núcleos, conúcleos, factorización canónica y retículo completo de subobjetos y subobjetos normales, y en [4] la I-nilpotencia se estudia utilizando los c-prerradicales $Z : C_c \to C$, subfuntores normales del funtor inclusión $U : C_c \to C$ (C_c es la subcategoría plena de C cuyos morfismos son los morfismos conormales de C), que generalizan los prerradicales estudiados por Michler en anillos [2].

En este trabajo se presentan algunos resultados de [4] que establecen las propiedades convenientes de los c-prerradicales para la obtención de un concepto satisfactorio de nilpotencia, el cual comprende la generalización de nilpotencia de grupos dada en [5], y se asocia a C la categoría C_P cuyos objetos son los morfismos normales de C, utilizándose el hecho de que los preinteriores de C definidos en [1] son subfuntores normales de la identidad de C_P para asociarles ciertas clases de objetos de C_P que pueden ser usadas para el estudio de la I-nilpotencia.

Las notaciones son las de [1] y [4].

1. La categoria C.

Se considera una categoría C, localmente pequeña y con objeto cero, que verifica los siguientes axiomas:

$C1$. Todo morfismo normal (núcleo) tiene conúcleo.

$C2$. Todo morfismo conormal (conúcleo) tiene núcleo.

$C3$. Todo morfismo f se descompone en el producto de un morfismo conormal seguido de un monomorfismo, $f = f^M f^E$.

$C4$. El producto gf de un morfismo normal f y un morfismo, conormal g, se descompone en la forma $gf = kh$ con h conormal y k normal.

C5. Para cada objeto X de C, el conjunto $S(X)$ de los subobjetos de X es un retículo completo respecto de la relación de orden usual y los subobjetos normales de X forman un subretículo completo de $S(X)$, denotado $S_N(X)$.

C tiene núcleos y conúcleos ([4], (1.1.1), (1.1.3)) y la factorización de un morfismo en producto de conormal y monomorfismo es única ([4], (1.1.1)), $f = f^I f^{ck}$, siendo f^I la imagen de f.

Se verifican además las siguientes propiedades:

1.1. i) Si $f = vu$ es normal y v monomorfismo, entonces u es normal.

ii) Si $f = vu$ es conormal y u epimorfismo, entonces v es conormal.

iii) El producto de dos morfismos conormales es conormal.

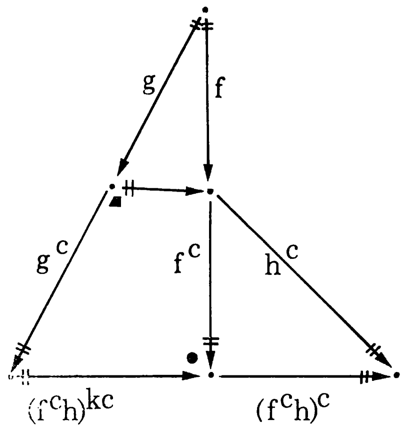
([1] 1.1, 1.2, 1.3)

1.2. Existe cuadrado cartesiano de un morfismo f y un morfismo normal g del mismo rango. La flecha opuesta a g es normal (imagen inversa de g por f) y si f es conormal, su flecha opuesta es conormal. La imagen inversa de g por f se denotará $f^{-1}(g)$.

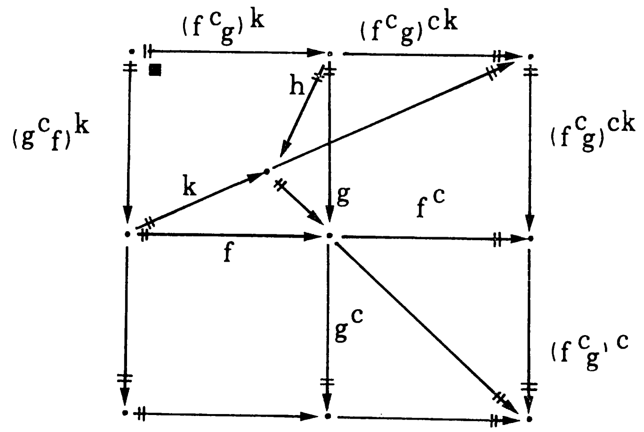
$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "(g^c f)^k"] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & \bullet \arrow[d, "g"] \\
\bullet \arrow[ur, "f_1^k"] \arrow[r, "f^k"'] & \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g^c f"'] & \bullet \arrow[d, "g^c"] \\
 & & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Además, en este caso, $f^k = (g^c f)^k f_1{}^k$. ([1], 1.4)

1.3. Sean f, g, h morfismos normales tales que $f = hg$, entonces el cuadrado $f^c h = (f^c h)^{kc} g^c$ es bicartesiano y se verifica $(f^c h)^c f^c = h^c$ ([4], (1.1.10)).



1.4. Sean f y g dos morfismos normales del mismo rango. Entonces $k^c h = (f^c g)^{ck}$, siendo h y k los únicos morfismos que verifican $g = ((f^c g)^c f^c)^k h$, $f = ((f^c g)^c f^c)^k k$.



([4], (1.1.11)).

El conjunto de los cocientes conormales de un objeto X, $S_c(X)$, es un retículo completo ([4], (1.2.4)). La unión de $\{u_j\}_{j\in J}$, $u_j \in S_c(X)$ es $\bigvee_J u_j = (\bigcap_J u_j^k)^c$, y la intersección $\bigwedge_J u_j = (\bigcup_J u_j^k)^c$.

1.5. Sean $\{x_j\}_{j\in J}$, $x_j \in S_N(X)$ y $\{u_i\}_{i\in I}$, $u_i \in S_c(Y)$ y sea $f \in H(X, Y)$, entonces se verifica:

i) $(f. \bigcup_J x_j)^I = \bigcup_J (f \cdot x_j)^I$ ([4], (1.2.16i))

ii) $(\bigvee_I u_i \cdot f)^{ck} = \bigvee_I (u_i \cdot f)^{ck}$ ([4], (1.2.10ii)).

Se denotará C_c a la subcategoría de C cuyos objetos son los de C y cuyos morfismos son los morfismos conormales de C. Es una categoría como consecuencia de 1.1.

2. c-PRERRADICALES.

Un *c-prerradical* de C, es un funtor $Z : C_c \to C$, junto con una transformación natural de flechas normales $\lambda_Z : Z \to U$, siendo U : : $C_c \to C$ el funtor inclusión ([4], (2.1.1))

$$\begin{tikzcd} A & X \arrow[l, "J"'] \\ AZ \arrow[u, "\lambda_Z(A)"] & XZ \arrow[l, "JZ"] \arrow[u, "\lambda_Z(X)"'] \end{tikzcd}$$

En la clase de los c-prerradicales de C se define una relación de orden:

$$Z_1 \leqslant Z_2 \Leftrightarrow \lambda_{Z_1}(X) \leqslant \lambda_{Z_2}(X), \in S_N(X), \ \forall X \in Ob(C)$$

Los c-prerradicales de C forman un retículo completo, como consecuencia de serlo $S_N(X)$ ([4], (2.1.2)). El mínimo y el máximo de dicho retículo se denotarán respectivamente **0** y **1**.

2.1. Si Z_1 y Z_2 son c-prerradicales en C, se define su cociente $Z_1 : Z_2$ por

$$\lambda_{Z_1 : Z_2}(X) = ((\lambda_{Z_2}(X/Z_1X))^c \lambda_{Z_1} X^c)^k$$

$$\begin{tikzcd} & Z_1X \arrow[d] & \\ (Z_1:Z_2)(X) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\square"] & X \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & & X/(Z_1:Z_2)X \\ Z_2(X/Z_1X) \arrow[r] & X/Z_1X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$Z_1 : Z_2$ es un c-prerradical ([4], (2.1.3)).

