SINGULARIDADES UNIDIMENSIONALES DE UNA SUPERFICIE ALGEBRAICA

por

EDUARDO CASAS ALVERO

INTRODUCCION

Las singularidades de una variedad algebraica proyectiva V constituyen un fenómeno estrechamente ligado a la multiplicidad de intersección de V con otras variedades algebraicas. Nos proponemos realizar aqui un análisis de las singularidades unidimensionales de superficie basado en su comportamiento respecto de la multiplicidad de intersección. De hecho este es el punto de vista que inspira el análisis de singularidades de curva: la propiedad esencial de los puntos infinitamente próximos radica en su aparición en la fórmula de Noether para la multiplicidad de intersección, independientemente de su definición por medio de transformaciones cuadráticas (Noether) o directamente por abstracción, basándose en tal propiedad, según Halphen-Enriques ([2] libro 4.º caps. II y I, respectivamente); Severi ([9], pág. 322) y Van der Waerden [10] son especialmente claros al respecto.

En nuestro caso las curvas infinitamente próximas se definirán por medio de transformaciones monoidales y la singularidad de una superficie a lo largo de una curva múltiple se analizará en términos de las curvas infinitamente próximas a esta sobre la superficie, con resultados muy similares a los que se obtienen para puntos múltiples de curva plana.

Nuestro análisis se referirá únicamente a curvas múltiples de una superficie inmersa en una variedad ambiente de dimensión tres pero las definiciones y resultados se generalizan sin ninguna dificultad a singularidades n-2-dimensionales de hipersuperficies de una variedad ambiente de dimensión n (no singular en un punto genérico de la singularidad).

A lo largo de toda la memoria se supendrán las variedades algebraicas proyectivas y definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

CAPITULO I. CURVAS INFINITAMENTE PROXIMAS

1. — *Equivalencia de singularidades*

Sean V_3 una variedad algebraica irreducible de dimensión tres, C una curva irreducible y simple de V_3 y S_1, S_2 dos superficies de V_3 que contienen a C. Si $\Phi : V_3 \rightarrow W_3$ es una transformación birracional regular en un punto genérico de C, es bien sabido que la multiplicidad de intersección de S_1 y S_2 a lo largo de C coincide con la de sus transformadas a lo largo de $\Phi(C)$; por ello consideraremos como equivalentes la singularidad de una superficie a lo largo de C y la de su transformada a lo largo de $\Phi(C)$; todas las nociones que se introduzcan se entenderán definidas salvo una equivalencia de este tipo. Conviene recordar que Φ induce isomorfismo entre el anillo local de C en V_3 y el de $\Phi(C)$ en W_3 asi como también, si S es una superficie que pasa por C, resultan isomorfos vía Φ, el anillo local de C en S y el de $\Phi(C)$ en $\Phi(S)$.

2. — *Las transformaciones monoidales*

Sea θ el anillo local de C en V_3, i. *e.*, el anillo de las funciones racionales de V_3 regulares en algún punto de C. Es bien sabido que θ es un anillo local regular de dimensión dos, su ideal maximal m lo forman las funciones identicamente nulas en C y su cuerpo residual es el cuerpo de funciones racionales de C al que designaremos por $K = k(C)$.

Considerada V_3 como esquema, sea p el punto genérico de C en V_3, si U es un abierto afin de V_3 que corta a C, p corresponde al ideal de las funciones regulares en U y nulas en $U \cap C$; el anillo local de V_3 en P es el de C en V_3.

Sea I un haz de ideales coherente de V_3 cuya fibra en p sea el ideal maximal de θ (1). Designaremos por T a la dilatación monoidal de V_3 centrada en I según la definición de [3], cap. II, § 8; V_3' será

(1) En particular, representada C como intersección parcial de dos superficies S_1, S_2 (i. e., C es componente simple de $S_1 \cap S_2$), puede tomarse I como el haz de ideales de la intersección completa $S_1 \cap S_2$.

la transformada de V_3 por T, $V_3' = proj \bigoplus_{n \geq 0} I^n$, y π la correspondencia inversa de T que es un morfismo exahustivo de esquemas $\pi : V_3' \to V_3$ (2).

Veremos a continuación que la acción de T en un entorno del punto genérico de C es independiente de la elección de I. Sea U' un entorno afín cualquiera de p en V_3, A' el anillo de las funciones racionales regulares en U' ; designemos por p' el ideal de A' correspondiente a C y por I' el ideal $I(U')$. Por ser θ regular de dimensión dos y $\theta = A'_{p'}$, podemos elegir en A' un sistema de dos generadores x, y del ideal $m = p' A'_{p'}$ y considerar también el ideal $(x, y) \subset A'$. Dado que al localizar en p', $(x, y) A'_{p'} = I' A'_{p'} = m$, $p' = m \cap A'$ es una componente primaria aislada de los ideales (x, y), I' ; sea g un elemento de A' no perteneciente a p' y elegido en la intersección de las restantes componentes primarias de (x, y) e I' ($g = 1$ de no existir tales componentes); sea U el abierto afín de los puntos de U' donde no se anula g, $U = D(g) \subset U'$, el anillo afín correspondiente es $A = A'_g$ y en tal anillo coinciden los ideales $I(U) = I'A$, $(x, y) A$ y el correspondiente a C, $p = p'A = m \cap A$.

Atendamos ahora a la acción de T en U: de la propia definición de T resulta que $\pi^{-1}(U)$ es el espectro homogéneo $\pi^{-1}(U) = proj \bigoplus_{n \geq 0} I(U)^n$ y teniendo en cuenta que $I(U)$ está generado por x, y, $\pi^{-1}(U)$ viene recubierto por los abiertos afines $spec\, A[x/y]$, $spec\, A[y/x]$ de manera que las restricciones de π a tales abiertos vienen inducidas por las inclusiones $A \to A[x/y]$, $A \to A[y/x]$. Ello permite sumergir $\pi^{-1}(U)$ en el producto de U por una recta proyectiva, $U \times P_1$ de manera que π coincida con la restricción de la proyección sobre el primer factor. Con esta inmersión, si u es un punto de $U - C$, $T(u) = (u ; x(u), y(u))$; la transformación resulta desde luego indeterminada en los puntos de $C \cap U$ ya que en ellos se anulan simultaneamente x e y, $C \cap U$ se transforma en el producto $(C \cap U) \times P_1$.

Resulta asi que, independientemente de la elección de I, la variedad transformada V_3' es birracionalmente equivalente a una subvariedad de $V_3 \times P_1$ por una transformación $\Psi : V_3' \to V_3 \times P_1$ que induce isomorfismo en la antiimagen por π de un entorno afín del punto genérico de C: las antiimagenes por π de un punto genérico de C describen una única componente de $\pi^{-1}(C)$ a la que designaremos por $T(C)$. A traves de Ψ, $T(C)$ es birracionalmente equivalente

(2) V_3' es una variedad proyectiva, [1] cap. I, § 3.

a la superficie reglada de base C, $C \times P_1$, de manera que las fibras de los puntos de C se transforman en las generatrices correspondientes; los puntos de la reglada en los que esta última transformación no es regular se hallan sobre un número finito de generatrices ya que $C - U$ consta de un número finito de puntos.

