CONVERGENCIA PARA REDES DE LIMITES PROYECTIVOS DE MEDIDAS DE RADON

por

PEDRO JIMENEZ GUERRA

0. INTRODUCCION

En [5] se introduce y estudia la convergencia simple sobre cada $H \in \mathcal{H}$ de medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre un espacio topológico E, estudiándose también en dicho trabajo, la estabilidad de la convergencia simple y de la convergencia simple sobre cada $H \in \mathcal{H}$ en relación con la medida imagen. Posteriormente en [6] se estudia dicha estabilidad frente al producto por funciones y el producto tensorial de medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$.

En este trabajo, las medidas que aparecen son medidas de Radon (no necesariamente localmente finitas) sobre un espacio topológico E (no necesariamente Hausdorff), y se estudia en él cuando se verifica que si $\{(E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red de sistemas proyectivos de espacios topológicos dotados de medidas de Radon y si para todo $i \in I$, $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red $s(\mathcal{K}_i)$-compacta (resp. s-compacta, $s(\mathcal{K}_i)$-convergente o s-convergente) entonces la red formada por los límites proyectivos, supuesto que existen (en algunos casos se da también la existencia), sea $s(\mathcal{K})$-compacta (resp. s-compacta, $s(\mathcal{K})$-convergente o s-convergente). En los casos de convergencia se resuelve el problema de determinar si el límite de la red formada por los límites proyectivos, es el límite proyectivo de los límites de las redes $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

1. CONVERGENCIA SIMPLE SOBRE CADA COMPACTO

1. DEFINICIÓN. Sea E un espacio topológico y $\mathcal{K}$ la clase de todos los subconjuntos compacto cerrados de E. Se llama *medida de Radon* sobre E, a toda medida μ definida sobre la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de E que verifica:

1.1 $\mu(K) < +\infty$ para todo $K \in \mathcal{K}$.

1.2. $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : B \supset K \in \mathcal{K}\}$.

Si E es un espacio T_2, entonces las medidas de Radon, según Schwartz, sobre E, son las medidas de Radon sobre E que son localmente finitas. El conjunto de las medidas de Radon sobre E lo denotaremos en lo sucesivo por $M(E)$.

2. DEFINICIÓN. Sea $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E)$. Se dice que un subconjunto de Borel B de E, es un conjunto $(\mu_i)_{i \in I}$-*compacto* si, para todo cubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de B y todo $\varepsilon > 0$, existe un número finito de abiertos $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}_0$ tales que

$$\overline{\lim_i}\ \mu_i\,(B - \bigcup_{k=1}^{n} G_k) < \varepsilon.$$

3. DEFINICIÓN. Se dice que una red $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E)$ *converge simplemente* a $\mu \in M(E)$, lo que representaremos por $\mu_i \xrightarrow{s} \mu$, cuando $\mu_i(B) \to \mu(B)$, para todo $B \in \mathcal{B}$.

Diremos que una red $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E)$, es *simplemente compacta* o s-*compacta*, si toda subred posee a su vez una subred s-convergente.

Análogamente, se dice que una red $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E)$ *converge simplemente sobre cada compacto* a $\mu \in M(E)$, lo que denotaremos por $\mu_i \xrightarrow{s(\mathcal{K})} \mu$, si y sólo si se verifica $\mu_i(B \cap K) \to \mu(B \cap K)$ para todo $B \in \mathcal{B}$ y todo $K \in \mathcal{K}$.

Una red $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E)$ se dice que es $s(\mathcal{K})$-*compacta*, cuando toda subred posee a su vez una subred $s(\mathcal{K})$-convergente.

4. DEFINICIÓN. Sea $(\varprojlim_i E_i, E_i, \pi_{ij}, \pi_i)$ un sistema proyectivo de espacios topológicos. Si para cada $i \in I$ tenemos $\mu_i \in M(E_i)$ que verifica $\pi_{ij}(\mu_j) = \mu_i$, para $i \leq j$, el sistema formado por $E = \varprojlim_i E_i$, los E_i, las π_{ij}, las π_i y las μ_i, se llama un *sistema proyectivo de espacios topológicos dotados de medidas de Radon.*

Si $\mu \in M(E)$ y se verifica que $\mu_i = \pi_i(\mu)$ para todo $i \in I$, en el sentido de que

$$\mu_i(B_i) = \mu(\pi_i^{-1}(B_i))$$

para todo conjunto de Borel B_i de E_i $(B_i \in \mathcal{B}_i)$, se dice que μ es límite proyectivo del sistema proyectivo de espacios topológicos dotados de medidas de Radon anterior. Esto lo representaremos poniendo $\mu = \varprojlim_i i\, \mu_i$.

