

TACHIONI E MONOPOLI MAGNETICI NELL'UNIVERSO DI DE SITTER

di

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1 — L'UNIVERSO DI DE SITTER E LE COORDINATE PROIETTIVE

Recentemente E. H. KERNER ha fatto vedere che un particolare tipo di trasformazioni proiettive generalizza la nozione di riferimento inerziale, nel senso che il movimento di una particella libera viene trasformato in quello di una particella libera [1]. Si ottiene allora un gruppo di trasformazioni a 10 parametri, che generalizza le trasformazioni di Poincaré, e che contiene due costanti universali c (velocità della luce) ed r (raggio del cronotopo). Quando il raggio del cronotopo tende ad infinito, si ricade nelle trasformazioni del gruppo di Poincaré. Queste trasformazioni proiettive possono essere interpretate come un tipo di rotazioni dello spazio delle coordinate omogenee (a cinque dimensioni), che unifica le rotazioni spaziali, i movimenti inerziali e le traslazioni spazio-temporali.

Le trasformazioni proposte dal KERNER non sono altro che quelle del gruppo di Fantappié a 10 parametri, da me calcolate esplicitamente nel 1956, le quali mutano in sé stesso il cronotopo di CASTELNUOVO, e cioè la rappresentazione geodetica piana dell'Universo di DE SITTER [2].

Ad analoghe conclusioni erano giunti nel 1973 R. L. MALLETT e G. N. FLEMING, i quali hanno mostrato che le coordinate proiettive si prestano bene allo studio dell'Universo di DE SITTER [3].

In questo lavoro ci proponiamo di esaminare il problema dei tachioni e quello dei monopoli magnetici, come si presentano nella relatività proiettiva.

Il problema delle velocità superiori a quella della luce è stato da me posto sin dal 1958, quando ho fatto vedere che nella relatività proiettiva la velocità della luce non è più una velocità limite, e sono

possibili velocità superiori a quella della luce senza che le trasformazioni del gruppo di Fantappié diventino immaginarie (1960) [4].

Se si rimane nell'ambito della relatività ristretta, H. ARZELIES ha studiato nel 1957 le trasformazioni del gruppo di Lorentz per $V > c$. Nel 1967 G. FEINBERG ha introdotto il termine di «tachione» per indicare una particella con velocità superiore a quella della luce [5], mentre nel 1974 E. RECAMI ed R. MIGNANI hanno costruito una teoria dei tachioni su basi gruppali, ampliando opportunamente il gruppo di Lorentz. [6].

Nella relatività proiettiva il tachione non può essere definito in base alla velocità della luce, ma basandoci sulla natura della sua linea oraria, che deve essere di genere spazio. Infatti una particella lontana può superare la velocità della luce, senza che la sua linea oraria diventi di genere spazio.

I «monopoli magnetici» e cioè i poli magnetici isolati, sono stati introdotti dal DIRAC nel 1931, con considerazioni basate sulla fisica quantistica [7]. Nel 1958 [4] ho fatto vedere che il campo elettromagnetico, in presenza di cariche elettriche e di monopoli magnetici deve essere descritto utilizzando due potenziali elettromagnetici. Lo stesso accade nella idrodinamica relativista dei fluidi perfetti, in presenza di sorgenti e di vortici: in tal caso il campo idrodinamico viene descritto da due potenziali, come ha fatto vedere O. COSTA DE BEAUREGARD nel 1949 [8].

Passando alla relatività proiettiva, queste due teorie vengono riunite in una teoria unica, nella quale il campo magnetoidrodinamico è descritto da due potenziali. Appare così un nuovo ed interessante legame tra il problema dei monopoli magnetici e la fisica del plasma.

Successivamente, nel 1962, la teoria dei monopoli magnetici utilizzando due potenziali è stata costruita da N. CABIBBO ed E. FERRARI [9], rimanendo nell'ambito della relatività ristretta. Tale teoria è stata poi ulteriormente sviluppata in questi ultimi anni.

Se poi ci riferiamo al problema dei Buchi Neri della gravitazione e del collasso gravitazionale, esso richiede la costruzione di una «teoria unitaria» della materia e della elettricità. Se si vuole rimanere nell'ambito di una teoria su basi gruppali, occorre passare alla «relatività conforme» nella quale l'Universo è rappresentato da una ipersfera a 5 dimensioni, che ammette come movimenti rigidi in sé quelli del gruppo delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni, a 15 parametri. In tale teoria la 5.^o coordinata può essere interpretata come un «se-

condo tempo», oppure può essere collegata alla massa. Le corrispondenti equazioni di Maxwell generalizzate riuniscono in una teoria unica il campo idrodinamico e quello gravitazionale.