3. — *Entornos de C en V_3*

Definición: llamaremos curvas en el primer entorno de C en V_3 a las curvas irreducibles no generatrices de la reglada $C \times P_1$ o, también, a sus correspondientes en $T(C)$. Cada una de ellas se considerará dotada de la transformación racional en C que proviene de la proyección sobre el primer factor o de π. Las curvas en el primer entorno de C en V_3, con sus transformaciones racionales en C, quedan así definidas salvo equivalencia birracional; en este sentido la definición es independiente de la elección de I. Por otra parte es obvio que la definición respeta el punto de vista del § 1: una transformación birracional regular en un punto de C lo es en un entorno afín del punto genérico de C y las curvas en el primer entorno de la transformada de C forman una superficie en las mismas condiciones que $T(C)$ respecto de $C \times P_1$.

PROPOSICIÓN I.1. *Cada curva del primer entorno de C en V_3, considerada en V_3', es simple.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C_1 \subset V_3'$ una curva en el primer entorno de C; por definición C_1 debe cortar a uno de los dos abiertos afines *spec* $A[x/y]$, *spec* $A[y/x]$ que recubren $\pi^{-1}(U)$; si suponemos, por ejemplo, que corta al segundo, a C_1 le corresponde un ideal primo de altura dos, $p_1 \subset A[y/x]$ con $p_1 \cap A = p$ ya que $\pi(C_1) = C$. Bastará probar que el anillo local de C_1 en V_3', $A[y/x]_{p_1}$ es regular, es decir, que el ideal $p_1 A[y/x]_{p_1}$ admite un sistema de dos generadores. Sea $\Sigma = A[y/x] - p_1$, obviamente $\Sigma \supset A - p$ y por ello $\Sigma^{-1} A[y/x] = \Sigma^{-1} \theta[y/x]$; considerando ahora el anillo cociente

$$A[y/x]_{p_1} / p A[y/x]_{p_1} = \Sigma^{-1} (\theta[y/x] / p\, \theta[y/x])$$

, es un localizado de la extensión de $K = \theta/m$ por la clase al cociente de y/x y por ello un anillo de ideales principales. Si G es un elemento de $A[y/x]_{p_1}$ cuya imagen en el anillo cociente engendra la imagen del ideal $p_1 A[y/x)]_{p_1}$, dado que este último ideal contiene a $pA[y/x]_{p_1}$, resulta

$$p_1 A[y/x]_{p_1} = (G) + pA[y/x]_{p_1} = (G) + (x)$$

Observación. Si $\theta_1 = A[y/x]_{p_1}$ es el anillo local de C_1 en V_3' en la demostración anterior resulta en particular que C_1 es simple en $T(C)$ ya que la ecuación x de $T(C)$ en el punto genérico de C_1 forma parte de un sistema de generadores del ideal maximal de θ_1. Se observa también que $\theta[y/x]/p\,\theta[y/x]$, extensión de K por la clase de y/x, es un anillo de polinomios ya que su localizado $\theta_1/(x)$ es de dimensión uno; G puede elegirse en $\theta[y/x]$ y entonces su clase módulo (x) es un polinomio irreducible de grado igual al de la extensión $K \to k(C_1) = \theta_1/(x, G)$.

Podemos proceder ahora por inducción:

Definición: las curvas en el enésimo entorno de C en V_3 serán las curvas del primer entorno de alguna del $(n-1)$-entorno de C en V_3; cada una de ellas está dotada de una transformación racional en una del $(n-1)$-entorno y, por composición, de una transformación racional en C.

A las curvas de los entornos de C en V_3 las llamaremos también curvas infinitamente próximas a C en V_3. Cada una de ellas se halla en una variedad que se proyecta birracionalmente en V_3 de modo que tal variedad, la curva infinitamente próxima y la proyección, están determinadas salvo una transformación birracional regular en el punto genérico de la curva infinitamente próxima.

Si C_i es una curva en el iésimo entorno de C y C_{i+j} una curva en el j-ésimo entorno de C_i (y por tanto en el entorno $i+j$ de C), llamaremos grado de C_{i+j} sobre C_i al grado de la transformación racional de C_{i+j} en C_i y lo designaremos por $[C_{i+j} : C_i]$; en otras palabras, el cuerpo de funciones racionales de C_i se identifica, por la transformación racional, a un subcuerpo del de funciones racionales de C_{i+j} y, por definición, $[C_{i+j} : C_i] = [k(C_{i+j}) : k(C_i)]$. En particular llamaremos grado de una curva infinitamente próxima a C a su grado sobre C.

4. — Entornos de C en una superficie

Sea S una superficie irreducible de V_3 que contenga a C. Dado que el punto genérico de C es un punto simple de V_3, existe un entorno afín del mismo en el que el ideal de S es principal; cortando este entorno con el entorno afín U elegido en el § 2, podemos suponer fijado un entorno afín del punto genérico de C, al que seguiremos llamando U, en el que el ideal de S es principal y T actua en la forma descrita en el § 3 del que mantendremos las notaciones.

Sea F la base del ideal de S en U, $F \in m$ y si suponemos $F \in m^r - m^{r+1}$ (i. e., C es r-uple en S), F se expresa en la forma $F = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i y^{r-i}$ donde alguno de los a_i es no nulo módulo m; efectuando, si es necesario, una sustitución lineal a coeficientes constantes de los generadores x, y, podemos suponer que a_0 y a_r son no nulos módulo m o, equivalentemente, que en la forma inicial de F en θ son no nulos los términos en $\bar{x}^r$, $\bar{y}^r$.

F es irreducible en θ pero factoriza en la forma $F = F' x^r$ en $\theta[y/x]$; el factor x^r corresponde a la superficie $T(C)$ que aparece como componente *r-uple* de $\pi^{-1}(S)$ mientras que para el primer factor tenemos:

Proposición I. 2. *$F' = F/x^r$ engendra un ideal primo de $\theta[y/x]$.*

Demostración: Se observa en primer lugar que x no es múltiplo de F en θ, por la presencia del término y^r en la forma inicial de F; en consecuencia podemos considerar la restricción a $\theta[y/x]$ del morfismo canónico de $\theta_{(F)}$ en el cuerpo de fracciones de $\theta/(F)$, resultando un epimorfismo $\psi : \theta[y/x] \to (\theta/(F))[\tilde{y}/\tilde{x}]$ designando por $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ las clases de x, y módulo (F). El núcleo de ψ será un ideal primo al que obviamente pertenece F y por ello también F'; probaremos ahora que *ker* $\psi = (F')$: si $\psi(f) = 0$ para un cierto $f \varepsilon \theta[y/x]$, escribamos $f = f_s/x^s$ con $f_s \varepsilon m^s$ y tendremos $\psi(f_s) = 0$; teniendo en cuenta que $f_s \varepsilon \theta, f_s = b F, b \varepsilon \theta$; por ser θ regular y $F \varepsilon m^r - m^{r+1}$, necesariamente $b \varepsilon m^{s-r}$ y podemos escribir

$$f = \frac{f_s}{x^s} = \frac{F}{x^r} \cdot \frac{b}{x^{s-r}} = F' \cdot \frac{b}{x^{s-r}}$$

con $b/x^{s-r} \in \theta[y/x]$.

Sabido ya que el ideal engendrado por F/x^r es primo, lo mismo ocurre con el ideal de $\theta[x/y]$ engendrado por F/y^r: las trazas de dichos ideales sobre $A[y/x]$ y $A[x/y]$ respectivamente, son los ideales de una superficie irreducible en los abiertos $U_1 = spec\, A[y/x]$, $U_2 = spec\, A[x/y]$ de V_3': diremos que S' es la transformada de S por T, es inmediato observar que si u es un punto genérico de S, $T(u)$ lo es de S'.