En adelante supondremos que los espacios topológicos E_i son Hausdorff.

5. PROPOSICIÓN. *Sean E un espacio topológico, $B \in \mathcal{B}$ y $K \in \mathcal{K}$. Entonces, si la red $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E)$ es $s(\mathcal{K})$-compacta, entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $K' \in \mathcal{K}$ tal que $K' \subset B \cap K$ y*

$$\overline{\lim_i}\, \mu_i (B \cap K\text{-}K') < \varepsilon. \tag{5.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata del corolario 11 de [5], puesto que $\overline{\lim_i}\, \mu_i (K) < +\infty$, según resulta del teorema 10 del citado trabajo, por ser $(\mu_i)_{i \in I}$ $s(\mathcal{K})$-compacta, y ser $(\mu_{iK})_{i \in I}$ s-compacta, siendo μ_{iK}, para cada $i \in I$, la medida inducida por la μ_i en K, según se deduce inmediatamente por ser $(\mu_i)_{i \in I}$ $s(\mathcal{K})$-compacta.

6. TEOREMA. *Sea $\{(E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de sistemas proyectivos de espacios topológicos dotados de medidas de Radon, tal que $(\mu_i^\lambda)_{i \in I}$ es una red $s(\mathcal{K}_i)$-compacta, para todo $i \in I$. Si para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu_i^\lambda M(E)$ tal que $\mu^\lambda = \varprojlim_i \mu_i^\lambda$, entonces son equivalentes:*

6.1. *$(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es $s(\mathcal{K})$-compacta.*

6.2. *Para cada $G \in \mathcal{G}$, $K \in \mathcal{K}$ y $\varepsilon > 0$, existe $i \in I$ y un abierto $G_i \in \mathcal{G}_i$ que verifica $\pi_i^{-1}(G_i) \subset G$ y*

$$\overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda (G \cap K\text{-}\pi_i^{-1}(G_i)) < \varepsilon. \tag{6.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se verifica 6.1, entonces, del teorema 10 de [5] resulta que $G \cap K$ es $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$-compacto, para todo $G \in \mathcal{G}$ y todo $K \in \mathcal{K}$, de donde se deduce inmediatamente 6.2, puesto que $\{\pi_i^{-1}(G_i): G_i \in \mathcal{G}_i,\ i \in I\}$ es una base de la topología de E.

Recíprocamente, si suponemos que se verifica 6.2, entonces, para todo $K \in \mathcal{K}$ e $i \in I$ se tiene

$$\begin{aligned} \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda (K) &\leq \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1} \pi_i (K)] \\ &= \overline{\lim_\lambda}\, \mu_i^\lambda [\pi_i (K)] \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

puesto que por ser la red $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ $s(\mathcal{K}_i)$-compacta, del teorema 10 de [5] resulta que $\overline{\lim_\lambda}\, \mu_i^\lambda(\pi_i (K)] < +\infty$, por ser $\pi_i (K) \in \mathcal{K}_i$.

Además, para todo $G \in \mathcal{G}$, $K \in \mathcal{K}$ y $\varepsilon > 0$, existen $i \in I$ y $G_i \in \mathcal{G}_i$ tales que $\mu_i^{-1}(G_i) \subset G$ y

$$\overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [G \cap K - \pi_i^{-1}(G_i)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por ser la red $(\mu_i^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ $s(\mathcal{K}_i)$-compacta, de la proposición 5 resulta que existe $K_i \in \mathcal{K}_i$ que verifica

$$\overline{\lim_\lambda}\, \mu_i^\lambda [G_i \cap \pi_i (K) - K_i] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, $K' = \pi_i^{-1}(K_i) \cap K \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(G_i) \cap K - K'] &= \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(G) \cap K - \pi_i^{-1}(K_i)] \\ &\leq \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(G_i) \cap \pi_i^{-1}\pi_i(K) - \pi_i^{-1}(K_i)] \\ &= \overline{\lim_\lambda}\, \mu_i^\lambda [G_i \cap \pi_i(K) - K_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda (G \cap K - K') \leq \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [G \cap K - \pi_i^{-1}(G_i)] + \\ + \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(G_i) \cap K - K'] < \varepsilon.\end{aligned}$$

De donde se deduce inmediatamente que $G \cap K$ es $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ -compacto, por serlo K'.

