SOBRE CIERTAS PROPIEDADES DE LAS TOPOLOGIAS LOCALMENTE CONVEXAS (*)

por

MANUEL SUAREZ

INTRODUCCIÓN. — Todos los espacios vectoriales que se consideran, se suponen definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos.

Dado un conjunto A contenido en un espacio vectorial E, denotaremos por $\langle A \rangle$ su envoltura absolutamente convexa, y por $[A]$ su envoltura lineal.

A los espacios vectoriales topológicos localmente convexos los llamaremos simplemente espacios localmente convexos.

Si E es un espacio vectorial y T una topología definida sobre E, con la notación $E[T]$, o simplemente por E cuando no haya peligro de confusión, designaremos al espacio vectorial E con la topología T.

Si $E[T]$ es un espacio vectorial topológico, con los símbolos E' y E^* se denotarán sus espacios dual topológico y dual algebraico, respectivamente.

Si E es un espacio vectorial, x es un elemento de E y f es una forma lineal definida sobre E, el resultado de aplicar f al vector x lo denotaremos por cualquiera de los símbolos $f(x)$, $\langle f, x \rangle$ o bien $\langle x, f \rangle$.

Si $\{E_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, designaremos respectivamente por $\underset{i \in I}{\Pi} E_i$ y por $\underset{i \in I}{\amalg} E_i$ a los espacios producto cartesiano y suma externa directa de los espacios E_i de la familia anterior.

Si $E[T]$ es un espacio localmente convexo, A un subconjunto distinto del vacio, equilibrado, convexo y acotado del espacio vectorial E y q_A es una seminorma sobre el subespacio vectorial $[A]$ de E, definida de la siguiente forma

$$q_A(x) = \underset{\varrho > 0,\ x \in \varrho A}{inf,} \varrho$$

(*) El presente trabajo es parte de la tesis doctoral del autor del mismo.

entonces designaremos por E_A al espacio localmente convexo consistente en el espacio vectorial $[A]$ con la topología de la seminorma q_A la cual, tal como ha sido definida, es llamada gauge de A.

Sea E un espacio vectorial y G un subespacio vectorial de E^*; con los simbolos $\sigma(E, G)$ y $\tau(E, G)$ designaremos respectivamente a las topologías débil y de Mackey definidas sobre E y de espacio dual G. Si suponemos que E y G forman un par dual, con el símbolo $\beta(E, G)$ denotaremos a la topología fuerte sobre E definida por el sistema fundamental de entornos de cero.

$$\{A^\circ | A\text{: acotado en } G[\sigma(G, E)];\ A^\circ\text{: polar de } A \text{ en } E\}$$

Las definiciones que se consideran de espacios casi-tonelados, ω-tonelados y ω-casi-tonelados, son las siguientes:

Diremos que un espacio localmente convexo es casi-tonelado cuando todo tonel bornívoro en él, es entorno de cero.

Diremos que un espacio localmente convexo $E(T)$ de espacio dual topológico E' es ω-tonelado cuando todo subconjunto A de E' que sea $\sigma(E', E)$-acotado (es decir, acotado en $E'[\sigma(E', E)]$) y numerable, es equicontinuo.

Diremos que un espacio localmente convexo $E[T]$ es ω-casi-tonelado cuando todo subconjunto A de su espacio dual E' que sea numerable y $\beta(E', E)$-acotado, es equicontinuo.

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado tal que $E' \neq E^*$ y sea $\mu \in E^*$, $\mu \notin E'$ y $\{V_i\}_{i\in I}$ un sistema fundamental de entornos de cero de la topología T.

Representaremos por T_u a la topología definida sobre el espacio vectorial E de modo que sea invariante por traslaciones y con el sistema fundamental de entornos de cero constituido por todos los conjuntos de la forma $V_i \cap \alpha\{u\}^\circ$, en donde V_i es un entorno de cero cualquiera del sistema fundamental considerado antes, α es un escalar distinto de cero y $\{u\}^\circ$ es la polar en E del conjunto de un solo elemento $\{u\} \subset E^*$. Es trivial que $E[T_u]$ es un espacio localmente convexo separado y que su espacio dual topológico es $E_u' = [E' \cup \{u\}]$. En (3) se prueba que si $E[T]$ es un espacio tonelado o bornológico o casi-tonelado u ω-tonelado u ω-casi-tonelado para el que $E' \neq E^*$ y es $\mu \in E^*$, $\mu \notin E'$, entonces $E[T_u]$ es respectivamente un espacio tonelado, bornológico, casi-tonelado, ω-tonelado u ω-casi-tonelado de espacio dual topológico E_u'.

TEOREMA 1.

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado tal que $E' \neq E^*$ y sea $\mu \in E^*$, $\mu \notin E'$. Entonces, que T sea una topología de Mackey no implica que también haya de serlo la topología T_μ.

Demostración.