DEFINICIÓN: Llamaremos curvas en el primer entorno de C en S a las curvas del primer entorno de C en V_3 contenidas en la transformada S' de S.

Desde luego, la superficie S' y las curvas en el primer entorno de C en S quedan determinadas salvo una transformación birracional regular en un entorno del punto genérico de cada una de dichas curvas, tanto por la ambiguedad en la definición de T como por la posibilidad de sustituir la singularidad por otra equivalente en el sentido del § 1; desde nuestro punto de vista, las singularidades de S' a lo largo de las curvas en el primer entorno de C en S quedan determinadas.

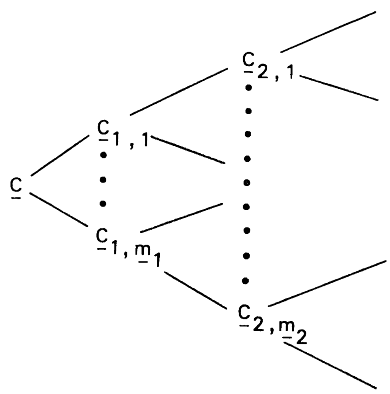
PROPOSICIÓN I.3. *Las curvas en el primer entorno de C son en número finito, los anillos locales de dichas curvas en S' son exactamente los anillos locales en el primer entorno del anillo local de C en S en el sentido de Northcott* [5].

DEMOSTRACIÓN. Si $U_1 = spec\ A\,[y/x]$, $U_2 = spec\ A\,[x/y]$ son los dos abiertos afines que recubren $\pi^{-1}(U)$, sabemos que cualquier curva en el primer entorno de C en V_3 corta a U_1 o a U_2 y corresponde por tanto a un ideal primo de altura dos de $A\,[y/x]$ o $A\,[x/y]$ cuya traza sobre A es p. Comprobemos en primer lugar que, con la elección realizada de x, y las curvas en el primer entorno de C en S cortan a ambos abiertos afines: si por ejemplo $p_1 \subset A\,[x/y]$ es el ideal de una curva en el primer entorno de C en S que corta a U_2, $p_1\, \theta\,[x/y]$ es un ideal propio al que pertenece $F/y^r = \sum_{i=0}^{r} a_i\,(x/y)^i$; si por otra parte tal curva no cortara a U_1, dado que $U_1 \cap U_2 = spec\ A\,[x/y]_{(x/y)}$, necesariamente $x/y\, \varepsilon\, p_1$ y resulta de inmediato $a_0\, \varepsilon\, m$ contra la elección de x, y. Las curvas en el primer entorno de C en S vienen dadas pues por los ideales primos de altura dos de $A\,[y/x]$ que contienen al ideal de S' y cuya traza sobre A es p; tales ideales corresponden biyectivamente a los ideales primos de altura dos de $\theta\,[y/x]$ cuya traza sobre θ es m y que contienen a F' y estos a su vez a los ideales primos de altura uno de $\theta\,[y/x]/(F') = (\theta/(F))\,[\widetilde{y}/\widetilde{x}]$ cuya traza sobre $\theta/(F)$ es el maximal. Ahora bien, $(\theta/(F))\,[\widetilde{y}/\widetilde{x}]$ es una extensión entera de $\theta/(F)$, ya que de $\psi\,(F') = 0$ resulta inmediatamente la ecuación de dependiencia de y/x; los ideales primos de altura uno de $(\theta/(F))\,[\widetilde{y}/\widetilde{x}]$ cuya traza sobre $\theta/(F)$ es el maximal son pues exactamente los ideales maximales del anillo semilocal $\theta/(F)\,[\widetilde{y}/\widetilde{x}]$, en particular son en número finito. Es inmediato comprobar ahora que si C_1 es una curva en el primer entorno de C en S a la que le corresponde el ideal maximal m_1 de $(\theta/(F))\,[\tilde{y}/\tilde{x}]$, el anillo local de C_1 en S' es el localizado de $(\theta/(F))\,[\tilde{y}/\tilde{x}]$ en m_1. Para completar la demostración basta comprobar que $(\theta/(F))\,[\tilde{y}/\tilde{x}]$ es el anillo semilocal en el primer entorno de $\theta/(F)$ (local de C en S) y ello resulta de [5], teorema 10, y del hecho de que, por ser $\tilde{y}/\tilde{x}$ entero sobre $\theta/(F)$, $v(\tilde{x}) \leqslant v(z)$ para cualquier z no inversible de $\theta/(F)$ y cualquier valoración v centrada en el ideal maximal de dicho anillo.

Procediendo ahora por inducción, si $C_{n,1}, \ldots, C_{n,m}$ son las curvas en el enésimo entorno de C en S, cada una de ellas sobre una superficie irreducible obtenida de S por sucesivas transformaciones, las curvas en el $(n+1)$-entorno de C en S serán las del primer entorno de cada una de las $C^{\bullet}_{n,i}$ en la superficie correspondiente. Conviene señalar que de esta forma las curvas en los sucesivos entornos de C en S quedan definidas como curvas cada una de las cuales está sobre una superficie obtenida de S por transformaciones monoidales; el par curva, superficie está determinado salvo transformaciones birracionales regulares en un punto genérico de la curva. Si $C_{n,i}$ es una curva del enésimo entorno de C en S y $S^{\bullet}_{n,i}$ es la transformada de S sobre la que se halla, la restricción a $C^{\bullet}_{n,i}$ de la transformación birracional de $S_{n,i}$ en S es la transformación racional en C de la que está dotada $C_{n,i}$ como curva infinitamente próxima a C en V_3.

Llamaremos multiplicidad de $C_{n,i}$ en S (como curva infinitamente próxima a C en S) a la multiplicidad de $C^{\bullet}_{n,i}$ (como curva ordinaria) en la transformada de S sobre la que se encuentra.

Las curvas en cada entorno de C en S son en número finito y pueden representarse los sucesivos entornos de C en S por un diagrama en árbol que, partiendo de C, presenta cada curva sucedida por las que se hallan en su primer entorno en la superficie correspondiente:



(1)

Diremos que dos curvas consecutivas en el diagrama, $C_{n,i}$ y $C_{n+1,j}$, coinciden cuando la transformación birracional entre las superficies sobre las que se hallan sea regular en un punto genérico de las curvas; en particular, en este caso, la transformación racional $C^{\bullet}_{n+1,j} \to C^{\bullet}_{n,i}$ es birracional.

Sea $\theta_S = \theta/(F)$ el anillo local de C en S: la proposición I.3 y las definiciones de Northcott ([5], § 4) permiten afirmar que los anillos locales, en la transformadas de S correspondientes, de las curvas en el enésimo entorno de C en S son los anillos locales en el enésimo entorno de θ_S de manera que si en el diagrama (1) se sustituye cada curva por su anillo local en la superficie correspondiente y cada transformación racional por el monomorfismo de anillos locales inducido por la transformación entre superficies, se obtiene el árbol de entornos de θ_S en el sentido de Northcott (loc. cit.); la coincidencia de dos curvas equivale a que el monomorfismo entre los correspondientes anillos locales sea isomorfismo.