Si vede così come la «teoria degli Universi fisici» del FANTAPPIÉ, basata sulla teoria dei gruppi [13], ci permette di costruire tutta una serie di modelli ipersferici di Universo a 3,4,.. n dimensioni, basati sui gruppi delle rotazioni $R_4, R_5 \dots R_{n+1}$. Ognuno di tali modelli contiene i precedenti ed è contenuto nei successivi, ed essi ci danno i successivi perfezionamenti della fisica.

2 — IL GRUPPO DI FANTAPPIÉ ED IL CRONOTOPO DI CASTELNUOVO

Lo spazio-tempo di De Sitter a curvatura costante, può essere studiato mediante la sua rappresentazione geodetica piana, e si ottiene così il «cronotopo di Castelnuovo», rappresentato dai punti di uno spazio proiettivo P_4 a quattro dimensioni, esterni all'assoluto di Cayley-Klein di equazione

$$(2,1) \quad r^2 A^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 + r^2 = 0$$

Occorre allora introdurre una «doppia scala» dei tempi e delle distanze, a seconda che ci poniamo nello spazio a curvatura costante o nello spazio piatto tangente del singolo osservatore.

Se ci limitiamo a due dimensioni, il legame tra le misure «assolute» (ξ, τ) e quelle «relative» (x, t) , è dato dalle formule

$$(2,2) \quad \boxed{\xi = r \operatorname{arctg} (x/r) \quad ; \quad \tau = (t_0/2) \log (t_0 + t)/(t_0 - t)}$$

dove $t_0 = r/c$ è l'età apparente dell'Universo.

La doppia scala dei tempi, è del tipo di quella di MILNE [10]:

$$(2,3) \quad \tau = t_0 + t_0 \log (t/t_0)$$

e ad essa si riduce in prima approssimazione. In fig. 1 sono rappresentate le due scale del tempo, nella teoria di Milne (a) e nella relatività proiettiva (b). Si vede che nella teoria di Milne, se ci poniamo nella scala cinematica (t) appare una singolarità iniziale, (A) mentre nella relatività proiettiva c'è la singolarità iniziale (A) e quella finale (Ω).

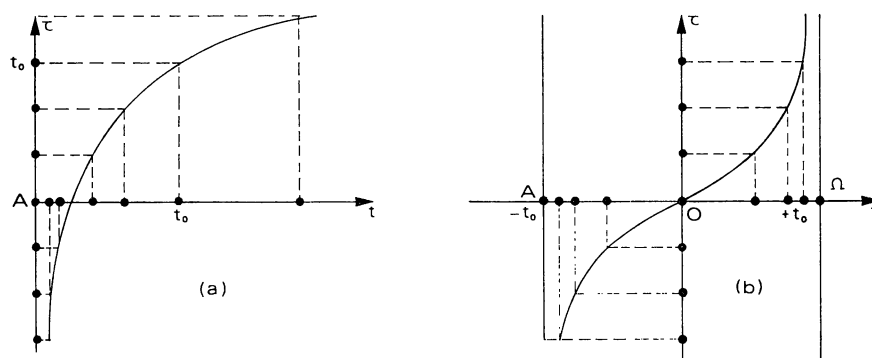


fig. 1 — (a) Il tempo dinamico (τ) e quello cinematico (t) nella teoria di Milne; (b) il tempo assoluto (τ) e quello relativo (t) nella relatività proiettiva basata sul gruppo di Fantappié.

La più generale trasformazione proiettiva in due dimensioni (x, t) é data dalle formule

$$(2,4) \quad x' = \frac{a_{11}x + a_{14}t + a_{15}}{a_{51}x + a_{54}t + a_{55}} \quad ; \quad t' = \frac{a_{41}x + a_{44}t + a_{45}}{a_{51}x + a_{54}t + a_{55}}$$

e ad essa corrispondono i seguenti tre parametri [4]:

$$(2,5) \quad T = \frac{a_{15}}{a_{55}} \quad ; \quad T_0 = \frac{a_{45}}{a_{55}} \quad ; \quad V = \frac{a_{15}a_{54} - a_{14}a_{55}}{a_{54}a_{45} - a_{44}a_{55}}$$

Tre interessanti esempi di trasformazioni del tipo (4) si possono ottenere moltiplicando tra loro le trasformazioni del gruppo di Fantappié ad un sol parametro, da me calcolate nel 1956.