Sea E un espacio vectorial de dimensión infinita numerable y E' un hiperplano denso en el espacio $E^*[\sigma(E^*, E)]$. Tal hiperplano existe, pues si consideramos una base $\{e_n\}_{n \in N}$ de E y una sucesión $\{e_n'\}_{n \in N}$ de forma lineales definidas sobre E, tal que $\forall\, i, j \in N$: $e_i'(e_j) = \delta_{ij}$ (en donde $\delta_{ij} = 1$ cuando $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$), supongamos entonces que ψ es una forma lineal definida sobre E^* de manera que $\forall\, n \in N$: $\psi(e_n') = 1$; es fácil ver que $\psi \notin E$ y en consecuencia, si $E' = \{x' \in E^*,\ \psi(x') = 0\}$, es un hiperplano denso en el espacio $E^*[\sigma(E^*, E)]$. Por tanto, si $T = \tau(E, E')$, topología de Mackey sobre E de espacio dual E', ha de ser T una topología separada, pues si x es un elemento distinto de cero del espacio E, consideremos un $x^* \in E^*$ tal que $|x^*(x)| = 1$; por ser E' denso en el espacio $E^*[\sigma(E^*, E)]$, existe algún $x' \in E'$ tal que $x' \in x^* + \frac{1}{2}\{x\}^\circ$ y por tanto, $|x'(x)| = |x'(x) - x^*(x) + x^*(x)| \geqslant |x^*(x)| - |x'(x) - x^*(x)| \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es pues $x \notin \frac{1}{3}\{x'\}^\circ$, lo que implica que la topología $\sigma(E, E')$ es separada y, en consecuencia, también lo ha de ser la topología T. Puesto que E' es denso en el espacio $E^*[\sigma(E^*, E)]$, dada cualquier forma lineal x^* perteneciente al espacio E^* y no perteneciente al E', existe una sucesión $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$ en E' tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = x^*$ en el referido espacio $E^*[\sigma(E^*, E)]$. Luego, si hacemos $S = \{x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots\}$, S ha de ser un conjunto acotado y, en consecuencia, también ha de serlo $S^{\circ\circ}$, bipolar de S en la polaridad entre E y E^*. Como $S^{\circ\circ}$ es además un conjunto $\sigma(E^*, E)$-cerrado, ha de ser $\sigma(E^*, E)$-compacto. Pero $S^{\circ\circ} \cap E'$ no es $\sigma(E', E)$-compacto, pues existe el conjunto $S \subset S^{\circ\circ} \cap E'$ que es infinito y sin ningún punto de acumulación en el espacio $E'[\sigma(E', E)]$, (*).

Por otra parte, si consideramos una forma lineal μ perteneciente al espacio E^* y no perteneciente al E', por ser E' un hiperplano de E^*, se verifica que $E_\mu' = E^*$ y en consecuencia, dado cualquier conjunto equilibrado y convexo $A \subset E_u'$ que además sea $\sigma(E_u', E)$-compacto, también será $\sigma(E^*, E)$-compacto y por ello, si la topología T_u fuese de Mackey, A° sería un entorno de cero en el espacio $E[T_u]$ y por ello existiría un entorno de cero W, equilibrado, convexo y cerrado en el espacio $E[T]$, y un escalar $\alpha \neq 0$ tal que $W \cap \alpha\{u\}^\circ \subset A^\circ$. Luego, si $A^{\circ\circ}$ y $(W \cap \alpha\{u\}^\circ)^\circ$ son respectivamente las polares de A° y $W \cap \alpha\{u\}^\circ$ en E^*, ocurriría que $A^{\circ\circ} \subset (W \cap \alpha\{u\}^\circ)^\circ$ y en consecuencia también sería $A^{\circ\circ} \subset \left(W^\circ \cup \left\{\frac{1}{\alpha}u\right\}^{\circ\circ}\right)^{\circ\circ}$. Como en virtud del Teorema de las bipolares es $\left\langle W^\circ \cup \left\{\frac{1}{\alpha}u\right\}^{\circ\circ}\right\rangle = \left(W^\circ \cup \left\{\frac{1}{\alpha}u\right\}^{\circ\circ}\right)^{\circ\circ}$ y evidentemente $E' \cap \left\langle W^\circ \cup \left\{\frac{1}{\alpha}u\right\}^{\circ\circ}\right\rangle = W^\circ$, se verificaría que $A^{\circ\circ} \cap E' \subset W^\circ$, y como $A^{\circ\circ} \cap E'$ es un conjunto $\sigma(E', E)$-cerrado y W° es $\sigma(E', E)$-compacto (pues por ser W entorno de cero en el espacio $E[T]$, W° es equicontinuo, y como además es $\sigma(E^*, E)$-cerrado, ha de ser $\sigma(E', E)$-compacto en virtud del Teorema de Alaoglu-Bourbaqui), el conjunto $A^{\circ\circ} \cap E'$ habría de ser $\sigma(E', E)$-compacto. Puesto que, en virtud de la definición del conjunto A, es $A^{\circ\circ} = A$, sería pues $\sigma(E', E)$-compacto el conjunto $A \cap E'$.

Hemos probado así que si la topología T_u fuese de Mackey, la intersección de cualquier conjunto equilibrado, convexo y $(\sigma E^*, E)$-compacto A con el espacio E', dual topológico del $E[T]$, habría de ser un conjunto compacto del espacio $E'[\sigma(E', E)]$. Este resultado junto con el (*) antes obtenido, demuestra el Teorema que nos ocupa.

La anterior demostración del Teorema 1 sugiere la demostración del Teorema y Corolario siguientes:

Teorema 2

Si el espacio $E[T]$ es ω-tonelado y separado de dimensión infinita numerable entonces su espacio dual topológico y su espacio dual algebraico coinciden.

Demostración

Por considerar que $E[T]$ es un espacio separado, su espacio dual topológico E' es denso en su espacio dual algebraico E^* con la topología $\sigma(E^*, E)$.

Por tener E una base numerable, la topología débil $\sigma(E^*, E)$ tiene un sistema fundamental de entornos de cero numeragble.

Por todo lo anterior ocurre que para cualquier $x^* \in E^*$ existe una sucesión $S = \{x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots\}$ en E' tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = x^*$. Luego S es un conjunto numerable y $\sigma(E', E)$-acotado en E'. Puesto que $E[T]$ es ω-tonelado, ha de ser, pues, S equicontinuo y también $S^{\circ\circ}$, en donde $S^{\circ\circ}$ representa la polar de S° en E^*. Pero $x^* \in S^{\circ\circ}$, por ser $S^{\circ\circ}$ $\sigma(E^*, E)$-cerrado, y por tanto $x^* \in E'$. Luego ha de ser $E' = E^*$, c.q.d.

COROLARIO 2.1.

Si $E[T]$ es un espacio normado y ω-tonelado de dimensión infinita, ésta no puede ser numerable.

Demostración.

Puesto que $E[T]$ es ω-tonelado, si E fuese de dimensión infinita numerable habría de ser $E' = E^*$ en virtud del Teorema anterior.