Un c-prerradical Z se dirá *c-radical* si $Z : Z = Z$. Esta condición es equivalente a $Z(X/ZX) = 0 \ \forall X \in Ob(C)$.

2.2. La división de c-prerradicales es una operación asociativa ([4], (2.1.11)), y por inducción transfinita se definen c-prerradicales Z_β para cada ordinal β por:

$$\begin{aligned} &Z_0 = \mathbf{0} \\ &Z_\beta = Z_{\beta-1} : Z && \text{si } \beta \text{ no es ordinal límite} \\ &Z\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} Z_\alpha && \text{si } \beta \text{ es ordinal límite.} \end{aligned}$$

Un c-prerradical Z se dice *hereditario* ([2], p. 6) si para todo $x \in S_N(X)$ tal que $x \leqslant \lambda_Z X$ se verifica $Z(D(x)) = D(x)$ (D = dominio).

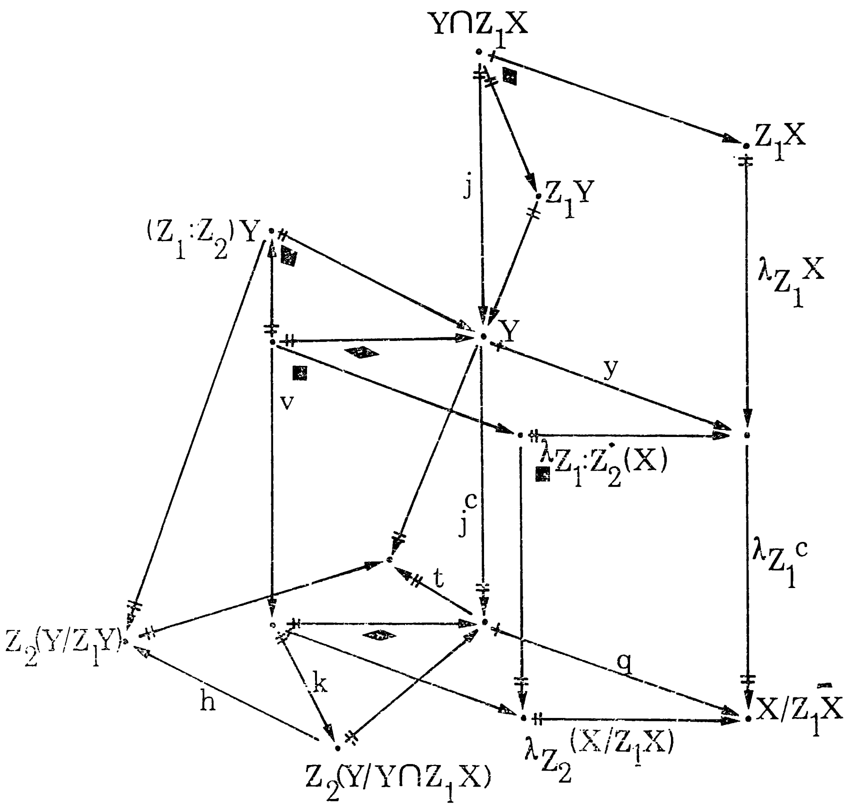
Z se dirá *totalmente hereditario* si para todo $x \in S(X)$ se verifica que la flecha opuesta a $\lambda_Z X$ en el cuadrado cartesiano de x

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dd, "\lambda_Z X"] \\ & ZY \arrow[dl] & \\ Y \arrow[rr, "x"'] & & X \end{tikzcd}$$

y $\lambda_Z X$ se factoriza a través de $\lambda_Z Y$ ($Y \cap ZX \leqslant ZY$) ([4], (2.1.22)). Si Z es totalmente hereditario, entonces Z es hereditario ([4], (2.1.23)), sin embargo el recíproco no se verifica ([4], (2.1.24)).

2.3. Si Z_1, Z_2 son c-prerradicales totalmente hereditarios, entonces $Z_1 : Z_2$ es totalmente hereditario.

Sea $y : Y \rightarrowtail X$, $y \in S(X)$. Por ser Z_1 totalmente hereditario, $j = y^{-1}(\lambda_{Z_1} X) \leqslant \lambda_{Z_1} Y$, y así se obtiene un morfismo conormal $t : Y/Y \cap Z_1 X \twoheadrightarrow Y/Z_1 Y$ verificando $t \cdot (y^{-1}(\lambda_{Z_1} X))^c = (\lambda_{Z_1} Y)^c$, el cual induce un morfismo $h = Z_2(t) : Z_2(Y/(Y \cap Z_1 X)) \longrightarrow Z_2(Y/Z_1 Y)$
El morfismo q que verifica $qj^c = \lambda_{Z_1}(X)^c\, y$ es un monomorfismo por 1.2. Construyendo el cuadrado cartesiano de q y $\lambda_{Z_2}(X/Z_1 X)$, se obtiene por ser Z_2 totalmente hereditario $q^{-1}(\lambda_{Z_2}(X/Z_1 X)) \leqslant \lambda_{Z_2}$



$(Y/Y \cap Z_1 X)$, y existe un morfismo k que verifica $\lambda_{Z_2}(Y/(Y \cap Z_1 X))\, k = q^{-1}\ (\lambda_{Z_2}(X/Z_1\ X))$, de donde se deduce

$tq^{-1}\ (\lambda_{Z_2}(X/Z_1\ X)) = t\lambda_{Z_2}(Y/(Y \cap Z_1\ X))\, k = \lambda_{Z_2}(Y/Z_1\ Y)\, hk$.
Por la propiedad universal del cuadrado cartesiano inferior se obtiene un morfismo v que verifica

$$tq^{-1}\ (\lambda_{Z_2}(X/Z_1\ X)\ v = \lambda_{Z_2}(Y/Z_1\ Y)\, hkv = tj^c q^{-1}\ (\lambda_{Z_1 : Z_2}(X)) = \\ = \lambda_{Z_1}(Y)^c\, y^{-1}\ (\lambda_{Z_1 : Z_2}(X)),$$

y aplicando la propiedad universal del cuadrado cartesiano de λ_{Z_2} $(Y/Z_1\ Y)$ con $\lambda_{Z_1}(Y)^c$ se obtiene un morfismo i tal que

$$y^{-1}\ (\lambda_{Z_1 : Z_2}(X)) = \lambda_{Z_1 : Z_2}(Y)\, i,$$

i es normal y así $Z_1 : Z_2$ es totalmente hereditario.

2.4. Si Z es totalmente hereditario, entonces Z_n (2.2) es totalmente hereditario, para cada número natural n.

Es consecuencia de 2.2 y 2.3, aplicando inducción.

Si Z es un c-prerradical en C, un objeto X de C se dice *Z-nilpotente* ([4], (5.1.1.)) cuando $Z_n(X) = X$ para algún número natural $n \geqslant 0$, y al menor n con esta propiedad, se le llama *clase de Z-nilpotencia* de X. Si Z es totalmente hereditario, la clase $N_n = \{X/Z_n(X) = X\}$, de los objetos de clase de Z-nilpotencia menor o igual que n, es cerrada para cocientes conormales y para subobjetos, como consecuencia de 2.4.

2.5. Si i, j son números naturales

$$Z_{i+j} = (Z_{i+j-1} : Z) = (Z_i : Z_j)$$

Es consecuencia de la asociatividad de la división de c-prerradicales.