I CASO — Se moltiplichiamo una traslazione spaziale (T) per una traslazione temporale (T_0), otteniamo la trasformazione

$$(2,6) \quad x' = \frac{Ax + \alpha\gamma ct + aT}{\gamma t/t_0 - \alpha A x/r + a} \quad ; \quad t' = \frac{a^2 t + at T_0}{\gamma t/t_0 - \alpha A x/r + a}$$

dove abbiamo posto $a^2 = 1 + \alpha^2$ ed $A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2$. In base alle (5) essa corrisponde ai due parametri (T, T_0), perché si ha

$$(2,7) \quad V = \frac{a T \gamma / t_0 - \alpha \gamma c a}{\gamma a T_0 / t_0 - a^2 a} = \frac{\alpha \gamma c - \alpha \gamma c}{-(1 + \alpha^2 - \gamma^2)} = 0.$$

II CASO — Se invece moltiplichiamo una traslazione temporale (T_0) per una spaziale (T), si ottiene una trasformazione del tutto diversa

$$(2,8) \quad x' = \frac{b^2 x + bT}{\alpha x/r - A \gamma t/t_0 + b} \quad ; \quad t' = \frac{\alpha \gamma x/c + At + b T_0}{\alpha x/r - A \gamma t/t_0 + b}$$

dove $b^2 = 1 - \gamma^2$. Essa corrisponde ai due parametri (T, T_0) ed al terzo parametro, dipendente dai primi due

$$(2,9) \quad V = \frac{-bT A \gamma / t_0}{-A \gamma b T_0 / t_0 - Ab} = \frac{c \alpha \gamma}{1 + \gamma^2} \neq 0.$$

Ne segue che le traslazioni non sono tra loro permutabili.

III CASO — Se infine moltiplichiamo una traslazione spaziale (T), una temporale (T_0) ed un moto uniforme (V), con V e T diretti lungo l'asse delle x , otteniamo la trasformazione

$$(2,10) \quad \begin{cases} x' = \frac{Ax + [\beta + (\alpha - \beta\gamma) \gamma] ct + BT}{(\beta\gamma - \alpha) Ax/r + (\gamma - \alpha\beta) t/t_0 + B} \\ t' = \frac{A \beta x/c + [1 + \alpha(\alpha - \beta\gamma)] t + BT_0}{(\beta\gamma - \alpha) Ax/r + (\gamma - \alpha\beta) t/t_0 + B} \end{cases}$$

dove $B^2 = 1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2$. Essa corrisponde ai tre parametri indipendenti (T, T_0, V) perché, in base alle (5) si ha $T = T; T_0 = T_0$, mentre

$$(2,11) \quad V = \frac{(\gamma - \alpha\beta) BT/t_0 - [\beta + (\alpha - \beta\gamma) \gamma] B}{(\gamma - \alpha\beta) BT_0/t_0 - B [1 + \alpha(\alpha - \beta\gamma)]} = \beta c A/A = V$$

Dalle trasformazioni (10), procedendo come nella relatività ristretta, si ricava la formula di trasformazione delle lunghezze

$$(2,12) \quad \boxed{l = l_0 (B + (\beta\gamma - \alpha) Al_0/r) / (1 + (\beta\gamma - \alpha) \alpha) A}$$

la quale, nel caso di un sol parametro, si riduce alle formule più semplici

$$(2,13) \quad l = l_0 (1 - \alpha l_0/r)/(1 + \alpha^2) \quad ; \quad l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad ; \\ l = l_0 / \sqrt{1 - \gamma^2} .$$

Invece, le durate si trasformano nel seguente modo

$$(2,14) \quad \boxed{d = d_0 A / [B + (\alpha - \beta\gamma) d_0/t_0]}$$

e nel caso di un sol parametro, otteniamo le

$$(2,15) \quad d = d_0 \sqrt{1 + \alpha^2} \quad ; \quad d = d_0 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad ; \\ d = d_0 (1 - \gamma^2) / (1 + \gamma d_0/t_0)$$