Por otra parte, si $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots,)$ es una base de E, que podemos suponer tal que para todo $n \in N$ es $\|e_n\| = 1$, sea f una forma lineal sobre E definida de la manera siguiente:

$$f(e_1) = 1, \ f(e_2) = 2, \ldots\ldots, \ f(e_n) = n, \ldots\ldots$$

Evidentemente esta forma lineal sobre E no es continua y por tanto $E' \neq E^*$, en contradicción con el resultado anterior.

Luego el espacio normado ω-tonelado $E[T]$ no puede ser de dimensión infinita numerable, c.q.d.

TEOREMA 3.

Si $E[T]$ es un espacio normado de espacio dual topológico $E' \neq E^*$ y $u \in E^*$, $u \notin E'$, entonces $E[T_u]$ también es normado.

Demostración.

Sea $A = B_1 \cap \{u\}^{\circ}$, en donde B_1 es la bola unidad cerrada en $E[T]$. Por tanto A es un conjunto equilibrado, convexo y acotado en $E[T]$ y en consecuencia ha de ser E_A un espacio normado.

Por otra parte es evidente que $E_A = E[T_u]$, lo cual demuestra lo que queremos.

DEFINICIÓN 1.

Sea $E[T]$ *un espacio localmente convexo separado y* $\{x_i\}_{i\in I}$ *una familia de elementos de* E. *Diremos que la familia* $\{x_i\}_{i\in I}$ *es débilmente sumable si y sólo si el conjunto dirigido* $\{\sum_J x_i\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ *(en donde* $\mathcal{F}(I)$ *es la colección de todos los subconjuntos finitos de* I*), es de Cauchy con respecto a la topología débil* $\sigma(E, E')$, *considerando que por definición:*

Para todo $J_1, J_2 \in \mathcal{F}(I) : J_1 \leq J_2$ *es equivalente a* $J_1 \subset J_2$.

Hagamos la observación de que en (8) es dada la siguiente definición de familia débilmente sumable:

«*Si* $E[T]$ *es un espacio localmente convexo separado y* $\{x_i\}_{i\in I}$ *es una familia de elementos de* E, *entonces diremos que* $\{x_i\}_{i\in I}$ *es débilmente sumable si y sólo si para cualquier forma lineal continua* x' *definida sobre el espacio* $E[T]$, *es* $\sum_I |\langle x_i, x'\rangle| < \infty$». Es trivial probar que las dos definiciones anteriores son equivalentes.

DEFINICIÓN 2. (8)

Sea $E[T]$ *un espacio localmente convexo separado. Designaremos por* $l_I^1[E]$ *al espacio vectorial constituido por todas las familias* $(x_i)_{i\in I}$ *débilmente sumables contenidas en* E, *con las operaciones* $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ *de suma de vectores y* $\alpha(x_i)_{i\in I} = (\alpha \cdot x_i)_{i\in I}$ *de producto de vectores por escalares, siendo el cuerpo base para* $l_I^1[E]$ *el mismo que para* E.

DEFINICIÓN 3. (8)

Dado un espacio vectorial $l_I^1[E]$, *designaremos por* ε *a la topología definida sobre* $l_I^1[E]$ *de la manera siguiente:*

ε *es invariante por traslaciones y un sistema fundamental de entornos de cero de* ε *está constituido por todos los conjuntos de la forma:*

$$U = \left\{ (x_i)_{i\in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{Existe } V, \textit{ entorno de cero en } E[T] \textit{ tal que para} \\ \textit{todo } a' \in V^\circ \textit{ es } \sum_I |\langle x_i, a'\rangle| \leqslant \alpha > 0, \textit{ en donde el} \\ \textit{escalar } \alpha \textit{ se entiende está fijado para cada} \\ \textit{entorno } U \end{array} \right\}$$

Evidentemente $l_I^1[E]$ con la topología ε es un espacio localmente convexo separado y si $E[T]$ es metrizable, también lo es $l_I^1[E]$ con la topología ε.

TEOREMA 4.

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado y sea I un conjunto infinito de índices. Entonces, que $E[T]$ sea tonelado no implica que $l_I^1[E]$, dotado con la topología inducida sobre él por la topología producto de $E^I = \prod_I E$, sea tonelado.

Demostración

Sea $E[T]$ un espacio de Fréchet y el conjunto de índices $I = N$, conjunto de los números naturales. Será pues E^I igual a $E^N = \{(x_n)_{n \in N} \mid (x_n)_{n \in N} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, sucesión de elementos de $E\}$. Consideremos sobre E^N la topología producto y para simplificar la notación hagamos $l_I^1[E] = F$. Evidentemente F es denso en E^N y $F \neq E^N$.

Si llamamos F_ε al espacio vectorial F con la topología ε (Definición 3), entonces F_ε es completo y por ser $E[T]$ metrizable, también F_ε ha de ser metrizable. Es decir, F_ε es un espacio de Fréchet. Designemos por F_1 al espacio vectorial F con la topología inducida por la de E^N y sea j la aplicación identidad,

$$j : F_1 \longrightarrow F_\varepsilon$$

la topología ε es más fina que la inducida sobre F por la topología producto de E^N, pues dado un entorno de cero cualquiera $U = \prod_{n \in N} V_n$ en E^N, ha de ser $V_n = E$ salvo un número finito de índices $n_1, n_2, \ldots, \ldots, n_p$. Si suponemos que $V_{n_1} = V_{n_2} = \ldots = V_{n_p} = V$ entorno equilibrado, convexo y cerrado de $E[T]$ es suficiente con considerar el entorno de cero de F_ε, $U_V = \{(x_n)_{n \in N} \mid (x_n)_{n \in N}$ sucesión en E; $\forall x' \in V^\circ : \sum_{n \in N} |\langle x_n, x' \rangle| \leq 1\}$ para que $U_V \subset U$. Luego la aplicación $j^{-1} : F_\varepsilon \to F_1$, inversa de la j, es continua y por tanto la gráfica de la aplicación j^{-1} es cerrada en $F_\varepsilon \times F_1$ lo cual implica que la gráfica de la aplicación j es cerrada en $F_1 \times F_\varepsilon$.