Como según hemos probado, $\overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda (K) < +\infty$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $G \cap K$ es $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ -compacto para todo $G \in \mathcal{G}$ y todo $K \in \mathcal{K}$, del teorema 10 de [5] resulta que $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ es $s(\mathcal{K})$-compacta.

7. Proposición. *Con las notaciones del teorema anterior, si* $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ *es* $s(\mathcal{K})$*-compacta y se verifica que para todo* $i \in I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ *y* $\varepsilon > 0$ *existe* $\mathcal{K} \in K$ *que verifica* $K \subset \pi_i^{-1}(K_i)$ *y*

$$(7.1) \qquad \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda (\pi_i^{-1}(K_i) - K] < \varepsilon,$$

entonces, $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ *es* $s(\mathcal{K}_i)$*-compacta para todo* $i \in I$.

Demostración. En efecto, sean $i \in I$ y $(\mu_i^\lambda)_{\lambda\in\Delta'}$, una subred de $(\mu_i^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$. Entonces, por ser $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ $s(\mathcal{K})$-compacta, existe una subred $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta''}$ de la red $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Delta'}$ y $\mu_{\Delta'} \in M(E)$ de manera que $\mu^{\lambda''} \xrightarrow{s(\mathcal{K})} \mu_{\Delta'}$. Como $\pi : E \longrightarrow E_i$ es μ-medible para toda medida $\mu \in M(E)$, se deduce de la proposición 13 de [5], que $\mu_i^{\lambda''}(B_i \cap K_i') \longrightarrow \pi_i(\mu_{\Delta'})\ (B_i \cap K_i')$ para todo $B_i \in \mathcal{B}_i$ y todo $K_i' \in \mathcal{K}_i'$, lo que denotaremos por $\mu_i^{\lambda''} \xrightarrow{s(\mathcal{K}_i')} \pi_i(\mu_{\Delta'})$ siendo $\mathcal{K}_i'$ la clase de los conjuntos compactos de E_i que son imagen por π_i de algún $K \in \mathcal{K}$, puesto que para todo $K \in \mathcal{K}$, $i \in I$ y $\lambda \in \Lambda$ se tiene $\mu_i^\lambda (\pi_i (K)) < +\infty$ y $\mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1} \pi_i (K)] < \infty$ puesto que $\pi_i (K) \in \mathcal{K}_i$ y existe $K' \in \mathcal{K}$ que verifica $K' \subset \pi_i^{-1} \pi_i (K)$ y

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1} \pi_i (K)] &\leq \mu_{\Lambda'} (K) + \mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1} \pi_i (K) - K'] \\ &\leq \mu_{\Lambda'} (K') + 1 \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Como para cada $\varepsilon > 0$ y $K_i \in \mathcal{K}_i$ existe $K \in \mathcal{K}$ que verifica $K_i \supset \pi_i (K) \in \mathcal{K}_i'$ y

$$\begin{aligned} \pi_i (\mu_{\Lambda'}) [K_i - \pi_i (K)] &= \mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1} (K_i) - \pi_i^{-1} \pi_i (K)] \\ &\leq \mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1} (K_i) - K] \\ &= \sup \{\mu_{\Lambda'} (K') : \pi_i^{-1} (K_i) - K \supset K' \in \mathcal{K}\} \\ &= \sup \{\lim_{\lambda''} \mu^{\lambda''} (K') : \pi_i^{-1} (K_i) - K \supset K' \in \mathcal{K}\} \\ &\leq \overline{\lim_{\lambda''}} \mu^{\lambda''} [\pi_i^{-1} (K_i) - K] \\ &\leq \overline{\lim_{\lambda}} \mu^{\lambda} [\pi_i^{-1} (K_i) - K] \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

del teorema 83 de [8] se deduce que $\pi_i (\mu_{\Lambda'}) \in M (E_i)$.