Llamaremos *Z-extensión* a una sucesión exacta corta

$$\underset{X_1}{\cdot} \xrightarrow{\;h\;} \underset{X}{\cdot} \xrightarrow{\;h^c\;} \underset{X_2}{\cdot}$$

tal que $h \leqslant \lambda_Z(X) \in S_N(X)$.

2.6. Sea $X_1 \cdot \xrightarrow{\;h\;} \overset{X}{\cdot} \xrightarrow{\;h^c\;} \cdot X_2$ una Z-extensión. Entonces $X_2 \in N_n \Rightarrow X \in N_{n+1}$. Si $h = \lambda_Z(X)$, entonces $X_2 \in N_n \Leftrightarrow X \in N_{n+1}$.

Dado que $h \leqslant \lambda_Z(X)$, se obtiene un morfismo conormal p verificando $\mathrm{ph}^c = \lambda_Z(X)^c$ y así $X/Z\,X \in N_n$ por ser N_n cerrada para cocientes conormales. Entonces $Z_n(X/ZX) = X/ZX$, es decir, $(Z : Z_n)(X) = X$, de donde por 2.5. $(Z_n : Z)(X) = X$ y por tanto $Z_{n+1}(X) = X$.

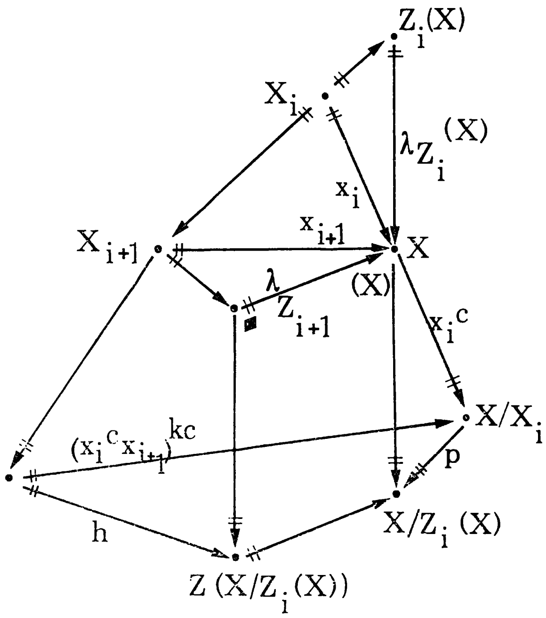
Si $Z_{n+1}(X) = X$, por ser $Z_{n+1} = (Z : Z_n)$, $Z_n(X/ZX) = X/ZX$, luego $X/ZX \in N_n$.

Si $X \in Ob(C)$, una *Z-serie finita* de X es una sucesión $\{x_i : X_i \longrightarrow X\}$ $i = 0, \ldots, n$ de subobjetos $x_i \in S_N(X)$ tales que $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = 1_X$ y $(x_i^c\, x_{i+1})^{kc} \leqslant \lambda_Z(X/X_i)$ $\forall\, i = 0, \ldots, n-1$.

2.7. Sea $\{x_i : X_i \longrightarrow X\}_{i=0,\ldots,n}$ una Z-serie finita de X. Entonces, se verifica

$$x_i \leqslant \lambda_{Z_i}(X) \;\; \forall\, i = 0, \ldots, n$$

Se verifica $x_0 \leqslant \lambda_{Z_0}(X) = 0$ y supongamos que $x_i \leqslant \lambda_{Z_i}(X)$ siendo $i \geqslant 0$. Entonces existe un morfismo conormal $p : X/X_i \longrightarrow\!\!\!\shortmid\!\!\to X/Z_i(X)$ que verifica $px_i^c = \lambda_{Z_i}(X)^c$



y por ser $\{x_i\}$ una Z-serie, $(x_i^c x_{i+1})^{kc} \leqslant \lambda_Z(X/X_i)$, de donde por la funtorialidad de Z

$$(p\,(x_i^c x_{i+1})^{kc})^{kc} \leqslant \lambda_Z(X/Z_i(X)),$$

lo que permite obtener un morfismo h que por la conmutatividad del diagrama y la propiedad universal del cuadrado cartesiano induce un morfismo normal k verificando $\lambda_{Z_{i+1}}(X)\,k = x_{i+1}$ y así $x_{i+1} \leqslant \lambda_{Z_{i+1}}(X)$.

2.8. Un objeto X de C es Z-nilpotente sí y sólo si tiene una Z-serie finita.

Es consecuencia de 2.7 y de que $\{\lambda_{Z_i} X\}_{i=0,\dots,n}$ es una Z-serie finita de X si $X \in N_n$.

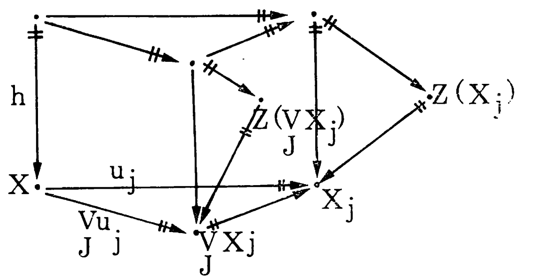
2.7 y 2.8 están demostrados en ([1], 3.12, 3.13) para el caso en que $Z = Z_I$ es un c-prerradical obtenido a partir de un preinterior I ([1], § 2)

En [5] Stanley define, para una clase de grupos χ, cerrada para subobjetos, objetos cocientes y productos finitos el χ-centro de un grupo G, $H_1(G : x)$ como el subgrupo característico formado por los elementos $x \in G$ tales que existe un subgrupo normal N de G verificando

$[x, N] = 1$ y $G/N \in x$, $([x, N] =$ subgrupo generado por los conmutadores $[x, y]$ con $y \in N)$, el cual resulta ser un c-prerradical totalmente hereditario en la categoría de grupos ([5], Prop. 3, p. 184). Así los lemas 2 y 5, y el corolario 6 de [5] se obtienen como casos particulares de 2.7, 2.5 y 2.6, respectivamente.

Un c-prerradical Z se dirá *residual* cuando para todo $h \in S_N(X)$ y toda familia $\{u_j\}_{j \in J}$, $u_j \in S_c(X)$ se verifica

$$[(u_j h)^{kc} \leqslant \lambda_Z\,(R(u_j)) \quad \forall j \in J] \Rightarrow (\bigvee_J u_j)\, h)^{kc} \leqslant \lambda_Z\,(R(\bigvee_J u_j))$$