Consideremos el siguiente Teorema de Robertson-Robertson: «Si E_1 es un espacio tonelado, E_2 es un espacio de Pták y f es una aplicación lineal $f : E_1 \to E_2$ tal que la gráfica de f es cerrada en $E_1 \times E_2$, entonces f es continua».

Consideremos el teorema siguiente:

«Todo espacio de Fréchet es un espacio de Pták».

Si tenemos en cuenta todo lo anterior resulta que si F_1 fuese tonelado la aplicación j habría de ser continua y por serlo su inversa

j^{-1}, la topología inducida por la de E^N sobre F, habría de ser la misma que la topología ε, lo cual no ocurre puesto que por ser F denso en E^N y $F \neq E^N$, no es F_1 completo mientras que F_ε si lo es. Luego el espacio F_1 no es tonelado, c.q.d.

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado de espacio dual topológico E' de codimensión infinita en E^*. Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ una sucesión de elementos de E^* tales que para cualquier número natural n es $U_{n+1} \notin [E \cap \{u_1, u_2, \ldots u_n\}]$. En todo lo que sigue representaremos por T_S a la topología sobre E definida invariante por traslaciones y por el sistema fundamental de entornos de cero $\{V_i \cap \alpha \bigcap_{j=1}^{n} \{u_j\}^\circ\}_{i\in I,\, n\in N,\, \alpha\neq 0}$ en donde $\{V_i\}_{i\in I}$ es un sistema fundamental de entornos de cero de $E[T]$, y para cada número natural n representaremos por T_n a la topología sobre E definida invariante por traslaciones y por el sistema fundamental de entornos de cero $\{V_i \cap \alpha \bigcap_{j=1}^{n} \{u_j\}^\circ\}_{i\in I,\, \alpha\neq 0}$.

Es trivial que el espacio vectorial E con la topología T_S o bien con cualquiera de las topologías T_n, es un espacio localmente convexo separado y que el espacio dual topológico de $E[T_S]$ es $E_S' = [E \cup S]$ y el de $E[T_n]$ es $E_n' = [E \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$, para cada número natural n.

LEMA 1.

Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe una sucesión $f_2, f_3, f_5, \ldots, f_p, \ldots$, (en donde los subíndices son los números primos) en E^* tal que es $\sigma(E^*, E)$-acotada y $f_2 \notin E'$, $f_3 \notin [E' \cup \{f_2\}]$, $f_5 \notin [E' \cup \{f_2, f_3\}], \ldots$.

Demostración.

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes pertenecientes a E y tal que para cualquier número natural n es $\|e_n\| = 1$. Definimos para un número primo cualquiera p la aplicación f_p de la manera siguiente:

Si $n \in N$ y para todo $m \in N$ es $n \neq p^m$, entonces $f_p(e_n) = 0$.
Si $n \in N$ y existe $m \in N$ tal que es $n = p^m$, entonces $f_p(e_n) = m$
Si $F = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}]$ y $E = F \oplus G$ entonces para cualquier $x \in G$ definimos $f_p(x) = 0$.

Probemos que si $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ son números primos distintos todos entre sí, entonces para cualquier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ y para cualquier $f \in E'$ ocurre que

$$f_p \neq \lambda_1 f_{p_1} + \lambda_2 f_{p_2} + \ldots + \lambda_m f_{p_m} + f.$$

En efecto:

Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K, f \in E'$ existe $\alpha \in K$, $\alpha > 0$ tal que para todo número natural n es $|\langle e_n, f \rangle| \leq \alpha$. Por otra parte

$$\langle (\lambda_1 f_{p_1} + \lambda_2 f_{p_2} + \ldots . + \lambda_m f_{p_m}), e_{pr} \rangle = 0$$

Puesto que $\langle f_p, e_{pr} \rangle = r$, resulta pues que

$$f_p \neq \lambda_1 f_{p_1} + \lambda_2 f_{p_2} + \ldots . + \lambda_m f_{p_m} + f$$

Luego

$$f_2 \notin E', \ f_3 \notin [E' \cup \{f_2\}], \ f_5 \notin [E' \cup \{f_2, f_3\}], \ldots .$$

Probemos que la sucesión $f_2, f_3, f_5, \ldots, f_p, \ldots .$ es acotada en $E^* [\sigma (E^*, E)]$:

Si $x \in E$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$, $\lambda \in G$ tales que $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m + \lambda$. Para cualquier f_p tenemos que

$$|\langle x, f_p \rangle| \leqslant |\lambda_1| \cdot |\langle e_1, f_p \rangle| + \ldots + |\lambda_m| \cdot |\langle e_m, f_p \rangle| \leqslant |\lambda_1| \cdot m + \ldots + |\lambda_m| \cdot m$$

Si para simplificar hacemos $|\lambda_1| \cdot m + \ldots + |\lambda_m| \cdot m = q > 0$, entonces podemos asegurar que existe el número real $q > 0$ tal que para cualquier número primo p es $|\langle x, f_p \rangle| \leqslant q$, lo cual implica que $f_p \in q \cdot \{x\}^\circ$ y por tanto la sucesión $f_2, f_3, f_5, \ldots, f_p, \ldots$ es acotada en $E^* [\sigma (E^*, E)]$, c.q.d.

TEOREMA 5.

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado de espacio dual topológico E' de codimensión infinita en E^* y sea $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots\}$ una sucesión contenida en E^* tal que para cualquier número natural n es $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$. Entonces, que $E[T]$ sea tonelado no implica que $E[T_S]$ haya de ser tonelado.

Demostración.

Consideremos en primer lugar el siguiente conocido resultado:

Un espacio localmente convexo $E[T]$ es tonelado si y sólo si todo conjunto A contenido en su dual topológico E' que sea $\sigma(E', E)$-

acotado, ha de ser equicontinuo. En segundo lugar demostraremos que el espacio $E[T_S]$ es tonelado si y solamente si para todo conjunto B contenido en E_S', dual topológico de $E[T_S]$, que sea $\sigma(E_S', E)$-acotado, existe un número natural n tal que B está contenido en E_n', dual topológico del espacio $E[T_n]$. En efecto:

Si para cualquier conjunto B contenido en E_S' que sea $\sigma(E_S', E)$-acotado, existe un número natural n tal que B está contenido en E_n', evidentemente B ha de ser $\sigma(E_n', E)$-acotado.