Recordando que una curva es simple sobre una superficie si y solo si su anillo local es regular (y por ello de valoración discreta), tenemos:

TEOREMA I. 4. a) *Si C es simple en S, en el primer entorno de C en S aparece una única curva que coincide con C; resulta pues por inducción que los sucesivos entornos de C en S contienen solamente a C. Recíprocamente, si C coincide con una de las curvas en su primer entorno sobre S, C es simple en S.*

b) *El diagrama* (1) *ramifica solo un número finito de veces, para n suficientemente alto todas las curvas en el enésimo entorno de C en S son simples; en particular, por a), el diagrama es estacionario a partir del enésimo entorno.*

c) *Las ramas de* (1) *corresponden exactamente a las valoraciones centradas en el ideal maximal de θ_S, la valoración correspondiente a una rama tiene por anillo el anillo local, en la transformada de S correspondiente, de cualquiera de las curvas simples que figuran en la rama.*

DEMOSTRACIÓN. El enunciado es una mera traducción de resultados de Northcott, a) proviene del teorema 11 y b) de los teoremas 12 y 14 de [5] mientras que c) resulta del teorema 6 de [6].

CAPITULO II. HOJAS DE UNA SUPERFICIE

DEFINICIÓN: Diremos que las curvas en los sucesivos entornos de C en S situadas sobre una de las ramas del diagrama (1) constituyen una hoja de S con origen en C.

Las hojas de S con origen en C están pues en correspondencia biyectiva con las valoraciones centradas en el ideal maximal de θ_S. Se observará a lo largo de este capítulo que las hojas de S con origen en C son el análogo, a nivel de superficie, de las ramas de una curva con origen en uno de sus puntos.

1. — *Series de Puiseux.*

Sea ζ una hoja de S con origen en C, designemos por C_i la curva de ζ en el iésimo entorno de C, en particular $C_0 = C$. Sea R_i el anillo local de C_i en la transformada de S correspondiente, identificando cada R_i con su imagen en R_{i+1}, los R_i forman una sucesión creciente de anillos locales (una de las ramas del árbol de Northcott) estacionaria. Si $C_n^{\cdot}$ es la primera curva de la hoja que es simple en S, $R_n^{\cdot} = R_{n+i}^{\cdot}$, $i > 0$. $R_n^{\cdot}$ es un anillo de valoración dicreta al que llamaremos anillo terminal de la hoja. El cuerpo residual de R_i es el cuerpo de funciones racionales de C_i, lo designaremos por K_i ($K_0 = K$); obviamente los K_i estacionan a partir de $K_n^{\cdot}$ y llamaremos a K_n cuerpo terminal de la hoja. El grado de la hoja será por definición el máximo de los grados $[C_i : C]$, es decir, $[C_n : C] = [K_n : K]$.

Consideremos el completado $\hat{\theta}$ de θ: se trata de un anillo local regular y completo de dimensión dos, su ideal maximal es $\hat{m} = m\hat{\theta}$ y la inclusión $\theta \subset \hat{\theta}$ induce isomorfismo $K = \theta/m = \hat{\theta}/\hat{m}$; aplicando [11] Cap. VIII, § 12, existe un subcuerpo K' de $\hat{\theta}$ (subcuerpo de Cohen), isomorfo a K a través del paso al cociente, de manera que si x, y es un sistema de generadores de $\hat{m}$ (en particular los generadores de m ya elegidos), x, y son analíticamente independientes sobre K' y todo elemento de $\hat{\theta}$ se representa como una serie de $K'[[x,y]]$: $\hat{\theta} \simeq K'[[x,y]]$, isomorfismo que es la identidad sobre K', x e y.

El morfismo $\omega : \theta \to R_n^{\cdot}$ que se obtiene componiendo el paso al cociente $\theta \to \theta_S$ con la inclusión $\theta_S \to R_n$ induce el correspondiente morfismo entre completados $\hat{\omega} : \hat{\theta} \to \hat{R}_n$ cuya restricción a K' es necesariamente inyectiva: de este modo $\hat{\omega}(K')$ es un subcuerpo de $\hat{R}_n$ y podemos elegir (loc. cit.) un subcuerpo de Cohen Ω de $\hat{R}$ que sea una extensión de $\hat{\omega}(K')$ de manera que si t es un generador cualquiera del ideal maximal de $\hat{R}_n$, $\hat{R} \simeq \Omega[[t]]$: identificaremos $\hat{\theta}$ a $K'[[x,y]]$, $\hat{R}_n$ a $\Omega[[t]]$ y K' a $\hat{\omega}(K')$; tales identificaciones son compatibles con los isomorfismos inducidos por paso a-cociente, $K' \simeq K$, $\Omega \simeq K_n^{\cdot}$, y el monomorfismo entre los cuerpos residuales inducido por ω o, equivalentemente, por la transformación racional $C_n^{\cdot} \to C$. En particular Ω es una extensión finita de K' de grado igual al grado de la hoja. Se observa también que, identificados los elementos de θ_S a series en t, la valoración de anillo R_n hace corresponder a cada elemento su orden como serie.

Con la identificación $R_n^{\cdot} = \Omega\,[[t]]$, las imágenes en θ_S de los generadores x, y de m, aparecen como series de potencias

$$\widetilde{x} = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i\, t^i \qquad \widetilde{y} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, t^i$$

cuyos coeficientes son elementos de Ω.

El mínimo de los órdenes de las dos series es el valor mínimo de los elementos no inversibles de θ_S por la valoración correspondiente a $R_n^{\cdot}$, valor que designaremos por ν y que será, por definición, el orden aparente de la hoja. Teniendo en cuenta la elección de los generadores x, y, es inmediato comprobar que el orden de las dos series es ν, por ello, $c_i = b_i = 0$, $i = 1, \ldots, \nu - 1$, $c_\nu \neq 0$, $b_\nu \neq 0$.

Si escribimos $\widetilde{x} = (\sum_{i \geq \nu} (c_i / c_\nu)\, t^{i-\nu})\, c_\nu t^\nu$, la serie que figura como primer factor tiene término independiente igual a la unidad, admite pues una raiz ν-ésima en $\Omega\,[[t]]$ que designaremos por $s\,(t)$; $s\,(t)$ es necesariamente inversible, podemos tomar $\bar{t} = ts\,(t)$ como nuevo parámetro en el anillo de series y resultará

$$\widetilde{x} = c\bar{t}^{\nu} \qquad \widetilde{y} = \textstyle\sum_{i \geq \nu} a_i\, \bar{t}^i = \sum_{i \geq \nu} a_i\, (\widetilde{x}/c)^{i/\nu}$$

donde los a_i y $c = c_\nu$ son elementos de Ω.

DEFINICIÓN: Llamaremos serie de Puiseux de la hoja ζ a la expresión

$$P\,(x) = \textstyle\sum_{i \geq \nu} a_i\, (x/c)^{i/\nu}$$

se trata de una serie en potencias fraccionarias de x cuyos coeficientes se hallan en una extensión finita de K'.

2. — Funciones algebraicas sobre una curva.