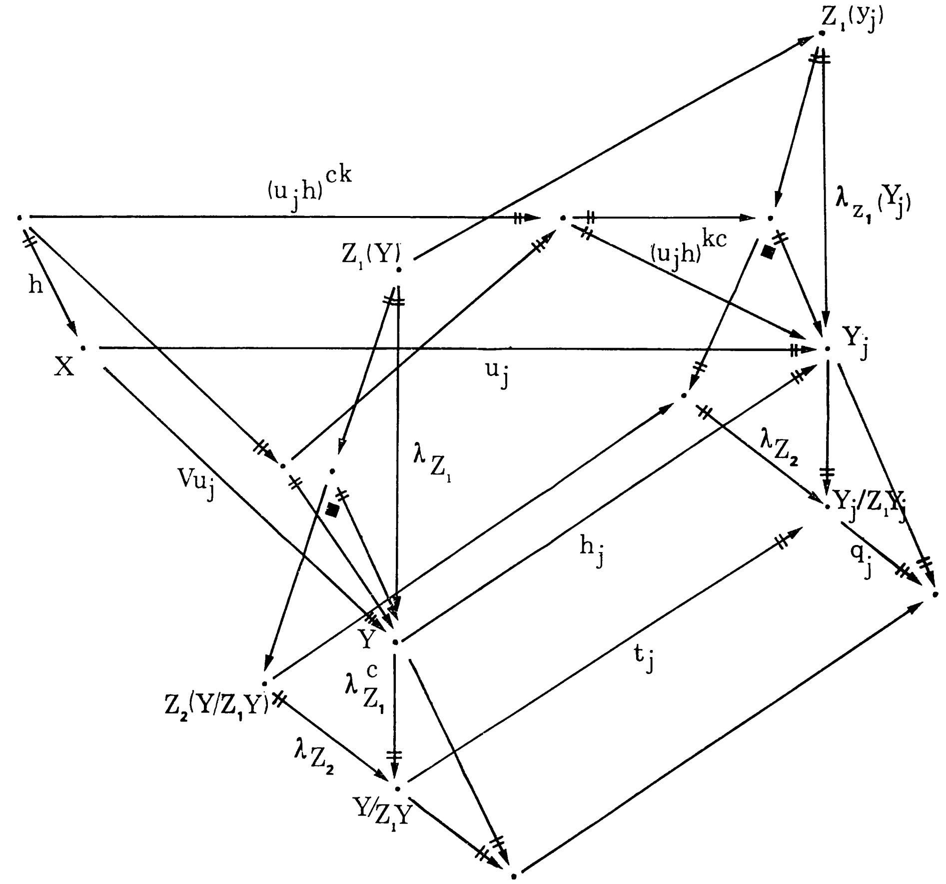


2.9. Si Z_1 y Z_2 son c-prerradicales residuales en C, entonces $Z_1 : Z_2$ es residual.

Sean $\{u_j\}_{j \in J}$, $u_j \in S_c(X)$, $R(u_j) = Y_j$ verificando $(u_j h)^{kc} \leqslant \lambda_{Z_1 : Z_2}$ (Y_j) $\forall j \in J$. Llamando $p_j = \lambda_{Z_1}(Y_j)^c$, $q_j = \lambda_{Z_2}(Y_j/Z_1\, Y_j)^c$, se obtiene $q_j p_j (u_j h)^{kc} = 0$ $\forall j \in J$, lo cual equivale a $(p_j u_j h)^{kc} \leqslant \lambda_{Z_2}$ $(Y_j/Z_1\, Y_j)$ $\forall j \in J$. Por ser Z_2 residual se deduce que $((\bigvee_J p_j u_j)\, h)^{kc} \leqslant$ $\leqslant \lambda_{Z_2}(R(\bigvee_J p_j u_j))$. Ahora bien, siendo $u_j = h_j(\bigvee u_j)$, se tiene $\bigvee_J (p_j u_j) = \bigvee_J (p_j h_j (\bigvee_J u_j)) = \bigvee_J ((p_j h_j)(\bigvee u_j))^{ck} = (\bigvee_J (p_j h_j)(\bigvee u_j))^{ck}$ (1.5.ii) $= (\bigvee_J (p_j h_j))\,(\bigvee_J u_j)$ pues es una flecha conormal. Entoces:

$$((\bigvee (p_j u_j))\, h)^{kc} = (\bigvee (p_j h_j)\ (\bigvee u_j)\, h)^{kc} \leqslant \lambda_{Z_2}(R(\bigvee p_j h_j)). \quad (*).$$

Los morfismos h_j son conormales e inducen morfismos $Z_1(h_j)$ por la funtorialidad de Z_1, y así se obtienen morfismos $\{t_j\}_{j \in J}$ que verifican $t_j \lambda_{Z_1}(Y)^c = p_j h_j$ $\forall j \in J$. Así $p_j h_j \leqslant \lambda_{Z_1}(Y)^c$ $\forall j \in J$.



Demostraremos que $\bigvee_J (p_j h_j) = \lambda_{Z_1} (Y)^c$. Sea $g \in S_c (Y)$ tal que $p_j h_j \leqslant g$, entonces existen morfismos r_j que verifican $p_j h_j = r_j g$, $p_j h_j g^k = 0$ y por tanto $(h_j g^k)^{kc} \leqslant p_j^k = \lambda_{Z_1} (Y)$. Por ser Z_1 residual se verifica entonces $((\vee h_j) g^k)^{kc} \leqslant \lambda_{Z_1} (R (\vee h_j))$. Como $u_j = h_j (\vee u_j)$, $(\vee h_j) (\vee u_j) = ((\vee h_j) (\vee u_j))^{ck} = \bigvee_J (h_j (\vee u_j))^{ck}$ (1.5.) $= \bigvee_J u_j^{ck} = \bigvee_J u_j$, de donde por ser $\vee u_j$ epimorfismo $\bigvee_J h_j = 1_Y$, y así $((\vee h_j) g^k)^{kc} = g^k \leqslant$ $\leqslant \lambda_{Z_1} (Y)$ y por tanto $g = g^{ck} \geqslant \lambda_{Z_1} (Y)^c$, y está demostrado que $\bigvee_J (p_j h_j) = \lambda_{Z_1} (Y)^c$.

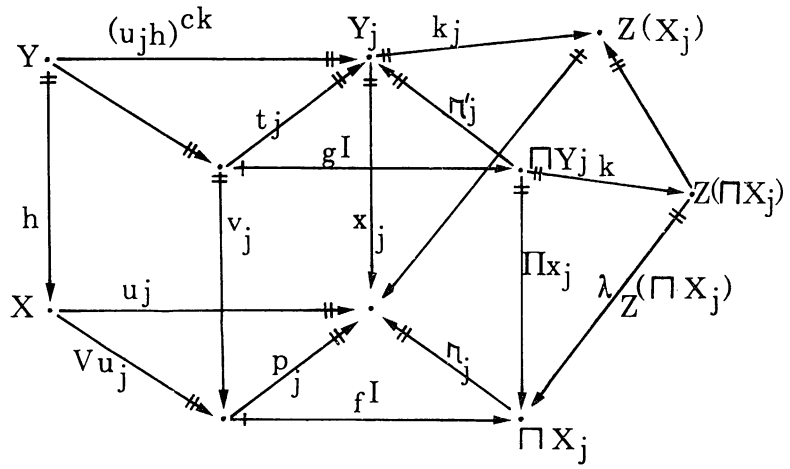
En consecuencia se tiene sustituyendo en (*) $(\lambda_{Z_1} (Y)^c \bigvee_J u_j h)^{kc} \leqslant \lambda_{Z_2} (Y/Z_1 Y)$ y por tanto $\lambda_{Z_1 : Z_2} (Y)^c (\vee u_j h)^{kc} =$ $= \lambda_{Z_2} (Y/Z_1 Y)^c \lambda_{Z_1} (Y)^c (\vee u_j h)^{kc} = \lambda_{Z_2} (Y/Z_1 Y)^c (\lambda_{Z_1} (Y)^c \vee u_j h)^{kc} (\lambda_{Z_1} (Y)^c (\vee u_j h)^{kc})^{ck} = 0$, de donde $(\vee u_j h)^{kc} \leqslant \lambda_{Z_1 : Z_2} (Y)$.

2.10. Si Z es un c-prerradical residual, Z_n es residual para todo $n \geqslant 0$.

En consecuencia de 2.2 y 2.9.

2.11. Sea Z un c-prerradical totalmente hereditario. Si la categoría C tiene productos, Z es residual sí y sólo si conserva productos.