Dalle (10) segue la nuova legge di addizione delle velocità, se osserviamo che il moto uniforme di equazione $x' = V t'$, si trasforma in un moto ancora uniforme, ma con la velocità

$$(2,16) \quad W = [(U + V) + (\alpha - \beta\gamma) (\gamma + \alpha U/c)] / A (1 + U V/c^2)$$

Tale formula, se ci poniamo sul cono-luce dell'osservatore, nel caso in cui $\alpha = \gamma$, si riduce a quella più semplice

$$(2,17) \quad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + U V/c^2} + \alpha^2 \frac{(1 - V/c) (1 + U/c)}{1 + U V/c^2}}$$

la quale, per $V = c$, ci dà ancora $W = c$, bentre, per $U = c$, ci dà una velocità iper-c, data da

$$(2,18) \quad W = c + 2\alpha^2 c (1 - V/c) / (1 + V/c)$$

essa si riduce alla $W = c$, se si ha pure $V = c$.

3 — LE VELOCITÀ IPER-C E LA LEGGE DI ESPANSIONE-CONTRAZIONE COSMICA

Nel cronotopo di Castelnuovo (in due dimensioni), dato il punto $P(x, t)$, le due rette del cono-luce uscenti da P , sono le due tangenti

all'assoluto condotte dal punto P . I loro coefficienti angolari sono le soluzioni della equazione $B = 0$, e sono dati da

$$(3,1) \quad \beta_1 = -(A + \alpha\gamma)/(1 - \gamma^2); \beta_2 = (A - \alpha\gamma)/(1 - \gamma^2)$$

Queste due rette formano un angolo θ che varia da punto a punto, perché

$$(3,2) \quad \text{tang } \theta = (\beta_1 - \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2) = 2A/(\alpha^2 + \gamma^2)$$

Ne segue che nella origine ($\alpha = \gamma = 0$) si ha $\theta = \pi/2$, sull'assoluto di equazione $A = 0$, si ha $\theta = 0$, e sul cono-luce ($\alpha = \pm \gamma$) si ha $\text{tang } \theta = \alpha^{-2}$. Al limite relativistico, la (2) si riduce alla $\theta = \pi/2$, cioè nel cronotopo di Minkowski tale angolo non dipende dal particolare punto che si considera, perché costante.

Le trasformazioni (2,10) del gruppo di Fantappié, sono reali per $B^2 \geq 0$ e per $A^2 \geq 0$, cioè se il punto $P(x,t)$ è fuori dell'assoluto, e se in quel punto la velocità soddisfa alla condizione

$$(3,3) \quad \beta_1 \geq \beta \leq \beta_2$$

che generalizza la $-1 \leq \beta \leq +1$, valida nella relatività ristretta.

Se ci poniamo sul cono-luce dell'osservatore (per es. per $\alpha = -\gamma$), la (3) si riduce alla condizione più semplice

$$(3,4) \quad -1 \leq \beta \leq (1 + \alpha^2)/(1 - \alpha^2)$$

e quindi tale condizione è soddisfatta anche per $\beta > 1$. Se ne deduce che nella relatività proiettiva la velocità della luce può essere superata, e quindi la distinzione tra i *bradioni* (a velocità sub- c), i *luxoni* (a velocità c) ed i *tachioni* (a velocità iper- c), valida nella relatività ristretta, non può essere più basata sulla velocità della luce.

Si deve allora utilizzare la natura della linea oraria della particella. Più precisamente, avremo i *bradioni* se la loro linea oraria è di genere tempo, i *luxoni*, con linea oraria di genere luce ed infine i *tachioni* con linea oraria di genere spazio.

Nel cronotopo di Castelnuovo vale la seguente legge di espansione-contrazione cosmica, che si ricava a partire dal gruppo di Fantappié [11]

$$(3,5) \quad \begin{cases} \beta_E = \alpha/(1 + \gamma) & \text{per } -1 \leq \gamma < 0 \\ \beta_C = \alpha/(\gamma - 1) & \text{per } 0 < \gamma \leq +1 \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con β_E la velocità di espansione, e con β_C quella di contrazione. E' facile verificare che le velocità (5) sono soluzioni della equazione $B = 1$, e che inoltre soddisfano alla condizione (3). Infatti, sostituendo in essa tali velocità, segue che dovrà aversi $-A \leq \alpha \leq +A$, la quale é verificata per $|\alpha| < 1$.