En diversas ocasiones han aparecido extensiones algebraicas de $K = k\,(C)$ y elementos algebraicos sobre dicho cuerpo, en particular los coeficientes de la serie de Puiseux son algebraicos sobre K si identificamos $K \simeq K'$. Si α es un elemento algebraico sobre K, α

puede interpretarse como función multiforme definida en C: considerando el polinomio mínimo de α sobre K se tiene una relación irreducible

$$\alpha^m + f_{m-1}\alpha^{m-1} + \ldots + f_0 = 0$$

donde los f_i son funciones racionales definidas en C; si p es un punto genérico de C, los valores de α en p serán por definición aquellos $\alpha(p) \in k$ tales que

$$\alpha(p)^m + f_{m-1}(p)\,\alpha(p)^{m-1} + \ldots f_0(p) = 0$$

Equivalentemente, α es función racional del punto genérico de la curva de cuerpo $K(\alpha)$ y aparece como función multiforme definida en C a traves de la transformación racional inducida por la inclusión $K \to K(\alpha)$.

Se comprueba inmediatamente que una función algebraica uniforme es racional. Si C es una recta proyectiva se tienen las funciones algebraicas en sentido clásico (véase la introducción de [9] por ejemplo).

Conviene advertir que dos elementos algebraicos sobre K distintos, α, β, pueden inducir la misma función algebraica, para ello es necesario y suficiente que $K(\alpha)$ y $K(\beta)$ sean isomorfos sobre K, i. e., que α y β puedan sumergirse como un mismo elemento de la clausura algebraica de K. En este caso diremos que α y β son idénticos como funciones algebraicas y escribiremos $\alpha \equiv \beta$.

Sea $\bar{K}$ la clausura algebraica de K', si δ es el grado de ζ, existen δ inmersiones de Ω en $\bar{K}$ que extienden la inclusión $K' \subset \bar{K}$; llamaremos conjugadas de la serie de Puiseux de ζ a las $\delta\nu$ series

$$\sum_{i\geq\nu} \sigma(a_i)\left(\frac{x}{\sigma(c)}\right)^{i/\nu} \varepsilon^i$$

donde σ es una de las mencionadas inmersiones y ε una raiz ν-ésima de la unidad. Podemos suponer elegida arbitrariamente una determinación de $\sigma(c)^{1/\nu}$ para cada σ, las conjugadas de la serie de Puiseux serán las mismas, salvo el orden, cualquiera que sea dicha elección; con ello las conjugadas se considerarán elementos de $\bar{K}[[x^{1/\nu}]]$'

Obviamente, considerados los coeficientes de la serie de Puiseux como funciones algebraicas sobre C, la serie y sus conjugadas resultan indistinguibles, cualquiera de ellas puede tomar el nombre de serie de Puiseux. Conviene recordar al respecto que Ω y K_n están determinados salvo isomorfismo sobre K' ($\simeq K$) ya que C_n y su transformación racional lo estaban salvo transformaciones birracionales.

3. — Factorización de la ecuación de S.

El generador F del ideal de S en θ, que se puede considerar como la ecuación de S en un cierto entorno del punto genérico de C, es irreducible en θ al serlo S, pero en general no continúa siendo irreducible al considerarlo en $\hat{\theta}$: veremos ahora que descompone en factores primos correspondientes a las hojas de S con origen en C.

Con la identificación de $\hat{\theta}$ a $K'[[x, y]]$, F se expresa como una serie cuya forma inicial coincide con la de F como elemento de θ (salvo la identificación $K' \simeq K$), en particular (cap. I, § 4) aparecen en la forma inicial de la serie términos no nulos en x^r, y^r donde r es la multiplicidad de C en S. Aplicando el teorema de preparación de Weierstrass, F puede expresarse en la forma $F = u F^*$ donde u es una serie inversible y F^* un polinomio en y de grado r con los coeficientes de $K'[[x]]$ y el del término de grado r igual a la unidad.

Sean ζ_j, $j = 1, \ldots, m$, las hojas de s con origen en c, δ_j, ν_j y $P_j(x)$ el grado, orden aparente y serie de Puiseux de la hoja ζ_j; designemos por $P_j^{\tau_j}(x)$, $\tau_j = 1, \ldots, \nu_j \delta_j$, las conjugadas de $P_j(x)$.

Lema II.1. *El producto* $\prod_{\tau_j} (y - P_j^{\tau_j}(x))$ *es un elemento de* $K'[[x]][y]$.

Demostración. Consideremos en primer lugar, fijada una inmersión σ del cuerpo terminal de la hoja en la clausura algebraica de K', el producto

$$\prod_{\varepsilon} (y - \textstyle\sum_{i \geq \nu_j} \sigma(a_i)\, (x/\sigma(c))^{i/\nu_j} \cdot \varepsilon^i)$$

donde ε recorre las raices ν_j-ésimas de la unidad: se trata de un polinomio en y cuyos coeficientes son funciones simétricas en $\sum_{i \geq \nu_j} \sigma(a_i)\,(x/\sigma(c))^{i/\nu_j} \cdot \varepsilon^i$, variando ε; sustituyendo formalmente $l = (x/\sigma(c))^{1/\nu_j}$, cualquiera de los coeficientes se convierte en una serie en potencias enteras de l que permanece invariante por cualquier sustitución $l \prec\succ \varepsilon\, l$: de ahí que no posea otros términos que los de exponente divisible por ν_j y el coeficiente en cuestión sea una serie en potencias enteras de x con coeficientes racionales en los $\sigma(a_i)$, $\sigma(c)$. El producto del enunciado será ahora una serie en potencias enteras de x, y, con coeficientes racionales en los $\sigma(a_i)$, $\sigma(c)$, variando σ, invariante por la acción del grupo de Galois de la mínima extensión normal de K' en $\bar{\bar{K}}$ que contiene una de las imágenes del cuerpo terminal de la hoja: necesariamente sus coeficientes serán elementos de K'.

DEFINICIÓN: Diremos que el producto $F_j = \prod_{\tau_j} (y - P_j^{\tau_j}(x))$ es la ecuación de la hoja ζ_j.

Designemos por $\Omega_j[[t_j]]$ el completado del anillo terminal de la hoja ζ_j, representado como un anillo de series según lo convenido en el § 1; tenemos:

LEMA II. 2. *La imagen de F_j por el morfismo natural $\hat{\omega}_j : K'[[x, y]] \to \Omega_j[[t_j]]$ (§ 1) es nula.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que $\hat{\omega}_j$ puede entenderse a un morfismo $\bar{K}[[x^{1/\nu}, y]] \to \bar{K}[[t_j]]$ por el que uno de los factores de F_j tiene imagen nula.

Conviene recordar ahora que si i_j es la inclusión de θ_S en el anillo terminal de la hoja ζ_j e $\hat{i}_j$ es el morfismo que induce entre completados ($\hat{\omega}_j$ es pues la composición de $\hat{i}_j$ con el morfismo de paso al cociente $\hat{\theta} \to \hat{\theta}_S$), tomando $p_j = ker\ \hat{i}_j$, se tiene la expresión del ideal nulo de $\hat{\theta}_S$ como intersección de ideales primos: $(0) = \bigcap_j p_j$ (Northcott [4]). A las imágenes de los $\hat{i}_j$ se las suele designar con el nombre de componentes analíticas del anillo θ_S.

TEOREMA II. 3. *La ecuación F de S descompone en factores primos distintos en el anillo $\hat{\theta} = K'[[x, y]]$ según*

$$F = uF_1 \dots F_m$$

donde u es inversible y los F_j son las ecuaciones de las hojas de S con origen en C.