Además, puesto que $\pi_i (\mu^{\lambda''}) \xrightarrow{s(\mathcal{K}_i')} \pi_i (\mu_{\Lambda'})$ y para todo $B_i \in \mathcal{B}_i$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ y $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \subset \pi_i^{-1} (K_i)$ y $\overline{\lim_{\lambda''}} \mu^{\lambda''} [\pi_i^{-1} (K_i) - K] < \varepsilon$, se tiene

$$\begin{aligned} \pi_i (\mu_{\Lambda'}) (B_i \cap K_i) &= \sup \{\pi_i (\mu_{\Lambda'}) (K_i') : B_i \cap K_i \supset K_i' \in \mathcal{K}_i'\} \\ &= \sup \{\lim_{\lambda''} \mu_i^{\lambda''} (K_i') : B_i \cap K_i \supset K_i' \in \mathcal{K}_i'\{ \\ &\leq \overline{\lim_{\lambda''}} \mu_i^{\lambda''} (B_i \cap K_i) \end{aligned}$$

y, además, como $\pi_i (K) \in \mathcal{K}_i$ se tiene

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{\lambda''}} \mu_i^{\lambda''} (B_i \cap K_i) &\leq \overline{\lim_{\lambda''}} \mu_i^{\lambda''} (B_i \cap \pi_i (K)) + \overline{\lim_{\lambda''}} \mu_i^{\lambda''} [B_i \cap K_i - \pi_i (K)] \\ &\leq \lim_{\lambda''} \mu_i^{\lambda''} (B_i \cap \pi_i (K)) + \overline{\lim_{\lambda''}} \mu_i^{\lambda''} (K_i - \pi_i (K)) \\ &= \pi_i (\mu_{\Lambda'}) (B_i \cap \pi_i (K)) + \overline{\lim_{\lambda''}} \mu^{\lambda''} [\pi_i^{-1} (K_i) - \pi_i^{-1} \pi_i (K)] \\ &\leq \pi_i (\mu_{\Lambda'}) (B_i \cap K_i) + \overline{\lim_{\lambda''}} \mu^{\lambda''} [\pi_i^{-1} \pi_i (K_i) - K] \\ &\leq \pi_i (\mu_{\Lambda'}) (B_i \cap K_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

y, por consiguiente, $\mu_i^{\lambda''} \xrightarrow{s(\mathcal{K}_i)} \pi_i (\mu_{\Lambda'})$.

8. TEOREMA. *Con las notaciones del teorema 6, si para cada* $i \in I$ *y* $\lambda \in \Lambda$ *existen* $\mu_i \in M(E_i)$ *y* $\mu^\lambda \in M(E)$ *tales que* $\mu^\lambda = \varprojlim_i \mu_i^\lambda$ *y* $\mu_{i\gamma} \xrightarrow{s(\mathcal{K}_i)} \mu_i$, *entonces son equivalentes:*

8.1. *Existe* $\mu \in M(E)$ (1) *tal que* $\mu = \varprojlim_i \mu_i$ y $\mu^\lambda \xrightarrow{s(\mathcal{K})} \mu$.

8.2. *Se verifica* 6.2 *y para cada* $i \in I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ y $\varepsilon > 0$ *existe* $K \in \mathcal{K}$ *tal que* $K \subset \pi_i^{-1}(K_i)$ y

$$\overline{\lim_\lambda}\ \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i) - K] < \varepsilon \quad (1). \tag{8.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se verifica 8.1. Entonces, $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es $s(\mathcal{K})$-compacta y del teorema 6 resulta que se verifica 6.2. Además, para todo $i \in I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ y $\varepsilon > 0$ existe, por ser $\mu[\pi_i^{-1}(K_i)] = \mu_i(K_i) < +\infty$, $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \subset \pi_i^{-1}(K_i)$ y