De acuerdo con (3) y puesto que por hipótesis el espacio $E[T]$ es tonelado, resulta que para cualquier número natural n el espacio $E[T_n]$ ha de ser también tonelado. Recordando la propiedad considerada en primer lugar, tenemos pues que B es un conjunto equicontinuo de $E[T_n]$. Luego la polar de B en E es un entorno de cero del espacio $E[T_n]$ y por consiguiente también es un entorno de cero de $E[T_S]$ lo cual implica que B es equicontinuo en E_S' y recordando otra vez el resultado considerado en primer lugar, tenemos pues que el espacio $E[T_S]$ es tonelado. Reciprocamente, si el espacio $E[T_S]$ es tonelado y B es un conjunto $\sigma(E_S', E)$-acotado en E_S', entonces la polar B° de B en E es un entorno de cero del espacio $E[T_S]$, lo cual implica que existe algún número natural n, algún entorno de cero V de $E[T]$ y algún escalar $\alpha \neq 0$ tales que $V \cap \alpha\{u_1\}^\circ \cap \ldots$ $\ldots \cap \alpha\{u_n\}^\circ \subset B^\circ$, de donde se deduce que B° es un entorno de cero de $E[T_n]$ y por tanto B es equicontinuo del espacio $E[T_n]$ por lo que B está contenido en E_n'.

En tercer lugar supongamos que la sucesión $\{u_1 u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ de las formas lineales que consideramos en E^* tal que para todo número natural n es $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$, cumple la condición de ser un conjunto $\sigma(E_S', E)$-acotado, lo cual es posible en virtud del Lema 1. Evidentemente para todo número natural n el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ no está contenido en E_n', por lo que, sin más que considerar lo demostrado en segundo lugar, resulta que el espacio $E[T_S]$ no es tonelado c.q.d.

LEMA 2.

Existe algún espacio localmente convexo separado bornológico $E[T]$ *tal que hay una sucesión* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, *contenida en* E^* *que cumple la condición de que para todo número natural* n *es* $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$ *y tal que existe un sistema fundamental de acotados* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, *del espacio localmente convexo separado* $E[T_S]$.

Demostración.

Sea $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, una sucesión de espacios de Banach tales que cada uno de ellos es un subespacio de codimensión infinita del siguiente y también cada uno de ellos induce sobre el anterior la misma topología que sobre éste estaba definida. Sea $E[T]$ el espacio localmente convexo límite inductivo estricto de la sucesión anterior. Por lo tanto el espacio $E[T]$ es bornológico.

Para cada número natural n sea B_n una cobase normalizada de E_n en E_{n+1} y sea $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,p}, \ldots$, una sucesión contenida en B_n. Sea B una base de Hamel de E, extensión del conjunto linealmente independiente $\bigcup_{n \in N} B_n$. Para cada número natural n sea u_n una forma lineal definida sobre E de la manera siguiente:

$$u_n(x_{n,1}) = 1, \ u_n \ (x_{n,2},) = 2, \ldots, \ u_n \ (x_{n,p}) = p, \ldots;$$

si $x \in B$ y $x \notin [\{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,p}, \ldots\}]$ entoncex $u_n(x) = 0$. Evidentemente la sucesión $S = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ está constituida por formas lineales tales que para todo número natural n, se verifica que $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$, en donde E' es el espacio dual topológico de $E[T]$. Si para cada n llamamos V_n a la bola unidad cerrada en E_n, es evidente que existen unos números naturales $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$, tales que:

$$V_1 \subset \lambda_2 V_2 \subset \lambda_3 V_3 \subset \ldots \subset \lambda_n V_n \subset \ldots$$

Veamos que el conjunto

$$\{n \lambda_n \ (V_n \cap [\bigcap_{m \in N} \{u_m\}^\circ])\}_{n \in N}$$

es un sistema fundamental de acotados en el espacio $E[T_S]$:

Evidentemente todo conjunto de la forma

$$n \lambda_n (V_n \bigcap_{m \in N} \{u_m{}^\circ\})$$

es un acotado del espacio $E[T_S]$. Por otra parte consideremos que para todo número natural n se verifica la relación:

$$E_n \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \{u_i\}^\circ) = E_n \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \{u_i\}^\circ) \qquad (*),$$

pues es evidente que para cualquier n es

$$E_n \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \{u_i\}^\circ) \subset E_n \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \{u_i\}^\circ)$$

y, por otra parte, considerando que para toda pareja de números naturales n y m tales que cumplan la relación $n < m$ es $u_m(x) = 0$ para todo vector $x \in E_n$, tenemos también que

$$E_n \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \{u_i\}^\circ) \subset E_n \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \{u_i\}^\circ)$$

Si A es un acotado cualquiera en $E[T_S]$, entonces A también es acotado en $E[T]$ y por tanto, existe un número natural n tal que $A \subset E_n$ y A es acotado en $E_n[T_n]$. Luego existe algún número natural m tal que $A \subset m \cdot V_n$. Si hacemos ahora $p = sup. \{n, m\}$ es $m \cdot V_n \subset m \cdot \lambda_n \cdot V_n \subset p \cdot \lambda_p \cdot V_p$, de donde $A \subset p \cdot \lambda_p \cdot V_p$. Por otra parte, puesto que A es acotado en $E[T_S]$, existe algún número natural α tal que $A \subset \alpha \bigcap_{i=1}^{p} \{u_i\}^\circ$ y en virtud de la igualdad (*) se verifican las relaciones

$$A \subset \alpha (\bigcap_{i=1}^{p} \{u_i\}^\circ \cap E_p) = \alpha (\bigcap_{i=1}^{\infty} \{u_i\}^\circ \cap E_p).$$

Luego si hacemos $q = sup. \{p, \alpha\}$, entonces

$$A \subset q \lambda_q (V_q \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \{u_i\}^\circ)),$$

lo cual termina por probar que el conjunto

$$\{n \lambda_n (V_n \cap (\bigcap_{n \in N} \{u_n\}^\circ))\}_{n \in N}$$

es un sistema fundamental de acotados del espacio $E[T_S]$.