Sea $h \in S_N(X)$, $D(h) = Y$, $\{u_j\}_{j \in J}$, $u_j \in S_c(X)$, $R(u_j) = X_j$ tales que $(u_j h)^{kc} \leqslant \lambda_Z(X_j)$ $\forall j \in J$. Se verifica $\bigvee_J (u_j h)^{ck} = ((\bigvee u_j) h)^{ck}$ (1.5.), y además $\bigvee_J u_j = f^{ck}$, siendo $f : X \to \prod_J X_j$ el morfismo inducido por los u_j ([4], (1.2.21)). Análogamente, $((\bigvee u_j) h)^{ck} = g^{ck}$ siendo $g : Y \to \prod (D(u_j h)^{kc})$ el morfismo inducido por los $(u_j h)^{ck}$.



Siendo $x_j = (u_j h)^{kc}$, $Y_j = D(x_j)$, la familia $\{x_j\}$ induce un morfismo normal $\prod_J x_j : \prod Y_j \to \prod X_j$ ([3], 12.3, p. 67). Para cada j, por ser $x_j \leqslant \lambda_Z(X_j)$ se obtiene un morfismo k_j verificando $\lambda_Z(X_j)\, k_j = x_j$. Por ser $Z(\prod X_j) = \prod (ZX_j)$, la familia $\{k_j \pi_j'\}_{j \in J}$ induce un morfismo $k : \prod Y_j \to Z(\prod X_j)$ que verifica $\pi_j'' k = k_j \pi_j'$ (siendo $\pi''_j : \prod (ZX_j) \to Z(X_j)$ las proyecciones), y por tanto $\pi_j \lambda_Z(\prod X_j)\, k = \lambda_Z(X_j)\, \pi_j''\, k = \lambda_Z(X_j)\, k_j\, \pi_j' = x_j \pi_j' = \pi_j \prod x_j$, y por la propiedad universal de $\prod X_j$, $\lambda_Z(\prod X_j)\, k = \prod x_j$, y así $\prod x_j \leqslant \lambda_Z(\prod X_j)$. Por otra parte se tiene para cada $j \in J$, siendo $v_j = (\bigvee u_j h)^{kc}$, $\pi_j \prod x_j g^I = x_j\, \pi_j' g^I = x_j t_j = p_j v_j = \pi_j f^I v_j$, de donde $\prod x_j g^I = f^I v_j$. Entonces $v_j \leqslant (f^I)^{-1} (\prod x_j) \leqslant (f^I)^{-1} (\lambda_Z \prod X_j)$ y Z es residual.

"$\Rightarrow$" Si Z es residual, sea $\{\Pi X_j \xrightarrow{\pi_j} X_j\}_{j \in J}$ un producto, y sea $\Pi(ZX_j) \xrightarrow{\pi_j'} Z(X_j)$ el producto de los $Z(X_j)$. Se obtiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Pi(ZX_j) \arrow[rr, "\pi_j'"] \arrow[dd, "\Pi(\lambda_Z X_j)"'] & & Z(X_j) \arrow[dd, "\lambda_Z(X_j)"] \\
& Z(\Pi X_j) \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
\Pi X_j \arrow[rr, "\pi_j"] & & X_j
\end{tikzcd}$$

Por funtorialidad se obtienen morfismos $Z(\pi_j)$, los cuales inducen $k : Z(\Pi X_j) \to \Pi(ZX_j)$ verificando $Z(\pi_j) = \pi_j' k \ \forall j \in J$, de donde $\pi_j \ \Pi(\lambda_Z X_j) k = \lambda_Z(X_j) \ \pi_j' k = \lambda_Z \ (X_j) Z(\pi_j) = \pi_j \lambda_Z(\Pi X_j)$ $\forall j \in J$ y por la propiedad universal del producto, $\Pi(\lambda_Z X_j) k = \lambda_Z(\Pi X_j)$, $\lambda_Z(\Pi X_j) \leqslant \Pi(\lambda_Z X_j)$.

Por otra parte, $(\pi_j \Pi(\lambda_Z X_j))^{kc} = \lambda_Z(X_j)$, teniendo en cuenta que Z es residual $((\vee \pi_j) \ \Pi(\lambda_Z X_j))^{kc} \leqslant \lambda_Z(R(\vee \pi_j))$. Pero $\vee \pi_j = 1_{\pi x_j}$ ([4], (1.2.22)) y así $(\Pi(\lambda_Z X_j))^{kc} = \Pi(\lambda_Z X_j) \leqslant \lambda_Z(\Pi X_j)$ y combinando esta desigualdad con la anterior se obtiene $\Pi(\lambda_Z X_j) = \lambda_Z(\Pi X_j)$ y Z conserva productos.

Un c-prerradical Z se dirá *varietal* si es totalmente hereditario y residual ([4], (5.1.15)).

Si Z es varietal, la clase $N_1 = \{X \in Ob(C) / Z(X) = X\}$ es cerrada para subobjetos, objetos cociente conormales y couniones de objetos cociente conormales, y es, por tanto, una variedad en C en el sentido de ([4], (3.3.8)).

2.12. Si Z es varietal, entonces Z_n es varietal para todo $n \geqslant 0$.

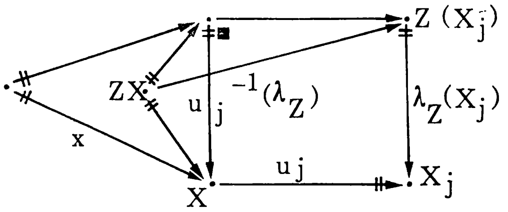
Es consecuencia de 2.4. y 2.10.

2.13. Si Z es varietal, la clase N_n de los objetos Z-nilpotentes de clase menor o igual que n es una variedad para cada $n \geqslant 0$.

Es consecuencia de 2.12.

Si V es una variedad de grupos, entonces el V-centro definido en [5], $H_1(G : V)$ es el centralizador de $v(G)$ en G, siendo $v(G)$ el subgrupo verbal correspondiente a V. En este caso H_1 es un c-prerradical varietal ([4], (5.4.10)) y por 2.13 la clase $V(n) = \{G / H_n(G : V) = G\}$ es una variedad, así 2.13 tiene como caso particular el teorema B de ([5], p. 182).

El lema 10 de [5], también se obtiene: Si Z es un c-prerradical varietal y $\{u_j : X \longrightarrow X_j\}_{j \in J}$ es una familia de cocientes conormales de X tales que $\bigvee u_j = 1_X$, entonces $Z(X) = \bigcap_J u_j^{-1} (\lambda_Z X_j)$. En efecto, por la funtorialidad de Z, $u_j \lambda_Z (X)$ se factoriza a través de $\lambda_Z (X_j)$

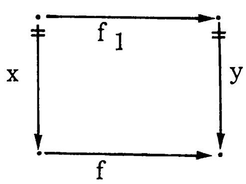


y por la propiedad universal del cuadrado cartesiano se obtiene $\lambda_Z (X) \leqslant u_j^{-1} (\lambda_Z (X_j))$ $\forall j \in J$.

Si $x \in S_N(X)$ verifica $x \leqslant u_j^{-1} (\lambda_Z (X_j))$, entonces $(u_j x)^{kc} \leqslant \lambda_Z (X_j)$ y por ser Z residual $((\bigvee u_j)\, x)^{kc} = x \leqslant \lambda_Z (X)$.

3. Subfuntores normales de la identidad en C_P y preinteriores de C

Se denotará C_P la categoría cuyos objetos son los morfismos normales de C y cuyos morfismos son pares de flechas de C $(f_1, f) : x \to y$, haciendo conmutativo el diagrama



D y R designarán los funtores domonio y rango, D, $R : C_P \to C$, dados por $D(f_1, f) = f_1$, $R(f_1, f) = f$. 0 es el funtor de C_P a C_P que a cada objeto x de C_P le hace corresponder el subobjeto 0 de $R(x)$.