Ne segue che *una galassia lontana od un quasar, può superare la velocità della luce, pur rimanendo un bradione, e cioè con la linea oraria di genere tempo.*

La legge relativistica dell'effetto Döppler, deve essere allora modificata in modo da renderla compatibile con le velocità iper- c . Procedendo come nella relatività ristretta, dal gruppo di Fantappié segue la nuova formula del red-shift [11]

$$(3,6) \quad \boxed{1 + z = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta) + \alpha^2}}$$

dove abbiamo indicato con z il red-shift. Se ci poniamo sul cono-luce dell'osservatore, dove vale la legge di espansione $\beta = \alpha/(1 - \alpha)$, la (6) si riduce alla formula classica $V = cz$. Ne segue che un quasar con red-shift z , avrà una velocità di fuga ed una distanza date da

$$(3,7) \quad V = cz \quad ; \quad x = cz/(1 + z)$$

e quindi, per $z > 1$, la sua velocità é iper- c , pur rimanendo sempre un bradione.

Integrando le equazioni differenziali (6), otteniamo le linee orarie

$$(3,8) \quad \begin{cases} x = k(t + t_0) & \text{per } -t_0 \leq t < 0 \\ x = k(t_0 - t) & \text{per } 0 < t \leq +t_0 \end{cases}$$

dove k é la costante di integrazione. Otteniamo così due famiglie di segmenti, con un estremo sull'asse delle x e l'altro estremo nei punti $A(0, -t_0)$ (singolarità iniziale) ed $\Omega(0, +t_0)$ (singolarità finale), come é illustrato nella figura 2.

Un campo di velocità $V = \varphi(x, t)$ é ad accelerazione nulla, se si ha

$$(3,9) \quad dV/dt = (\partial\varphi/\partial x) \cdot (dx/dt) + \partial\varphi/\partial t = \varphi \partial\varphi/\partial x + \partial\varphi/\partial t = 0$$

Esso quindi sarà del tipo

$$(3,10) \quad \varphi(x, t) = - (\partial\varphi/\partial t)/(\partial\varphi/\partial x)$$

Un importante esempio di campo di velocità ad accelerazione nulla, è quello della espansione cosmica $V = x/(t + t_0)$. Si ha infatti

$$(3,11) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{(t + t_0) V - x}{(t + t_0)^2} = \frac{x - x}{(t + t_0)^2} = 0.$$

E' facile verificare che anche il campo β_C di contrazione cosmica, ed i due campi β_1 e β_2 sono tali che

$$(3,12) \quad d\beta_C/dt = 0 \quad ; \quad d\beta_1/dt = 0 \quad ; \quad d\beta_2/dt = 0$$

Un campo di velocità ad accelerazione nulla, sarà chiamato «substrato» nel senso di Milne.

4 — LA MECCANICA PROIETTIVA DEL PUNTO LIBERO ED I TACHIONI

Il problema dei tachioni si presenta pure nella meccanica proiettiva del punto libero. Come sappiamo [12], le equazioni del moto sono date da

$$(4,1) \quad dM_{AB}/d\tau = 0 \quad \text{con} \quad M_{AB} = m_0(\bar{x}_A \bar{u}_B - \bar{x}_B \bar{u}_A)$$

dove $A, B = 1, 2, \dots, 5$. Il tensore «momento angolare» M_{AB} comprende sia il momento lineare che quello angolare relativistici.

Se ci limitiamo al caso bidimensionale (x, t) dalle (1) segue l'equazione

$$(4,2) \quad [1 + \alpha(\alpha - \beta\gamma)] \cdot (dV/dt) = 0$$

la quale si scinde nella solita equazione $dV/dt = 0$, che rappresenta i moti rettilinei ed uniformi, e nella nuova equazione

$$(4,3) \quad \boxed{\beta_T = (1 + \alpha^2)/(\alpha\gamma)}$$

la quale rappresenta un «campo di velocità», analogo a quello della espansione-contrazione cosmica (3,6). E' facile dimostrare che tale campo risulta di tipo «tachionico», perché non soddisfa alla condizio-

ne (3,1). Infatti, sostituendo la (3) nella (3,3), segue che $-\alpha\gamma \leq 1 \leq +\alpha\gamma$, la quale, per $|\gamma| \leq 1$ e per $|\alpha| \leq 1$ non è soddisfatta.