TEOREMA 6

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado de espacio dual topológico E' y sea $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots\}$ una sucesión de formas lineales no continuas definidas sobre E tales que para todo número natural n es $U_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$. Entonces, que $E[T]$ sea bornológico no implica que $E[T_S]$ haya de ser bornológico.

Demostración.

Supongamos que en el espacio $E[T_S)$ existe un sistema fundamental de acotados $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, lo cual sabemos que es posible en virtud del Lema 2. En primer lugar probaremos que si A es un conjunto de acotado en el espacio $E[T_S]$, entonces para todo número natural n es $A^\circ \not\subset E_n' = [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$.

En efecto:

A es un conjunto acotado en $E[T_S]$. Luego para todo número natural n existe algún escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda A \subset \{u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\}^\circ$, por lo que $\lambda\{u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\}^{\circ\circ} \subset A^\circ$, de donde $\lambda \cdot u_{n+1} \in A^\circ$. Se verifica pues que $A^\circ \not\subset E_n'$ y por tanto ocurre que para todo número natural n es $A_1{}^\circ \not\subset E_n'$ lo cual implica que existeun a sucesión de formas lineales definidas sobre E y contenidas en $A_1{}^\circ$: $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}, \ldots$, tales que para todo número natural n es $f_{1n} \in E_n'$, $f_{1n} \notin E'_{n-1}$. Para cada número natural n consideremos el acotado A_n del sistema fundamental dado y la sucesión correspondiente $f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{np}, \ldots$, contenida en $A_n{}^\circ$ tal que para cualquier natural p es $f_{np} \in E_p'$, $f_{np} \in E'_{p-1}$. Tenemos de este modo una sucesión de sucesiones

$$
\begin{array}{l}
f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}, \ldots\ldots \\
f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n}, \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{nn}, \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Consideremos la sucesión diagonal $f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}, \ldots\ldots$
Ocurrirá que para cualquier natural n es $f_{nn} \in E_n'$, $f_{nn} \in E'_{n-1}$.
Es por tanto, evidentemente, la sucesión diagonal $f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}, \ldots$, un conjunto linealmente independiente. Veamos que para cualquier natural n es $E_n' = [E' \cup \{f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}\}]$:

Puesto que $f_{11} \in E_1'$, $f_{11} \notin E'$, ha de ocurrir que $f_{11} = \alpha \cdot u_1 + x'$ en donde α es un escalar distinto de cero y $x' \in E'$. Luego $u_1 = \dfrac{1}{\alpha} f_{11} - \dfrac{1}{\alpha} x'$ y por tanto $E_1' \subset [E' \cap \{f_{11}\}]$.

Como $f_{11} \in E_1'$, será pues $E_1' = [E' \cup \{f_{11}\}]$.

Hemos demostrado lo que nos proponíamos para $n = 1$. Hacemos ahora la hipótesis de inducción dando por bueno que para $n = p$ es $E_p' = [E' \cup \{f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{pp}\}]$ y demostraremos que esta relación sigue siendo cierta para $n = p + 1$:

Puesto que

$$f_{p+1,\,p+1} \in E'_{p+1},\ f_{p+1,\,p+1} \notin E_p'$$

tenemos que $f_{p+1,\,p+1} = \lambda \cdot u_{p+1} + y'$ con $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, $\lambda' \in E_p'$.

Luego

$$u_{p+1} = \frac{1}{\lambda} f_{p+1,\, p+1} - \frac{1}{\lambda} y'$$

y de aquí

$$u_{p+1} \in [E_p' \cup \{f_{p+1,\, p+1}\}].$$

Por ser $f_{p+1,\, p+1} \in E'_{p+1}$, tenemos la igualdad

$$E'_{p+1} = [E_p' \cup \{f_{p+1,\, p+1}\}]$$

y considerando la hipótesis de inducción es

$$E'_{p+1} = [E' \cup \{f_{1,1}, f_{2,2}, \ldots , f_{p,p}, f_{p+1,\, p+1}\}].$$

Queda demostrado pues que para cualquier número natural n es cierta la relación

$$E_n' = [E' \cup \{f_{11}, f_{22}, \ldots , f_{nn}\}]$$

Como además para todo número natural n es $f_{nn} \in E_n'$, $f_{nn} \notin E'_{n-1}$, ocurre que podemos sustituir el sistema fundamental de entornos de cero,

$$\{W_i \cap (\alpha \bigcap_{j=1}^{n} \{u_j\}^{\circ})\}_{i \in I,\, n \in N,\, \alpha \neq 0}$$

de la topología T_S, inicialmente dado, por el

$$\{W_i \cap (\alpha \bigcap_{j=1}^{n} \{f_{jj}\}^{\circ})\}_{i \in I,\, n \in N,\, \alpha \neq 0}$$

ya que éste define la misma topología.

Hechas las consideraciones anteriores y puesto que para cualquier $n \in N$ el conjunto $\{f_{nn}, f_{+1,\, n+1}, \ldots\}$ está contenido en A_n°, tenemos que para cualquier $n \in N$ la bipolar $A_n^{\circ\circ}$ de A_n, está contenida en $\{f_{nn}, f_{n+1,\, n+1}, \ldots\}^{\circ}$, lo cual implica que existe algún escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \cdot A_n$ está contenido en el conjunto $\{f_{11}, f_{22}, \ldots , f_{nn}, \ldots\}^{\circ}$. Luego para cualquier conjunto A contenido en E que sea acotado en $E[T_S]$ existe algún escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \cdot A$ está contenido en $\{f_{11}, f_{22}, \ldots , f_{nn}, \ldots\}^{\circ}$. Es pues $\{f_{11}, f_{22}, \ldots , f_{nn}, \ldots\}^{\circ}$ bornívoro en $E[T_S]$ y además es equilibrado y convexo, evidentemente; como por otra parte, $\{f_{11}, f_{22}, \ldots , f_{nn}, \ldots\}^{\circ}$ no es entorno de cero de $E[T_S]$, resulta en definitiva que $E[T_S]$ no es bornológico, c.q.d.