C_P tiene cero, es el morfismo 1_0 de C, que se denotará 0_P. C_P es localmente pequeña por serlo C.

3.1. C_P tiene cúcleos.

Sea $(f_1, f) : x \to y$ un morfismo de C_P. Como consecuencia de 1.2., $(f_1{}^k, f^k) : (x^c f^k)^k \to x$ es un morfismo de C_P,

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr, "g_1"] \arrow[dd, "z"] & & \\
\cdot \arrow[rr, "f_1^k"] \arrow[ddd, "(x^c f^k)^k"'] & & \cdot \arrow[r, "f_1"] \arrow[ddd, "x"] & \cdot \arrow[ddd, "y"] \\
 & & & \\
 & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr, "g"] & & \\
\cdot \arrow[rr, "k", "f"'] & & \cdot \arrow[r, "f"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

y $(f_1^k, f^k) = (f_1, f)^k$ en C_P.

3.2. Un morfismo $(j, j) : x \to y$ en C_P es normal (núcleo) sí y sólo si j_1, j son normales en C y el cuadrado $yj_1 = jx$ es cartesiano en C. Todo morfismo normal de C_P tiene conúcleo.

Los morfismos normales de C_P dan lugar a cuadrados cartesianos en C por 3.1., y si $(j_1, j) : x \to y$ es tal que $yj_1 = jx$ es cartesiano en C, entonces $(j_1^c, j^c) : y \to (j^c y)^{kc}$ (j_1 y j son normales en C)

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "x"'] & \cdot \arrow[r, "j_1^c"] \arrow[d, "y"] & \cdot \arrow[d, "(j^c y)^{kc}"] \\
\cdot \arrow[r, "j"] & \cdot \arrow[r, "j^c"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de C_P, como consecuencia de C4 y 1.2., y $(j_1, j) = (j_1^{kc}, j^{kc}) = (j_1^c, j^c)^k$.

Si $(j_1, j) : x \to y$ es normal en C_P, y $(f_1, f) : y \to z$ es tal que $(f_1, f)\,(j_1, j) = (f_1 j_1, fj) = (0, 0)$, entonces existen morfismos h_1, h en C tales que $f_1 = h_1 j_1^c$, $f = hj^c$ y así

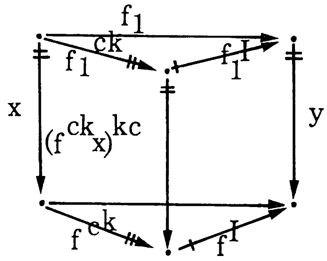
$$zh_1 j_1^c = zf_1 = fy = hj^c y = h\,(j^c y)^{kc} j_1^c$$

teniendo en cuenta que j_1^c es un epimorfismo en C, $zh_1 = h\,(j^c y)^{kc}$ y así $(h_1, h) : (j^c y)^{kc} \to z$ es un morfismo de C_P y $(j_1, j)^c = (j_1^c, j^c)$.

3.3. Todo morfismo (f_1, f) de C_P, se factoriza en producto de un morfismo conormal seguido de un monomorfismo.

Un morfismo conormal es el conúcleo de su núcleo, así por 3.2 los morfismos conormales de C_P son precisamente aquellos morfismos (h_1, h) tales que h_1 y h son conormales en C. Además, los monomorfismos de C_P son los morfismos (h_1, h) con h_1 y h monomorfismos de C.

Si $(f_1, f) : x \to y$ es un morfismo de C_P, utilizando C3 y

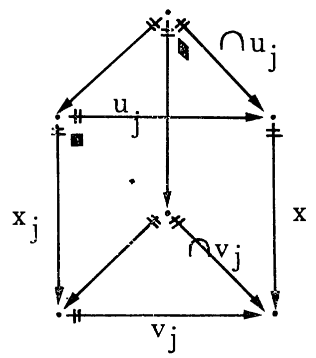


C4, se obtiene morfismos $(f_1^{ck}, f^{ck}) : x \to (f^{ck}\, x)^{kc}$, $(f_1^{I}, f^{I}) : (f^{ck}\, x)^{kc} \to$ $\to y$, conormal y monomorfismo respectivamente, verificando $(f_1, f) =$ $= (f_1^{I}, f^{I})\ (f_1^{ck}, f^{ck})$. Además esta factorización es única.

3.4. Si x es un objeto de C_P, los subobjetos normales de x, $S_N{}^P(x)$, forman un retículo completo, con intersección dada por

$$\bigcap_J (u_j, v_j) = (\bigcap_J u_j, \bigcap_J v_j).$$

Es consecuencia de 1.5ii), pues $x^{-1}(\bigcap v_j) = \bigcap x^{-1}(v_j) = \bigcap u_j$.



El retículo de los cocientes conormales de x, $S_c{}^P(x)$, también es completo, con unión (counión)

$$\bigvee_J (r_j, s_j) = (\bigvee_J r_j, \bigvee_J s_j)$$

para $(r_j, s_j) \in S_c{}^P(x)\ \forall\, j \in J$.

Como consecuencia de 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4, la categoría C_P tiene las siguientes propiedades:

CP1) Todo morfismo conormal tiene núcleo.

CP2) Todo morfismo normal tiene conúcleo.

CP3) Todo morfismo se descompone en producto de conormal por monomorfismo, $(f_1, f) = (f_1{}^I, f^I)\,(f_1{}^{ck}, f^{ck})$.

CP5*) Para cada objeto x de C_P, los subobjetos normales de x forman un retículo completo, $S_N{}^P(x)$.

3.5. Si C tiene productos, C_P tiene productos.

Sea $\{x_j\}_{j\in J}$ una familia de objetos de C_P, con $R(x_j) = X_j$, $D(x_j) = Y_j$. Considerando los productos $\pi_j : \Pi X_j \to X_j$ y $\pi_j' : \Pi Y_j \to Y_j$ en C, se obtiene un morfismo Πx_j inducido por los x_j, que es

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dll, "u"'] \arrow[drr, "u_j"] \arrow[dd, "z"] & & \\
\Pi Y_j \arrow[rrrr, "\pi'_j"] \arrow[dd, "\Pi x_j"'] & & & & Y_j \arrow[dd, "x_j"] \\
 & & \cdot \arrow[dll, "v"'] \arrow[drr, "v_j"] & & \\
\Pi X_j \arrow[rrrr, "\pi_j"'] & & & & X_j
\end{tikzcd}$$

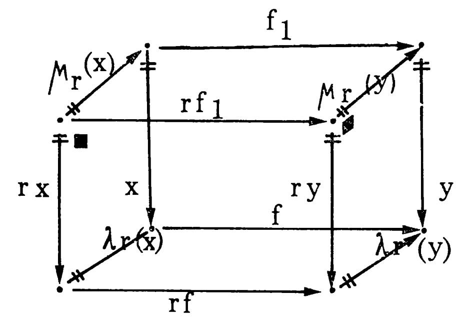
normal ([3], 12.3, p. 67).

Si $(u_j, v_j) : z \to x_j$ es una familia de morfismos en C_P, se obtienen morfismos u y v de C verificando $\pi_j' u = u_j$, $\pi_j v = v_j$ $\forall\, j \in J$, y así

$$\pi_j(\Pi x_j)\, u = x_j\, \pi_j'\, u = x_j\, u_j = v_j\, z = \pi_j\, vz \ \forall\, j \in J,$$

de donde $(\Pi x_j)\, u = vz$ y $(u, v) : z \to x_j$ es un morfismo de C_P, y es, además, el único que hace conmutativo el diagrama.