Ne segue che al campo bradionico (3,5), corrisponde un campo tachionico dato dalla (3). Il legame tra la velocità di espansione cosmica (β_E) e quella tachionica (β_T) è dato dalla relazione

$$(4,4) \quad \beta_T = \beta_E (1 + 1/\alpha^2)(1 + 1/\gamma)$$

e si verifica che

$$(4,5) \quad d\beta_T/dt = -\beta_T (1/\alpha^2)$$

Dato il punto $P(x, t)$, le due velocità limiti (β_1, β_2), la velocità bradionica e quella tachionica, sono legate nel seguente modo

$$(4,6) \quad (1 - \gamma) \beta_1 \beta_2 = \gamma \beta_E \beta_T$$

L'equazione differenziale (3) può scriversi così

$$(4,7) \quad dx/dt = (r/x) (r/x + x/r)$$

la quale, risolta, ci dà la famiglia di «moti iperbolici»

$$(4,8) \quad x^2 - k^2 t^2 + r^2 = 0$$

dove k è la costante di integrazione.

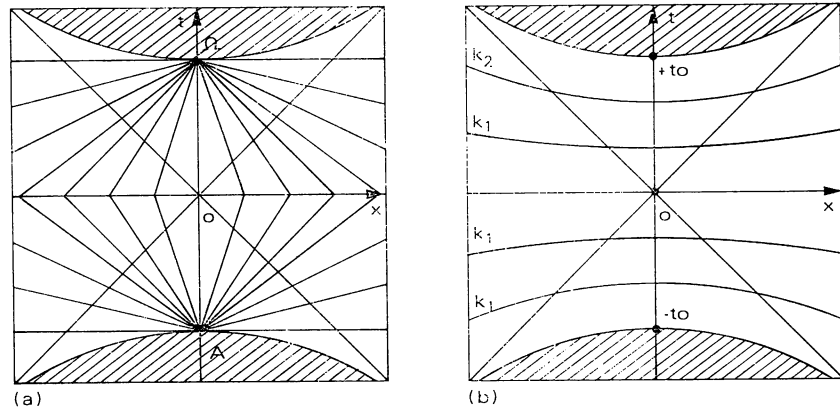


Fig. 2 — (a) le linee orarie del campo «bradionico» di espansione-contrazione cosmica; (b) le linee orarie del corrispondente campo «tachionico»

Per $k = c$, otteniamo l'assoluto di equazione $A^2 = 0$; per $k < c$ si ottengono delle linee orarie fuori dello spazio fisico.

Infine, per $k > c$, si hanno le linee orarie (8), cui corrisponde la legge del moto e la velocità

$$(4,9) \quad x = \sqrt{k^2 t^2 - r^2} \quad ; \quad V = a_0 t / \sqrt{(a_0 t / k)^2 - 1}$$

dove $a_0 = k^2 / r^2$. La formula della velocità è simile a quella valida per il moto iperbolico relativistico

$$(4,10) \quad V = at / \sqrt{(at/c)^2 + 1}$$

Dalla seconda delle (9) segue che la velocità del punto considerato, varia da infinito (per $t = k/a_0 = r/k$) al valore $k > c$ (per r tendente all'infinito). Si tratta quindi del moto di un tachione. Si osservi che per k tendente all'infinito, si ottiene per linea oraria l'asse delle x , e cioè una velocità tachionica infinita.

Per concludere osserviamo che se ci poniamo sul cono-luce dell'osservatore (per es. per $\alpha = \gamma$), la (3) si riduce alla semplice legge

$$(4,11) \quad \boxed{\beta_T = 1 + 1/\alpha^2}$$

la quale viene a coincidere con l'inverso della velocità (2,9) che appare quando componiamo una traslazione temporale con una spaziale.

5 — STUDIO DELLA DERIVAZIONE PROIETTIVA PENTADIMENSIONALE

Uno dei più importanti problemi che si presentano nella «relatività proiettiva» è quello del passaggio dalla formulazione in coordinate proiettive omogenee (\bar{x}_A) a quella in coordinate spazio-temporali (x^i), con $i = 1, \dots, 4$. Una volta chiarito tale problema, tutta la teoria acquista un semplice e chiaro significato fisico, e le formule ottenute nel formalismo pentadimensionale, possono essere trascritte in termini «fisici» e cioè spazio-temporali.