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_\lambda}\ \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i) - K] &= \lim_\lambda \mu_i^\lambda (K_i) - \lim_\lambda \mu^\lambda (K) \\
&= \mu_i(K_i) - \mu(K) \\
&= \mu[\pi_i^{-1}(K_i) - K] \\
&< \varepsilon .
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica 8.2. Del teorema 6 resulta que la red $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es $s(\mathcal{K})$-compacta y, por tanto, para toda subred $(\mu^{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'}$ $(\Lambda' \subset \Lambda)$, existe a su vez otra $(\mu^{\lambda''})_{\lambda'' \in \Lambda''}$, $(\Lambda'' \subset \Lambda')$ $s(\mathcal{K})$-convergente a una medida $\mu_{\Lambda'} \in M(E)$. Además, para todo $i \in I$ se tiene, según se prueba en la demostración de la proposición 7, que $\mu_i^{\lambda''} \xrightarrow{s(\mathcal{K}_i)} \pi_i(\mu_{\Lambda'})$. Teniendo en cuenta que $\mu^{\lambda''} \xrightarrow{s(\mathcal{K}_i)} \mu_i$ y que este límite es único, según se demuestra en la definición 4 de [5], se deduce que $\pi_i(\mu_{\Lambda'}) = \mu_i$ para todo $i \in I$, es decir $\mu_{\Lambda'} = \varprojlim_i \mu_i$.

Puesto que para todo $K \in \mathcal{K}$ y cualquier subred $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ de $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_i}\ \mu_i[\pi_i(K)] &= \overline{\lim_i}\ \mu_{\Lambda'}[\pi_i^{-1}\pi_i(K)] \\
&= \mu_{\Lambda'}(K) \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

por ser $\mu_{\Lambda'}[\pi_i^{-1}\pi_i(K)] = \pi_i(\mu_{\Lambda'})[\pi_i(K)] < +\infty$, según se prueba en la demostración del teorema 105 de [8], entonces, del citado teore-

(1) Según se verá en la demostración, si se cumple 8.2, entonces la medida límite proyectivo del sistema $E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i$) existe y es única.

ma 105 de [8] resulta que el límite proyectivo del sistema $(E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i)$ es único y, por tanto, toda subred de la red $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ posee a su vez una subred $s(\mathcal{K})$-convergente a dicho límite proyectivo, por lo que la red $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es $s(\mathcal{K})$-convergente a dicho límite proyectivo.

2. Convergencia simple

9. Proposición. *Sea* $\{(E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *una red de sistemas proyectivos de espacios topológicos dotados de medidas de Radon. Si para cada* $\lambda \in \Lambda$ *existe* $\mu^\lambda \in M(E)$ *tal que* $\mu^\lambda = \varprojlim_i \mu_i^\lambda$ *y* $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es* s-*compacta, entonces para todo* $i \in I$, *son equivalentes:*

9.1 $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es s-compacta.*

9.2. $\overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i)] < +\infty$ *para todo* $K_i \in \mathcal{K}_i$.

Demostración. Evidentemente, si $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es s-compacta, entonces, $\overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i)] = \overline{\lim_\lambda}\, \mu_i^\lambda (K_i) < +\infty$ para todo $K_i \in \mathcal{K}_i$.

Recíprocamente, si se verifica 9.2 y $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ es una subred de $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, existen $(\mu^{\lambda''})_{\lambda'' \in \Lambda''}$ subred de $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ y $\mu_{\Lambda'} \in M(E)$ tales que $\mu^{\lambda''} \xrightarrow{s} \mu_{\Lambda'}$. Además, para todo $B_i \in \mathcal{B}_i$ de medida $\mu_{\Lambda'}[\pi_i^{-1}(B_i)] < +\infty$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \subset \pi_i^{-1}(B_i)$ y

$$\lim_\lambda \ \mu^{\lambda''} [\pi_i^{-1}(B_i) - K] = \mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1}(B_i) - K] < \varepsilon,$$

por consiguiente, del corolario 14 de [5] resulta que $\mu_i^{\lambda''}(B_i) \to \mu_{\Lambda'}[\pi_i^{-1}(B_i)]$ para todo $B_i \in \mathcal{B}_i$ y $\mu_i^{\lambda''} \xrightarrow{s} \pi_i(\mu_{\Lambda'})$, puesto que $\pi_i(\mu_{\Lambda'}) \in M(E)$ por ser $\mu_{\Lambda'}[\pi_i^{-1}(K_i)] \leq \overline{\lim_\lambda}\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i)] < +\infty$ para todo $K_i \in \mathcal{K}_i$ y existir para todo $K_i \in \mathcal{K}_i$ y todo $\varepsilon > 0$ un $K \in \mathcal{K}$ tal que $\pi_i(K) \subset K_i$ y