DEMOSTRACIÓN: De la expresión del ideal (0) de $\hat{\theta}_S$ como intersección de ideales primos resulta inmediatamente que el morfismo producto de los $\hat{i}_j$, $\hat{\theta}_S \to \prod_j \Omega_j[[t_j]]$, es un monomorfismo, de ahí que el núcleo de $\prod_j \hat{\omega}_j : \hat{\theta} \to \prod_j \Omega_j[[t_j]]$ coincida con $ker\ (\hat{\theta} \to \hat{\theta}_S) = (F) = (F^*)$. El lema II. 2 asegura que la imagen de $\prod F_j$ por $\prod \hat{\omega}_j$ es nula, de donde F^* divide necesariamente al producto de los F_j; basta observar ahora que F^* es un polinomio en y de grado r, lo mismo ocurre con $\prod_j F_j$ si se tiene en cuenta la igualdad $r = \sum_j \delta_j \nu_j$ (Northcott [4]) y los términos de mayor grado de ambos polinomios tienen coeficiente igual a la unidad. Probada la igualdad del enunciado, pasemos a demostrar que los F_j son primos distintos entre sí: para cada j, ker $\hat{\omega}_j$ es un ideal primo de altura uno de $\hat{\theta}$ ya que la imagen de $\hat{\omega}_j$ es una de las componentes analíticas de θ_S, en particular un anillo íntegro de dimensión uno; por ser $\hat{\theta}$ regular, ker $\hat{\omega}_j$ es necesariamente principal, probaremos que F_j es base de dicho ideal: si, para cada j, f_j es base de *ker* $\hat{\omega}_j$, por II. 2, $F_j = u_j f_j$ y de ahí $F = uu_1 \ldots u_m f_1 \ldots f_m$; basta tener en cuenta ahora que por ser F base de *ker* $\prod_j \hat{\omega}_j = \bigcap_j$ *ker* $\hat{\omega}_j$, es necesariamente un divisor de $f_1 \ldots f_m$, para obtener que todos los u_j son inversibles. Finalmente, por ser θ_S no analiticamente ramificado (i. e., $\bigcap_j p_j = (0)$) y $\hat{\theta}_S = \hat{\theta}/(F)$, los factores primos de F son necesariamente de multiplicidad uno.

En curso de demostración se ha obtenido el

COROLARIO II. 4. *La ecuación de cada hoja es base del núcleo del morfismo canónico de* $\hat{\theta}$ *en la componente analítica de* θ_S *correspondiente.*

COROLARIO II. 5. *Las conjugadas de las series de Puiseux de una hoja son todas distintas entre si.*

DEMOSTRACIÓN: Las conjugadas son las raices de la ecuación de la hoja considerada como polinomio en y y esta es un polinomio irreducible al ser una serie irreducible cuyo orden coincide con su grado como polinomio en y.

Definición: El entero $\delta_j \nu_j$, grado de la forma inicial de la ecuación de ζ_j será el orden de ζ_j y la multiplicidad de C en ζ_j.

Se ha observado ya (demostración de II. 3) que la multiplicidad de C en S es la suma de sus multiplicidades en las diversas hojas con origen en C. Se comprueba fácilmente que la multiplicidad de C en ζ_j coincide con la multiplicidad, como anillo local, de la componente analítica de θ_S correspondiente.

Si ahora $\bar{C}$ es una curva en uno de los entornos de C en S y $\bar{S}$ la transformada de S que la contiene, las hojas de $\bar{S}$ con origen en $\bar{C}$ corresponden en forma natural a las hojas de S con origen en C que contienen a $\bar{C}$; si ζ es una hoja de S con origen en C que contiene a $\bar{C}$ y $\bar{\zeta}$ es la correspondiente hoja de $\bar{S}$, por definición, la multiplicidad de $\bar{C}$ en ζ será la de $\bar{C}$ en $\bar{\zeta}$; convendremos en tomar nula la multiplicidad de $\bar{C}$ en las hojas que no la contengan. Resulta inmediatamente que la multiplicidad de $\bar{C}$ como curva infinitamente próxima a C en S en la suma de sus multiplicidades en las diversas hojas de S con origen en C.

4. — Multiplicidad de intersección de dos superficies a lo largo de C.

Obtendremos ahora una expresión de la multiplicidad de intersección de dos superficies absorbida en C, análoga a la clásica regla de Halphen para curvas planas.

Sean S y $\bar{S}$ dos superficies irreducibles que contengan a C, elegidos x, y de manera que en las formas iniciales de las ecuaciones de ambas superficies figuren los términos de grado máximo (igual a la multiplicidad de C en la superficie) en $\bar{x}$ y en $\bar{y}$ (cap. I, § 4), podemos considerar simultaneamente las series de Puiseux de las hojas de S y $\bar{S}$ con origen en C:

Teorema II. 6. *(Regla de Halphen) La multiplicidad de intersección de S y $\bar{S}$ en C es el orden de infinitésimo, respecto de x, del producto*

$$\prod \left(P_j^{\sigma_j}(x) - Q_i^{\tau_i}(x) \right)$$

donde $P_j^{\sigma_j}(x)$ recorre las diversas conjugadas de las series de Puiseux de las hojas de S con origen en C y analogamente $Q_i^{\tau_i}(x)$ respecto de $\bar{S}$ (3).

Demostración: Podemos tomar la multiplicidad de intersección como $long\ \theta_S \otimes_{\theta} \theta_{\bar{S}}$ (Serre [8]) o, equivalentemente, si F y $\bar{F}$ son ecuaciones de S y $\bar{S}$ en θ, como $long\ \theta/(F, \bar{F})$; si $\bar{f}$ es la imagen de $\bar{F}$ al cociente por F, $\theta/(F, \bar{F}) = \theta_S/(\bar{f})$; mantengamos para S las notaciones utilizadas hasta ahora y sean $v_j, j = 1, \ldots, m$, las valoraciones centradas en el ideal maximal de θ_S, correspondientes a las hojas de S. De Northcott [4] teorema 6, tendremos

$$long\ \theta_S/(\bar{f}) = \textstyle\sum_j \delta_j\, v_j(\bar{f})$$

$v_j(\bar{f})$ es el orden de $\bar{f}$ como serie en t_j:

$$v_j(\bar{f}) = ord_{t_j} \bar{f}(t_j) = ord_{t_j} \bar{F}(\tilde{x}(t_j), \tilde{y}(t_j)) = \nu_j\, ord_x\, \bar{F}(x, P_j(x))$$

utilizando la expresión de $\bar{F}$ como serie en x, y; tenemos con ello la multiplicidad de intersección de $S, \bar{S}$ en C expresada en la forma

$$\textstyle\sum_j \nu_j\, \delta_j\, ord_x\, \bar{F}(x, P_j(x)) = \sum_j \sum_{\sigma_j} ord_x\, \bar{F}(x, P_j^{\sigma_j}(x))$$

(3) El resultado se extiende inmediatamente a superficies reducibles sin más que hacer figurar las conjugadas de las series de Puiseux de las diversas componentes por C tantas veces como venga contada la componente.

Basta, para concluir, descomponer $\bar{F}$ en factores primos y tener en cuenta la expresión de estos en función de las conjugadas de las series de Puiseux de $\bar{S}$.