Corolario 6.1

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado de espacio dual topológico E' y sea $S = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ una sucesión contenida en E^* tal que para todo $n \in N$ es $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}]$. Entonces, que el espacio $E[T]$ sea casi-tonelado, no implica que el espacio $E[T_S]$ sea casi-tonelado.

Demostración.

En la demostración del Teorema 6 hemos visto que el conjunto $\{f_{11}, f_{22}, \dots, f_{nn}, \dots\}^\circ$ es bornívoro, equilibrado y convexo, pero no es entorno de cero en $E[T_S]$.

Considerando que dicho conjunto es además $\sigma(E_S', E)$-cerrado, tenemos que es un tonel bornívoro. Hay pues en el espacio $E[T_S]$ un tonel bornívoro que no es entorno de cero y por tanto $E[T_S]$ no es casi-tonelado, c.q.d.

Teorema 7.

Sea $E[T]$ un espacio localmente convexo separado de espacio dual topológico E' y sea $S = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ una sucesión de formas lineales definidas sobre E, tales que para todo $n \in N$ es $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}]$. Entonces, que $E[T]$ sea ω-tonelado no implica que $E[T_S]$ sea ω-tonelado.

Demostración.

Consideremos el espacio ω-tonelado $E[T]$ consistente en el espacio de Banach mencionado en el Lema 1. Existe pues una sucesión $S = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ de formas lineales no continuas definidas sobre E tales que para cualquier $n \in N$ es $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}]$ y tal que el conjunto S es $\sigma(E_S', E)$-acotado. Si demostramos que S no es un conjunto equicontinuo con respecto al espacio $E[T_S]$, puesto que S es numerable, habremos probado que $E[T_S]$ no es ω-tonelado. Probemos pues que S no es equicontinuo de $E[T_S]$.

Si S fuese un conjunto equicontinuo del espacio $E[T_S]$, entonces su polar S° sería un entorno de cero de $E[T_S]$ y por tanto existiría algún entorno de cero V del espacio $E[T]$, existiría $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ y algún $n \in N$ tales que

$$V \cap (\alpha \bigcap_{j=1}^{n} \{u_j\}^\circ) \subset S^\circ$$

lo cual implicaría que S° fuese un entorno de cero de $E[T_n]$. Luego $S^{\circ\circ}$ sería un equicontinuo de $E[T_n]$ y por tanto S estaría contenido en $E_n' = [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$, dual topológico de $E[T_n]$, en contradicción con la definición de la sucesión S.

Queda probado pues, que la sucesión S, en cuanto conjunto, no es un equicontinuo del espacio $E[T_S]$ y por tanto este no es ω-tonelado, c.q.d.

TEOREMA 8.

Si $E[T]$ es un espacio localmente convexo separado de espacio dual topológico E' de codimensión infinita en E^* y S es una sucesión $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, de formas lineales definidas sobre E tales que para todo $n \in N$ es $u_{n+1} \notin [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$; entonces, que el espacio $E[T]$ sea ω-casi-tonelado, no implica que el espacio $E[T_S]$ sea ω-casi-tonelado.

Demostración.

Consideremos que el espacio $E[T]$ es el bornológico del Teorema 6. Por lo tanto $E[T]$ es también ω-casi-tonelado. Consideremos la sucesión $S = \{f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}, \ldots\}$ de la demostración del Teorema 6 y recordemos que, en la referida demostración, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, era un sistema fundamental de acotados de $E[T_S]$ y que para cada $n \in N$ el conjunto $\{f_{nn}, f_{n+1,\, n+1}, \ldots\}$ está contenido en A_n° polar de A_n en E^*. Luego para cada $n \in N$ existe algún escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda S \subset A_n^{\circ}$. Por otra parte, para cualquier conjunto A que sea T_S-acotado en E existe algún $n \in N$ tal que A está contenido en A_n, lo cual implica que $A_n^{\circ} \subset A^{\circ}$ y por tanto, también $\lambda S \subset A^{\circ}$. Es pues S un conjunto acotado en el espacio $E_S'[\beta(E_S', E)]$ y como evidentemente S es numerable y no es equicontinuo, el espacio $E[T_S]$ no puede ser ω-casi-tonelado, c.q.d.

TEOREMA 9.

Si $E[T]$ es un espacio localmente convexo separado de espacio dual topológico E' de codimensión infinita en E^* y si S es el conjunto de elementos de la sucesión $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, de formas lineales definidas sobre E, tales que para todo $n \in N$ es $u_{n+1} \in [E' \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$, entonces que T sea la topología $\tau(E, E')$, no implica que haya de ser $T_S = \tau(E, E_S')$.

Demostración.

Sea $E = \coprod_{n \in N} E_n$; es decir, E es el espacio vectorial suma externa directa de la sucesión de espacios vectoriales $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Para todo $n \in N$, sea $E_n = R$, cuerpo de los números reales, y consideremos el conjunto S de todas las formas lineales de la sucesión $f_2, f_3, f_5, f_7, f_{11}, f_{13}, \ldots, f_p, \ldots$, definidas sobre E de la manera siguiente:

Si «p» es un número primo cualquiera, n es un número natural cualquiera, $m = p^n$ y $e_m = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in E$, entonces $f_p(e_m) = 1$; si p es un número primo cualquiera m es un número natural cualquiera tal que para todo número natural n se verifica que $m \neq p^n$, entonces $f_p(e_m) = 0$. Sea G un subespacio vectorial de E^* tal que $G \oplus [S] = E^*$; es decir: E^* es la suma algebraica directa de G y $[S]$, envoltura lineal de S. Supongamos que G contiene a la sucesión $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, en donde para una pareja cualquiera de números naturales n y m, definimos que $g_n(e_m) = \delta_{m,n}$, entendiendo que si $n = m$ entonces $\delta_{n,m} = 1$ y si $n \neq m$ entonces $\delta_{n,m} = 0$.