Il problema è stato da me risolto nel 1969, normalizzando le coordinate proiettive con la condizione $x_A x_A = r^2$ [13], e si ottengono allora le formule che legano le coordinate proiettive a quelle non proiettive:

$$(5,1) \quad \boxed{\bar{x}_i = x_i/A \quad ; \quad \bar{x}_5 = r/A}$$

Se poi abbiamo una funzione $\bar{\varphi}(\bar{x}_A)$ delle coordinate proiettive omogenee, mediante la sostituzione (1), essa viene trasformata in una nuova funzione $\varphi(x_i)$ delle coordinate non omogenee. Se supponiamo che la funzione $\bar{\varphi}$ è omogenea di grado N , otteniamo il legame tra le derivate parziali proiettive ($\bar{\partial}_A = \partial/\partial\bar{x}_A$), e quelle non proiettive ($\partial_i = \partial/\partial x_i$), dato da [13]:

$$(5,2) \quad \begin{cases} \bar{\partial}_i \bar{\varphi}(\bar{x}_A) = [A\partial_i + (N/Ar^2) x_i] \varphi(x_i) \\ \bar{\partial}_5 \bar{\varphi}(\bar{x}_A) = [-Ax_s \partial_s + (N/A)] \varphi(x_i) \end{cases}$$

Facciamo adesso due semplici esempi che illustrano la tecnica con cui si passa dal formalismo 5-dimensionale a quello 4-dimensionale.

1.º ESEMPIO — Consideriamo la identità

$$(5,3) \quad \boxed{\bar{\partial}_A \bar{x}_B = \delta_{AB}}$$

dove δ_{AB} è il tensore di Kronecker dello spazio a 5 dimensioni. Essa equivale alle seguenti equazioni dello spazio a 4 dimensioni:

$$(5,4) \quad \bar{\partial}_i \bar{x}_k = \delta_{ik} \quad ; \quad \bar{\partial}_i \bar{x}_5 = 0 \quad ; \quad \bar{\partial}_5 \bar{x}_i = 0 \quad ; \quad \bar{\partial}_5 \bar{x}_5 = 0$$

Se teniamo presente che $\partial_i A = x_i/Ar^2$, e che $N = 1$, si ha per le (2)

$$\begin{aligned} \partial_i \bar{x}_k &= (A\partial_i + x_i/Ar^2) (x_k/A) = A(A\delta_{ik} - x_i x_k/Ar^2)/A^2 + \\ &+ x_i x_k/A^2r^2 = \delta_{ik} - x_i x_k/A^2r^2 + x_i x_k/A^2r^2 = \delta_{ik}. \end{aligned}$$

In modo analogo, tenendo presente che $r^2 + x_s x_s = A^2r^2$, avremo

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_5 \bar{x}_5 &= (1/r) (-Ax_s \partial_s + 1/A) (r/A) = (1/r) (rx_s x_s/A^2r^2 + r/A^2) = \\ &= (A^2 - 1)/A^2 + 1/A^2 = 1 \end{aligned}$$

e così via per le altre due uguaglianze (4).

2.º ESEMPIO — Consideriamo la funzione omogenea di grado $N = 3$ nelle \bar{x}_A :

$$(5,5) \quad \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \bar{x}_5) = \bar{x}_1^3 + \bar{x}_5^2 \bar{x}_1 = (x^3 + r^2 x)/A^3 = \varphi(x)$$

Derivando rispetto alle due variabili proiettive, avremo

$$(5,6) \quad \partial_1 \bar{\varphi} = 3 \bar{x}_1^2 + \bar{x}_5^2 = (3x^2 + r^2)/A^2; \quad \bar{\partial}_5 \bar{\varphi} = 2 \bar{x}_5 \bar{x}_1 = 2rx/A^2$$

Agli stessi risultati si perviene applicando le formule (2), ed osservando che nel nostro caso si ha $r^2 + x^2 = r^2 A^2$. Avremo allora

$$(5,7) \quad \varphi(x) = r^2 x/A \quad ; \quad \partial \varphi / \partial x = r^2 / A^3$$

Ne segue che

$$\bar{\partial}_1 \bar{\varphi} = A \partial \varphi / \partial x + 3 \varphi x / A r^2 = (3x^2 + r^2)/A^2$$

$$\bar{\partial}_5 \bar{\varphi} = -Ax \partial \varphi / \partial x + 3 \varphi / A = 2rx/A^2$$

che coincidono con le (6). Con questo metodo é possibile trascrivere in forma quadridimensionale le equazioni di Maxwell generalizzate, e le altre equazioni differenziali che intervengono nella relatività proiettiva.