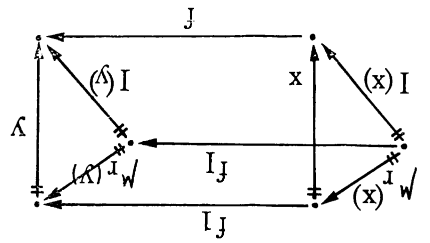
Un *subfuntor normal de la identidad de* C_P es un funtor $r : C_P \to C_P$, junto con una transformación natural $(\mu_r, \lambda_r) : r \to 1_{C_P}$ tal que para todo $x \in Ob(C_P)$, $(\mu_r(x), \lambda_r(x))$ es normal en C_P. Para $(f_1, f) : x \to y$ se tiene un diagrama conmutativo:



donde $r(f_1, f) = (rf_1, rf)$.

r se dice *subfuntor normal radical* si r es un subfuntor normal de la identidad y verifica, además, $r(x/rx) = 0_P$ para todo $x \in Ob(C_P)$

Un subfuntor normal de la identidad de C_P, tal que $r(x) = 1_{D(\lambda_r(x))}$ $\forall\, x \in Ob(C_P)$ se dirá *preinterior de C*. En este caso se empleará la notación $I(x) = \lambda_r(x)$ y $\mu_I(x) = \mu_r(x)$, de modo que $x\mu_I(x) = I(x)$ $\forall\, x \in Ob(C_P)$.



El concepto de preinterior así obtenido, coincide con el definido en ([1], 2).

3.6. Existe una correspondencia biunívoca entre:

i) Subfuntores normales radicales de la identidad de C_P.

ii) Clases R de objetos de C_P cerradas para subobjetos y couniones de objetos cociente conormales.

Sea $S = \{x \in Ob(C_P) / rx = 0_P\}$. S es cerrada para subobjetos y couniones, pues la demostración de ([4], (3.3.5)) se aplica a C_P, ya que esta verifica CP1-CP5*. Recíprocamente, dada S cerrada para subobjetos y couniones, se define $(\mu_r(x), \lambda_r(x)) = \bigcap_J (u_j, v_j)^k = (\bigcap u_j^k, \bigcap v_j^k)$, siendo $\{(u_j, v_j)\}_{j \in J}$ la familia de los cocientes conormales de x con rango en S.

Una clase V de objetos de C_P se dirá *variedad* de C_P si es cerrada para subobjetos, objetos cociente conormales y couniones. Si C (y por tanto C_P) tiene productos, una clase de objetos V de C_P es variedad sí y sólo si es cerrada para subobjetos, cocientes conormales y productos ([4], (3.3.9).

Un *funtor variedad* en C_P es un subfuntor normal de la identidad de C_P que conserva morfismos conormales. En particular es un subfuntor radical.

3.7. Existe una correspondencia biunívoca entre

i) Funtores variedad en C_P.

ii) Variedades en C_P.

Si v es un funtor variedad, la variedad asociada está dada por $V = \{x \in Ob\,(C_P)/v(x) = 0_P\}$. La demostración es como en ([4], (3.3.10)).

3.8. Existe una correspondencia biunívoca entre

i) Preinteriores radicales de C.

ii) Clases de objetos de C_P cerradas para subobjetos, couniones de cocientes conormales y que contienen a todos los $x \in Ob\,(C_P)$ tales que $D\,(x) = 0$ $(x : 0 \multimap X$ en $C)$.

Como consecuencia de 3.6, es suficiente demostrar que el subfuntor radical r es preinterior sí y sólo si la clase $S = \{x \in Ob\,(C_P)/ r\,(x) = 0_P\}$ contiene todos los $x \in Ob\,(C_P)$ tales que $D\,(x) = 0$.

Si r es preinterior, y $x : 0 \multimap X$, entonces $I\,(x) = \lambda_r\,(x) = x$, y $r\,(x) = 1_{D\,(I\,(x))} = 1_0 = 0_P$.

Recíprocamente, si todas las flechas de dominio 0 pertenecen a S, y x es un objeto de C_P, entonces $(o,\, x^c) : x \longrightarrow (x^c\, x)^{kc}$ es uno de los (u_j, v_j) que definen r (3.6), y así $\lambda_r\,(x) \leqslant x$, de donde $r\,(x) = 1_{D\,(\lambda_r\,(x))}$.

3.9. Existe una correspondencia biunívoca entre:

i) Preinteriores de C que conservan morfismos conormales.

ii) Variedades en C_P que contienen a todos los objetos de C_P de dominio cero.

Si I conserva conormales, I es preinterior radical, y por 3.8 $S = \{x \in Ob\,(C_P)/I(x) = 0\}$ contiene a los objetos de C_P de dominio cero. Además, S es una variedad, pues es cerrada para conormales y se aplica 3.8.

Recíprocamente, el subfuntor radical definido por una clase que verifica las condiciones de ii), es un preinterior radical por 3.8, y conserva conormales por 3.7.

Si I es un preinterior de C, se dice que I *conserva uniones* cuando para toda familia $\{x_j\}$ de objetos de C_P con $R(x_j) = X \ \forall\, j \in J$, se verifica $I(\bigcup_J x_j) = \bigcup_J I(x_j)$.

Se llamará U-*variedad* en C_P, a una variedad V de C_P que contenga todos los objetos de C_P de dominio cero y tal que si $\{x\}_{j \in J}$, es una familia de objetos de V con $R(x_j) = X \ \forall\, j \in J$, entonces $\bigcup_J x_j \in V$.

3.10. Existe una correspondencia biunívoca entre

i) Preinteriores de C que conservan conormales y uniones.

ii) U-variedades de C_P.

iii) c-prerradicales varietales en C.

i) $\longleftrightarrow$ ii) Como consecuencia de 3.9, es suficiente demostrar que I conserva uniones sí y sólo si para toda familia $\{x_j\}_{j \in J}$ de objetos de C_P tales que $R(x_j) = X$, $I(x_j) = 0 \ \ \forall\, j \in J$ se verifica $I(\bigcup_J x_j) = 0$. Esto es consecuencia de ([1], 3.6).

ii) $\longleftrightarrow$ iii) Sea V una U-variedad de C_P. Si $X \in Ob(C)$, sea $\{x_j\}_{j \in J}$ la familia de los objetos de V tales que $R(x_j) = X$. La familia es no vacía, $O \in S_N(x)$ está en V. Se define $\lambda_Z(X) = \bigcup_J x_j$.

Z es un c-prerradical como consecuencia de ser V cerrada para cocientes conormales y de 1.5. Z se totalmente hereditario por ser V cerrada para subobjetos y es residual puesto que V es cerrada para couniones.

Recíprocamente, si Z es un c-prerradical varietal definiendo $V = \bigcup_{X \in Ob(C)} \{x \in S_N(X) / x \leqslant \lambda_Z(X)\}$ se obtiene la U-variedad de C_P correspondiente.