Lo dicho anteriormente es consistente puesto que para cada número natural n ocurre evidentemente que $g_{n+1} \notin \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} + [S]$.

Queremos probar que G es denso en $E^*[\sigma(E^*, E)]$ para lo cual consideramos que si E es un espacio vectorial, E^* su dual, $B = \{v_i\}_{i \in I}$ una base de E y G un subespacio vectorial de E^*, entonces la condición necesaria y suficiente para que G sea denso en E^* $[\sigma(E^*, E)]$ es que para todo $\psi \in E^*$, para todo conjunto finito de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, perteneciente a la base B y para todo número real $\varepsilon > 0$, existe algún elemento $g \in G$ tal que $g \, \varepsilon \, \psi + \varepsilon(\{v_1\}^\circ \cap \ldots, \cup \{v_n\}^\circ)$. De acuerdo pues con el conocido resultado acabado de enunciar para probar lo que queremos es suficiente con demostrar que dado un elemento cualquiera $\psi \in E^*$, dado un número finito cualquiera n de vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de la base B constituida por los vectores,

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots\ldots\ldots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots\ldots\ldots)$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots\ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y dado un número real cualquiera $\varepsilon > 0$, existe algún elemento $g \in G$ tal que $g \in \psi + \varepsilon (\{e_1\}^\circ \cap \ldots \cap \{e_n\}^\circ)$. Veamos pues que tal cosa se verifica:

Sea $\psi(e_1) = \alpha_1, \ldots, \psi(e_n) = \alpha_n$ y sea $g = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_n$. Luego $(g - \psi)(e_1) = 0, \ldots, (g - \psi)(e_n) = 0$. Dado, pues, un número real cualquiera $\varepsilon > 0$, ha de ser $g \varepsilon \psi + \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} \{e_i\}^\circ$ y por tanto G es denso en el espacio $E^* [\sigma (E^*, E)]$. Pero tal cosa implica que si un espacio localmente convexo E tiene por espacio dual topológico a G, entonces es un espacio localmente convexo separado. Pues bien, consideremos sobre E la topología $T = \tau(E, G)$ de Mackey de espacio dual topológico G. Veamos que el conjunto $S = \{f_2, f_3, f_5, \ldots, f_p, \ldots\}$ es $\sigma(E^*, E)$-acotado:

Dado un vector cualquiera $x \in E$, sea $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ puesto en función de la base $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ del espacio E, antes definida. Entonces, para todo número primo $p > n$ se verfica que $f_p(x) = 0$ y de aquí que existe algún escalar $\alpha \neq 0$ tal que para cualquier forma lineal $f_q \in S$ ha de ser $\alpha \cdot f_q \in \{x\}^\circ$ y por tanto S es un conjunto $\sigma(E^*, E)$-acotado. Si consideramos que en R todo conjunto cerrado y acotado es compacto, que por el Teorema de Tychonoff tal propiedad también ocurre en R^N con la topología producto, y que R^N con la topología producto es algebraica y topológicamente isomorfo con $E^* [\sigma(E^*, E)]$, tenemos que $S^{\circ\circ}$, bipolar de S, es un conjunto equilibrado, convexo y $\sigma(E^*, E)$-compacto. Por otra parte si S fuese un conjunto equicontinuo del espacio $E[T_S]$, existiría un conjunto finito $\{f_2, f_3, \ldots, f_p\}$ tal que $S \subset [G \cup \{f_2, f_3, \ldots, f_p\}]$. Si q es cualquier número primo mayor que p, habría de ser pues $f_q = x' + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_p f_p$ con $x' \in G$. Como $E^* = G \oplus [S]$, sería pues x' la aplicación nula y por tanto $f_q = \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_p f_p$, lo cual es claro que no se verifica. Luego S no es un conjunto equicontinuo del espacio $E[T_S]$, lo cual junto con lo antes visto, implica que la topología T_S no es de Mackey c.q.d.

Teorema 10

Si $E[T]$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable de espacio dual topológico E' y si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\} = S \subset E^*$, tal que para todo $n \in N$ es $u_{n+1} \notin E' \oplus [\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}]$, *siendo* $E' \cap S = \Phi$, *entonces la topología* T_S *correspondiente es tal que el espacio* $E[T_S]$ *es vectorial topológico localmente convexo separado bornológico.*

Demostración.

Trivial.

BIBLIOGRAFIA

(1) BOURBAKI, N. *Espaces Vectoriels Topologiques,* Chapitres I, II, III, IV, y V.

(2) DE WILDE, M. and HOUET, G. *On some permanence properties in topological vector spaces* (Por aparecer).

(3) DE WILDE, M. and SCHMETS, J. *Locally convex topologies strictly fine than a given topology and preserving barrelledness or similar properties.* Bulletin de la Societé Royale des Sciences de Liége, 1972.

(4) DIEUDONNE, J. *Sur les propiétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques.* Ann. Soc. Pol. Math., 25, (1952), pp. 50-55.

(5) HORVATH, J. *Topological Vector Spaces and Distributions, I.* Addison-Wesley, 1966.

(6) KOTHE, G. *Topological Vector Spaces I.* Springer-Verlang-Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

(7) KELLEY, J. L. *and Namioka, I. Lineal Topological Spaces.* New York-London-Toronto, 1963.

(8) PIETSCH, A. *Nuclear Locally Convex Spaces.* Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

(9) SAXON, L. and LEVIN, M. *Every countable-codimensional subspace of a barrelled space is barrelled.* Proc. Amer. Math. Soc. 29, 91-96, 1971.

(10) VALDIVIA, M. *A hereditary property in locally convex spaces,* Ann. Inst. Fourier, 21, 1-2 (1971).