Es razonable definir ahora la multiplicidad de intersección de dos hojas de superficie con origen en C como el orden de infinitésimo, respecto de x, del producto $\Pi(P^\sigma(x) - Q^\tau(x))$ donde P^σ recorre las conjugadas de la serie de Puiseux de una hoja y analogamente Q^τ para la otra. Si ζ es una hoja de una superficie S y $\bar{\zeta}$ lo es de $\bar{S}$, un cálculo análogo a la demostración de II.6 permite expresar la multiplicidad de intersección de las dos hojas como la longitud del producto tensorial, sobre $\bar{\theta}$, de las componentes analíticas de θ_S y $\theta_{\bar{S}}$ correspondientes. Ello prueba en particular la independencia de la definición respecto de la elección de los generadores x, y, independencia que puede verificarse mediante un cálculo directo. Obviamente la multiplicidad de intersección de dos superficies en C aparece como la suma de las multiplicidades de intersección de cada hoja de la primera con cada hoja de la segunda.

5. — La fórmula de Noether.

Proposición II. 7. *Si C_1 es una curva del primer entorno de C en S, θ_1 su anillo local en V_3'* y *ζ_1 es una hoja de S que contiene a C_1 y tiene por ecuación $F_1 \varepsilon \hat{\theta}$, la ecuación de la hoja correspondiente a ζ_1 (hoja transformada de ζ_1) de la superficie transformada S'* es *$F_1' = F_1/x^r$ donde r_1 es el orden de ζ_1.*

Demostración: Sean $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ las hojas de S con origen en C, $F_1, \dots, F_m$ sus respectivas ecuaciones. El anillo θ_1 es un localizado de $\theta[y/x]$, por ello $\hat{\theta}[y/x] = K'[[x,y]][y/x]$ es un subanillo de $\hat{\theta}_1$: la ecuación de S' factoriza pues en la forma

$$F' = \frac{F}{x^r} = u \cdot \frac{F_1}{x^{r_1}} \dots \frac{F_m}{x^{r_m}}$$

donde r_i es el orden de ζ_i. Si ζ_1 contiene a C_1 se observa inmediatamente que el morfismo $\hat{\omega}_1 : \hat{\theta} \to \Omega_1[[t_1]]$ extiende al morfismo análogo $\hat{\psi}_1 : \hat{\theta}_1 \to \Omega_1[[t_1]]$ cuya imagen es la componente analítica del anillo local de C_1 en S' correspondiente a ζ_1', transformada de ζ_1. En particular $\hat{\psi}_1(F_1/x^{r_1}) = 0$ lo que prueba que F_1/x^{r_1} es un factor propio, no inversible, de F/x^r en $\hat{\theta}_1$; si G_1 es la ecuación de ζ_1 ($(G_1) = ker\, \hat{\psi}_1$),

G_1 divide a F_1/x^{r_1}. Considerando ahora el elemento $G_1 F/F_1 x^{r-r_1}$, se observa inmediatamente que tiene imagen nula por cada uno de los morfismos $\hat{\psi}_i$ de $\hat{\theta}_1$ en los completados de los anillos terminales de las hojas de S' con origen en C_1: se concluye que F/x^{r_1} divide a $G_1 F/F_1 x^{r-r_1}$ y de ahí que F_1/x^{r_1} divide a G_1, con lo que coinciden salvo inversibles.

COROLARIO II. 8. *Si ζ_1 es una hoja de S con origen en C, de ecuación F_1 y orden r_1, ζ_1 pasa por C_1 si y solo si F_1/x^{r_1} es no inversible en $\hat{\theta}_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Hemos probado ya que si ζ_1 pasa por C_1, F_1/x^{r_1} es la ecuación de la hoja transformada con origen en C_1 y por ello no es inversible en $\hat{\theta}_1$. Recíprocamente, si F_1/x^{r_1} no es inversible en $\hat{\theta}_1$, es un factor propio de la ecuación de S', $F' = \dfrac{F_1}{x^{r_1}} \cdots \dfrac{F_m}{x^{r_m}}$. Sabemos que F' tiene por factores primos las ecuaciones de las hojas de S' con origen en C_1 (II. 3) y por II. 7, estas son las F_j/x^{r_j} para aquellos índices j para los que ζ_j contiene a C_1: alguna de estas F_j/x^{r_j} debe dividir a F_1/x^{r_1} de manera que si ζ_1 no contiene a C_1, alguno de los factores primos F_j/x^{r_j} aparece con multiplicidad superior a uno en la ecuación de S', contra II. 3

TEOREMA II.9. *Sean ζ_1, ζ_2 dos hojas distintas (de dos superficies S_1, S_2) con origen en C y órdenes respectivos r_1, r_2. Sean C_1 y C_2 las curvas en el primer entorno de C contenidas en ζ_1 y ζ_2 respectivamente: si $C_1 \neq C_2$ la multiplicidad de intersección de ζ_1 y ζ_2 en C es $r_1 r_2$; si $C_1 = C_2$, sean ζ_1', ζ_2' las hojas transformadas de ζ_1, ζ_2 con origen en C_1, la multiplicidad de intersección de ζ_1 y ζ_2 supera al producto de órdenes, $r_1 r_2$, en la multiplicidad de intersección de ζ_1', ζ_2' en C_1 multiplicada por el grado de C_1 sobre C.*

DEMOSTRACIÓN. Sean F_1, F_2 las ecuaciones de las hojas y P_1, P_2 las respectivas series de Puiseux; calculando a partir de la definición

$$ord_x \prod_{\sigma,\tau} (P_1^\sigma(x) - P_2^\tau(x)) = ord_x \prod_\tau F_1(x, P_2^\tau(x)) = r_2 \cdot ord_x F_1(x, P_2(x))$$

sea ν_2 el orden aparente de ζ_2 y $\Omega[[t]]$ el completado de su anillo terminal,

$$r_2 \cdot ord_x F_1(x, P_2(x)) = r_2 \nu_2^{-1} \cdot ord_t F_1(x(t), y(t))$$

donde $r_2 \nu_2^{-1} = \delta_2$ es el grado de ζ_2. Si F_1' es la ecuación de la transformada de ζ_1, $F_1 = F_1' x^{r_1}$ y tenemos

$$r_2 \nu_2^{-1} \cdot ord_t F_1 (x(t), y(t)) = r_1 r_2 \nu_2^{-1} \cdot ord_t x + r_2 \nu_2^{-1} \cdot ord_t F_1'$$
$$= r_1 r_2 + r_2 \nu_2^{-1} \cdot ord_t F_1'$$

Si $C_1 = C_2$, F_1' es inversible en el completado del anillo local de C_2 en V_3' (II. 8), su orden como serie en t es cero y se tiene la primera parte del enunciado. Si $C_1 = C_2$, repitiendo el cálculo anterior para ζ_1', ζ_2', resulta la multiplicidad de intersección de ζ_1' y ζ_2' igual a

$$r_2' \nu_2'^{-1} \cdot ord_t F_1' = \delta_2' \cdot ord_t F_1' = (\delta_2' \delta_2^{-1}) \delta_2 \cdot ord_t F_1'$$

donde r_2', ν_2' y δ_2' son, respectivamente, el orden, el orden aparente y el grado de ζ_2'. Basta tener en cuenta que $\varrho = \delta_2/\delta_2'$ es el grado de C_1 sobre C para completar la demostración.