$$\begin{aligned} \pi_i(\mu_{\Lambda'}) [K_i - \pi_i(K)] &= \mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1}(K_i) - \pi_i^{-1}\pi_i(K)] \\ &\leq \mu_{\Lambda'} [\pi_i^{-1}(K_i) - K] \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

10. Proposición. *Con las notaciones de la proposición 9, si* $(\mu_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es una red s-compacta para todo* $i \in I$ *y existe* $\mu^\lambda \in M(E)$, *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *tal que* $\mu^\lambda = \varprojlim_i \mu_i^\lambda$ *y* $\lim_\lambda \mu^\lambda(E) < +\infty$, *entonces* $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es s-compacta si y sólo si se verifica* 8.2.

Demostración. En efecto, si $(\mu^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es s-compacta entonces, del teorema 11 de [5] resulta que para todo $\varepsilon > 0$, $i \in I$ y $K_i \in \mathcal{K}_i$ existe $K \in \mathcal{K}$ que verifica $K \subset \pi_i^{-1}(K_i) \in \mathcal{B}$ y $\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i) - K] < \varepsilon$. Además, del teorema 6 resulta trivialmente 6.2.

Recíprocamente, supongamos que se verifica 6.2. Entonces del teorema 11 de [5] resulta que para cada $\varepsilon > 0$ existen $K_i \in \mathcal{K}_i$ y $K \in \mathcal{K}$ tales que $K \subset \pi_i^{-1}(K_i)$, $\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i) - K] < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\overline{lim}_\lambda\, \mu_i^\lambda (E_i - K_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, por consiguiente,

$$\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda (E - K) \le \overline{lim}_\lambda\, \mu_i^\lambda (E_i - K_i) + \overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda[\pi_i^{-1}(K_i) - K] < \varepsilon,$$

de donde se deduce trivialmente que

$$inf\, \{\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda (E - K) \,:\, K \in \mathcal{K}\} = 0.$$

Además, para todo $\varepsilon > 0$ y todo $G \in \mathcal{G}$, existen $i \in I$, $G_i \in \mathcal{G}_i$ y $K_1 \in \mathcal{K}$ tales que $\pi_i^{-1}(G_i) \subset G$, $\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda (G - K_1) < \frac{\varepsilon}{3}$ y

$$\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda [G \cap K_1 - \pi_i^{-1}(G_i)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, del teorema 11 de [5] y 6.2 se deduce, por ser $(\mu_i^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ s-compacta, que existe $K_i \in \mathcal{K}_i$ y $K_2 \in \mathcal{K}$ tales que $K_i \subset G_i$, $K_2 \subset \pi_i^{-1}(K_i) \subset \pi_i^{-1}(G_i) \subset G$ y

$$\begin{aligned}\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(G_i) - K] &\le \overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(G_i) - \pi_i^{-1}(K_i)] + \overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i) - K] \\ &\le \overline{lim}_\lambda\, \mu_i^\lambda (G_i - K_i) + \overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda [\pi_i^{-1}(K_i) - K] \\ &< \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

por tanto, existe $K_2 \in \mathcal{K}$ que verifica $K_2 \subset G$ y $\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda (G - K_2) < \varepsilon$, de donde se deduce inmediatamente que

$$inf\, \{\overline{lim}_\lambda\, \mu^\lambda (G - K) \,:\, G \supset K \in \mathcal{K}\} = 0$$

para todo abierto $G \in \mathcal{G}$.

Además, del teorema 6 resulta que $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es s $(\mathcal{K})$-compacta y del teorema 10 de [5] se deduce que K es $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ -compacto, por tanto, la red $(\mu^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es s-compacta, según se deduce del teorema 11 de [5].