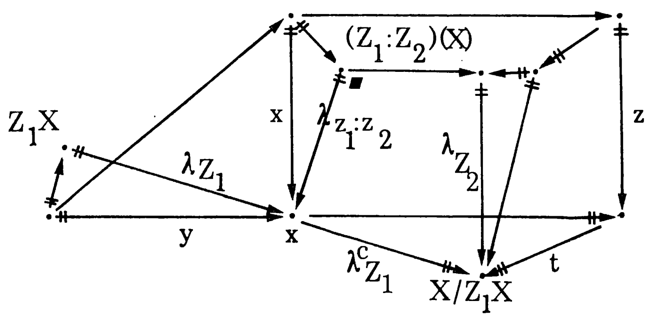
Si V_1 y V_2 son U-variedades de C_P, se define $V_1 \cdot V_2$ como la clase de los objetos x de C_P tales que existen $y \in V_1$, $z \in V_2$, $u \in Ob(C_P)$ haciendo conmutativo el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, "u^c"] \arrow[d, "x"] & \bullet \arrow[d, "z"] \\
\bullet \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "y"] & \bullet \arrow[r, "y^c"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

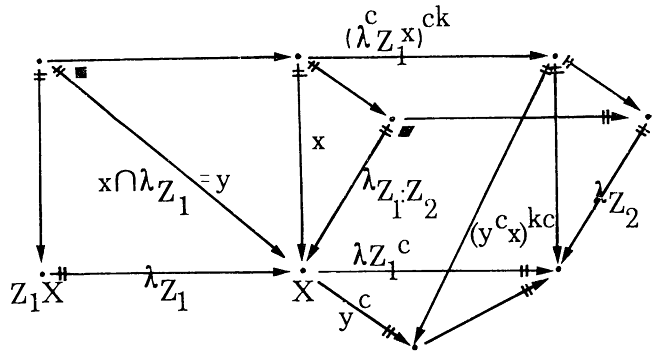
Se define $V_n = V_{n-1} \cdot V$, para cada número natural $n \geqslant 0$.

3.11. Si V_1 y V_2 son U-variedades de C_P, $V_1 \cdot V_2$ es una U-variedad de C_P. Si V es una U-variedad lo es V_n, y V_n es la variedad correspondiente a Z_n.

Si V_1 y V_2 son U-variedades y Z_1, Z_2 son los c-prerradicales varietales correspondientes (3.10), $Z_1 : Z_2$ es un c-prerradical varietal (2.3, 2.9). Sea V' la U-variedad correspondiente a $Z_1 : Z_2$. Si $x \in V_1 \cdot V_2$, se tiene un diagrama con $y \in V_1$, $z \in V_2$, de modo que $y \leqslant \lambda_{Z_1}(X)$, y así se obtiene un morfismo $t : R(z) \to X/Z_1 X$ tal que $(tz)^{kc} \in V_2$ y $(tz)^{kc} \leqslant \lambda_{Z_2}(X/Z_1 X)$, de donde se obtiene por las conmutatividades del diagrama y la propiedad universal del cuadrado cartesiano de $\lambda_{Z_1}(X)^c$ y $\lambda_{Z_2}(X/Z_2 X)$ que $x \leqslant \lambda_{Z_1:Z_2}(X)$, y así $x \in V'$.



Recíprocamente, si $x \in V'$, $R(x) = X$, se verifica $x \leqslant \lambda_{Z_1:Z_2}(X)$ y así $(\lambda_{Z_1}(X)^c x)^{kc} \leqslant (\lambda_{Z_1^c}(X) \cdot \lambda_{Z_1:Z_2}(X))^{kc} = \lambda_{Z_2}(X)$ y $(\lambda_{Z_1}(X)^c x)^{kc} \in V_2$. Además, siendo $y = x \cap \lambda_{Z_1}(X)$, $y \in V_1$, basta pues demostrar que $(y^c x)^{kc} \in V_2$ para obtener $x \in V_1 \cdot V_2$. Pero siendo $w : 0 \longrightarrow R(x^c)$



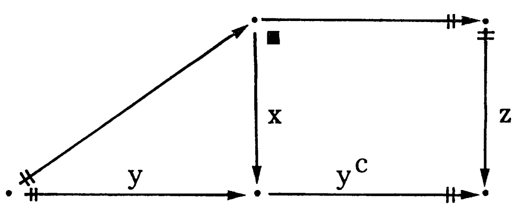
en C_P, se verifica $((\lambda_{Z_1}(X)^c x)^{ck}, \lambda_{Z_1}(X)^c) \vee (o, x^c) = (\lambda_{Z_1}{}^c x)^{kc}, y^c)$, y por ser w, $(\lambda_{Z_1}(X)^c x)^{kc} \in V_2$ y V_2 cerrada para couniones de cocientes conormales, $(y^c x)^{kc} \in V_2$ obteniéndose así el resultado. Entonces $V_1 \cdot V_2 = V'$, y como consecuencia de 3.10, 2.3 y 2.9, $V_1 \cdot V_2$ es una U-variedad.

Si V es una U-variedad, de manera análoga se demuestra por inducción que V_n lo es, y que corresponde según 3.10 al c-prerradical Z_n, si V corresponde a Z.

Si I es un preinterior de C que conserva conormales y uniones, se define $I^n(x) = II^{n-1}(x) = I(I^{n-1}(x))$, $n \geqslant 0$ ([1], 2.2), I^n es un preinterior que conserva conormales y uniones.

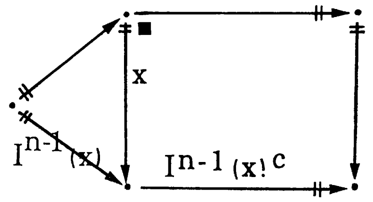
3.12. Si I y V se corresponden según 3.10, entonces I^n y V_n se corresponden para todo $n \geqslant 0$.

Es necesario demostrar que $x \in V_n \Leftrightarrow I^n(x) = 0 \ \forall\, x \in Ob(C_P)$. Supongamos que $x \in V_{n-1} \Leftrightarrow I^{n-1}(x) = 0 \ \forall\, x \in Ob(C_P)$. Si $x \in V_n$, existen objetos y, z de C_P tales que $y \in V$, $z \in V_{n-1}$ y un diagrama



Entonces $(y^c I^{n-1}(x))^{kc} = I^{n-1}(z) = 0$ pues I^{n-1} conserva conormales y $z \in V_{n-1}$, por tanto $I^{n-1}(x) \leqslant y$ y así por la funtorialidad de I $I(I^{n-1}(x)) = I^n(x) \leqslant I(y) = 0$.

Recíprocamente, si $I_n(x) = I(I^{n-1}(x)) = 0$, entonces $I^{n-1}(x) \in V$, y se obtiene un diagrama



donde $(I^{n-1}(x)^c x)^{kc} \in V_{n-1}$ por ser I^n un preinterior radical, como consecuencia de conservar conormales. Por tanto, $x \in V_n$.

3.13. Si I, Z y V son correspondientes según 3.10, I^n, Z_n y V_n son correspondientes para todo número natural $n \geqslant 0$.

Es consecuencia de 3.10, 3.11 y 3.12.

Por tanto la clase $N_n = \{X \in Ob(C)/Z_n(X) = X\} = \{X \in Ob(C)/ I^n(1_X) = 0\} = \{X \in Ob(C)/1_X \in V_n\}$, es la clase de los objetos Z-nilpotentes de clase menor o igual que n.

Además de los ejemplos de c-prerradicales en la categorías de grupos, que se encuentran en [5], se dan otros de c-prerradicales y preinteriores en diversas categorías en ([4], 5.4).

BIBLIOGRAFIA

1.— Gómez Pardo, J. L. *Nilpotencia funtorial*. Rev. Mat. Hisp.-Amer T. XXXVIII, (1978), 3-22.

2.— Michler, G. *Radikale und Sockel*. Math. Ann. 167 (1966), 1-48.

3.— Mitchell, B. *Theory of categories*. Acad. Press (1965).

4.— Rodríguez González, N. *Preinteriores, resolubilidad y nilpotencia en categorías*. ALXEBRA 19. Dep. Alg. y Fund. Santiago (1977).

5.— Stanley, T. E. *Generalizations of the Classes of Nilpotent and Hypercentral Groups*. Math. Z. 118, 180-190 (1970).

Depto. de Algebra y Fund.
Universidad de Santiago.