COROLARIO II. 10. (*Fórmula de Noether para hojas*) *Si* ζ *y* $\bar{\zeta}$ *son dos hojas con origen en* C, *su multiplicidad de intersección en* C *viene dada en la forma*

$$(\zeta \cdot \bar{\zeta}) = \sum \varrho_i r_i \bar{r}_i$$

donde la suma se extiende a C $(= C_0)$ *y a todas las curvas* $C_1, \ldots, C_m$ *infinitamente próximas a* C *comunes a las dos hojas,* ϱ_i *indica el grado sobre* C y r_i, $\bar{r}_i$ *las multiplicidades de la curva en* ζ y $\bar{\zeta}$ *respectivamente.*

La demostración es inmediata a partir de II. 9.

COROLARIO II. 11. (*Fórmula de Neother para superficies*). *La multiplicidad de intersección en* C *de dos superficies irreducibles* (4) S, $\bar{S}$ *se expresa por la fórmula*

$$(S \cdot \bar{S}; C) = \sum \varrho_i r_i \bar{r}_i$$

donde la suma se extiende a C $(= C_0)$ *y a las curvas* $C_1, \ldots, C_m$ *infinitamente próximas a* C *comunes a las dos superficies,* ϱ_i *es el grado de* C_i *sobre* C y r_i, $\bar{r}_i$ *sus multiplicidades en* S *y* $\bar{S}$.

La demostración resulta inmediatamente de II. 10, al ser la multiplicidad de una curva en una superficie suma de sus multiplicidades en las diversas hojas de la superficie que la contienen.

---

(4) Como en II. 6, la extensión a superficies reducibles es inmediata.

Diremos que el sumando $\varrho_i r_i \bar{r}_i$ de cualquiera de las dos fórmulas de Noether es la multiplicidad de intersección de las dos hojas o superficies absorbida en C_i.

Las fórmulas de Noether pueden obtenerse también por vía puramente algebraica, véase al respecto [6], proposición 3 y [7], teorema 8.

6. — Relaciones de proximidad.

Siguiendo la nomenclatura clásica para curvas planas, llamaremos curvas próximas[5] a C en V_3 a todas las curvas infinitamente próximas a C en V_3 situadas sobre la superficie $T(C)$. En particular todas las curvas del primer entorno de C son próximas a C. La definición se extiende a la de curvas próximas cualquier curva infinitamente próxima a C sin más que considerar esta última como curva propia en la transformada de V_3 correspondiente.

Si C_1 es una curva del primer entorno de C en V_3, C_1 es simple en $T(C)$ (observación a I. 1) y por ello todas las curvas próximas a C que sucedan a C_1 tienen grado uno sobre C_1.

Proposición II. 12. *Sea ζ una hoja con origen en C, C_1 la curva en el primer entorno de C en ζ y ζ' la transformada de ζ con origen en C_1. Si la multiplicidad de C en ζ (orden de ζ) es r, la multiplicidad de intersección de ζ' con $T(C)$ (considerada como su única hoja con origen en C_1) es r/ϱ donde $\varrho = [C_1 : C]$.*

Demostración. Sea F' la ecuación de ζ', θ_1 el anillo local de C_1 en V_3' y (x, G) su ideal maximal con $G \varepsilon \theta[y/x]$ (c. f. demostración de I. 1). x es la ecuación local de $T(C)$ y por lo tanto $\theta_1/(x)$ es el anillo local de C_1 en $T(C)$: se trata de un anillo de valoración discreta (regular y de dimensión uno) al igual que su completado $\hat{\theta}_1/(x)$. Se observa fácilmente a partir de la definición que la multiplicidad de intersección de ζ' con la única hoja de $T(C)$ coincide con el valor de la clase de F' en $\hat{\theta}_1/(x)$ por la valoración de dicho anillo. Expresando la ecuación de ζ como suma de formas, $F = F_r(x, y) + F_{r+1}(x, y) + \ldots$, la de ζ' es $F' = F_r(1, y/x) + x(\ldots)$ y basta calcular el valor de la clase de $F_r(1, y/x)$. Conviene recordar ahora (I. 1) que, indicando con tilde las clases módulo x, $\theta[y/x]/(x)$ se identifica al anillo de polinomios $K[\widetilde{y/x}]$, $\widetilde{G}$ es un polinomio irreducible de grado ϱ, base del

(5) Punti prossimi, proximate points, en el caso de curva.

ideal maximal de $\theta_1/(x) = K[\widetilde{y/x}]_{(\widetilde{G})}$. $F_r(1, \widetilde{y/x})$ es potencia de un polinomio irreducible puesto que proviene, por deshomogeneización, de la forma inicial de una serie irreducible. $\widetilde{G}$ y $F_r(1, \widetilde{y/x})$ no pueden ser primos entre si (ζ' no contendría a C_1) y se concluye que G es el único divisor primo de $F_r(1, \widetilde{y/x})$ en $K[\widetilde{y/x}]$; la comparación de los grados acaba la demostración.

COROLARIO II. 13. *Con las notaciones de la proposición anterior,* $r = \varrho \sum r_i$ *donde la suma se extiende a todas las curvas próximas a* C *en* ζ *y* r_i *indica la multiplicidad en* ζ.

La demostración se obtiene inmediatamente aplicando la fórmula de Noether. Conviene observar que el grado sobre C de todas las curvas próximas a C sobre ζ coincide con ϱ.

COROLARIO II. 14. *Si* r_1 *es la multiplicidad de* C_1 *en* ζ, $r \geqslant \varrho r_1$ con *igualdad si y solo si* C_1 *es la única curva próxima a* C *en* ζ.

Si ahora S es una superficie irreducible que contiene a C, razonando sobre sus hojas con origen en C se tiene inmediatamente:

COROLARIO II. 15. *Si* r *es la multiplicidad de* C *en* S, $r = \sum \varrho_i r_i$ *donde la suma se extiende a las curvas* C_i *próximas a* C *en* S, r_i *es la multiplicidad de* C_i *en* S *y* ϱ_i *su grado sobre* C.

COROLARIO II. 16. *En las condiciones anteriores,* $r \geqslant \sum \varrho_i r_i$ *con la suma extendida a las curvas del primer entorno de* C *en* S. *Se tiene igualdad si y solo si las únicas curvas próximas a* C *en* S *son las del primer entorno.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] E. CASAS, *Acerca del género virtual de las superficies algebraicas*, Coll. Math. XXVII fasc. 1.º, 1976.

[2] F. ENRIQUES Y O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geométrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1915-24.

[3] A. GROTHENDIECK, *Elements de geométrie algebrique*, Publications Matematiques I. H. E. S.

[4] D. G. NORTHCOTT, *A general theory of one-dimensional local rings*, Proc. Glasgow Math. Ass., 2, 1956.

[5] D. G. NORTHCOTT, *The neighbourhoods of a local ring*, Journ. London Math. Soc. n.º 30, 1955.

[6] D. G. NORTHCOTT, *Some contributions to the theory of one-dimensional local rings*, Proc. London Math. Soc., (3), 8, 1958.

[7] D. G. NORTHCOTT, *Abstract dilatations and infinitely near points*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52, 1956.

[8] J. P. SERRE, *Algébre locale et multiplicités*, Lect. Notes in Math. 11' Springer Verlag, 1965.

[9] F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, Nicola Zanichelli, Bologna 1926.

[10] B. L. VAN DER WAERDEN, *Infinitely near points*, Ind. Mat. 12, 1950.

[11] O. ZARISKI Y SAMUEL, *Conmutative algebra*, Van Nostrand 1960.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas, Universidad de Barcelona.