11. PROPOSICIÓN. *Con las notaciones de la proposición* 10, *si para cada* $i \in I$ *y* $\lambda \in \Lambda$ *existen* $\mu_i \in M(E_i)$ *y* $\mu^\lambda \in M(E)$ *tales que* $\mu^\lambda = \underleftarrow{lim}_i \, \mu_i^\lambda$ *y* $\mu_i^\lambda \xrightarrow{s} \mu_i$, *entonces son equivalentes:*

11.1. *Existe* $\mu \in M(E)$ (2) *tal que* $\mu = \underleftarrow{lim}_i \, \mu_i$ *y* $\mu^\lambda \xrightarrow{s} \mu$.

11.2. *Se verifica* 6.2 *y para todo* $B \in \mathcal{B}$ *tal que* $\overline{lim}_\lambda \, \mu^\lambda (B) < +\infty$, *y* $\varepsilon > 0$, *existe* $K \in \mathcal{K}$ *tal que* $\overline{lim}_\lambda \, \mu^\lambda (B - K) < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente, si se verifica 11.1, entonces $\mu^\lambda \xrightarrow{s(\mathcal{K})} \mu$ y del teorema 7 se deduce que se verifica 6.2. Además, si $B \in \mathcal{B}$ y $\mu(B) = lim_\lambda \, \mu^\lambda (B) < \infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathcal{K}$ contenido en (B) $(K \subset B)$ y que satisface

$$\overline{lim}_\lambda \, \mu^\lambda (B - K) = \mu (B - K) < \varepsilon.$$

Recíprocamente, si se tiene 11.2, entonces como para todo $i \in I$ y $K_i \in \mathcal{K}_i$ se tiene $\overline{lim}_\lambda \, \mu^\lambda [\pi^{-1} (K_i)] = \overline{lim}_\lambda \, \mu^\lambda (K_i) < +\infty$, del teorema 7 se deduce que existe $\mu \in M(E)$ tal que $\mu = \underleftarrow{lim}_i \, \mu_i$ y $\mu^\lambda \xrightarrow{s(\mathcal{K})} \mu$ y de la proposición 8 de [5] resulta que $\mu^\lambda \xrightarrow{s} \mu$ puesto que para todo $B \in \mathcal{B}$ de medida $\mu(B) < +\infty$ se tiene que $\overline{lim}_\lambda \, \mu^\lambda (B) = \mu(B) < +\infty$.

(2) Al igual que en el teorema 8, este límite proyectivo existe y es único si se verifica 8.2.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BILLINGSLEY, P.: *Convergence of probability measures*. Jonh Wiley and Sons. New York. 1968.

[2] DIEUDONNE, J.: *Sur la convergence des suites de mesures de Radon*. Anais Acad. Brasil Ci. *23* (1951), 21-38, 277-282.

[3] GANSSLER, P.: *Compactness and sequential compactness in spaces of measures*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.

[4] GROTHENDIECK, A.: *Sur les applications lenéaires faiblement compactes d'espaces du type* C (K). Canadian J. Math. *5* (1953), 157-214.

[5] JIMENEZ GUERRA, P.: *Compactness in the space of Radon measures of type* ($\mathcal{H}$). Proc. Irish Acad. (En publicación)

[6] JIMENEZ GUERRA, P.: *Stability of tensor products of Radon measures of type* ($\mathcal{H}$). Vector space measures and Applications vol. II. Proceedings, Dublin 1977. Lectures Notes in Math. n.º 645, p. 97-108.

[7] PROKHOROV, YU. V.: *Convergence of rendoms processes and limit theorems in probability theory*. Theor. Probab. Appl. *1* (1956), 157-214.

[8] RODRIGUEZ-SALINAS, B. Y P. JIMENEZ GUERRA: *Medidas de Randon de tipo* ($\mathcal{H}$) *en espacios topológicos arbitrarios*. Memorias de la R. Acad. Ci. Madrid. En publicación.

[9] SCHWARTZ, L.: *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*. Oxford University Press. 1973.

[10] TOPSØE, F.: *Compactness in spaces of measures*. Studia Math. XXXVI (1970), 194-212.

[11] VARADAJAN, V. S.: *Measures on topological spaces*. Amer Math. Soc. Transl., ser. II, *48* (1965), 161-228.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense
Ciudad Universitaria
Madrid-3 ESPAÑA