6 — LA MAGNETOIDRODINAMICA PROIETTIVA E LA MATERIA IPERDENSE

Nella relatività proiettiva, le equazioni di Maxwell generalizzate

$$(6,1) \quad \boxed{Rot H_{AB} = J_{ABC} \quad ; \quad Div H_{AB} = I_A}$$

si possono interpretare come equazioni del «campo magnetoidrodinamico», nelle quali $H_{AB} = (E, iH, C, iC_0)$ é il tensore magnetoidrodinamico, $J_{ABC} = (iQ, j, \vec{\omega}, ia)$ é il tensore carica-corrente elettrica + vortice idrodinamico, mentre il vettore $I_A = (\sigma, ig_0, g)$ rappresenta la sorgente idrodinamica + la carica-corrente magnetica [14].

La forza ponderomotrice si può scrivere sotto forma di divergenza del tensore energetico del campo magnetoidrodinamico

$$(6,2) \quad f_A = J_{ABC} H_{BC} + 2 I_B H_{AB} = Div T_{AB}$$

dove abbiamo posto

$$(6,3) \quad T_{AB} = H_{AS}H_{SB} + (1/4) H_{RS}H_{RS} \delta_{AB}$$

Le equazioni (1) si possono scrivere in forma tridimensionale, se osserviamo che in base alle (5,2) si ha

$$(6,4) \quad \begin{cases} \bar{\partial}_\alpha = A\partial_\alpha + (N/Ar^2) x_\alpha & ; \quad \bar{\partial}_4 = (A/c)\partial/\partial t + (Nc/Ar^2) t \\ r\bar{\partial}_5 = -A(x_\alpha\partial_\alpha + t\partial/\partial t) + N/A \end{cases}$$

dove $\alpha = 1,2,3$. Avremo allora

$\begin{aligned} \text{div } E &= \varrho & (6,5) \\ \text{rot } H - \bar{\partial}_4 E &= j \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{div } H + \bar{\partial}_5 C_0 &= g_0 & (6,6) \\ \text{rot } E + \bar{\partial}_4 H - \bar{\partial}_5 C &= g \end{aligned}$
$\begin{aligned} \text{rot } C - \bar{\partial}_5 E &= \vec{\omega} \\ \text{grad } C_0 + \bar{\partial}_4 C - \bar{\partial}_5 H &= a \end{aligned}$	$\text{div } C + \bar{\partial}_4 C_0 = \sigma$

e gli operatori *div*, *grad*, *rot* sono scritti in coordinate proiettive \bar{x}_A .

Seguendo il PERSICO, si può introdurre, accanto alla *corrente elettrica di spostamento* j_4 di Maxwell, la *corrente magnetica di spostamento* g_4 , date da

$$(6,7) \quad j_4 = \bar{\partial}_4 E \quad ; \quad g_4 = \bar{\partial}_4 H$$

In modo analogo, i due termini

$$(6,8) \quad \sigma_4 = \bar{\partial}_4 C_0 \quad ; \quad a_4 = \bar{\partial}_4 C$$

saranno chiamati rispettivamente *sorgente* ed *accelerazione* di spostamento.

Allora, i due nuovi termini che appaiono nella relatività proiettiva

$$(6,9) \quad g_{05} = \bar{\partial}_5 C_0 \quad ; \quad g_5 = \bar{\partial}_5 C$$

li chiameremo rispettivamente *monopolo* e *corrente magnetica di traslazione*, mentre il *vortice* e *l'accelerazione di traslazione*, sono così definiti

$$(6,10) \quad \vec{\omega}_5 = \bar{\partial}_5 E \quad ; \quad a_5 = \bar{\partial}_5 H$$

essi infatti appaiono per effetto di una traslazione nello spazio-tempo.

Le equazioni di Maxwell generalizzate assumono allora il seguente aspetto

$$(6,11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} E = \rho \\ \operatorname{div} H = g_0 + g_{05} \\ \operatorname{div} C = \sigma + \sigma_4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} E = g - g_4 + g_5 \\ \operatorname{rot} H = j + j_4 \\ \operatorname{rot} C = \vec{\omega} + \vec{\omega}_5 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{grad} C_0 = a - a_4 + a_5$$

con le condizioni di conservazione

$$(6,12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} (j + j_4) = 0 \\ \operatorname{div} (\vec{\omega} + \vec{\omega}_5) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} (g - g_4 + g_5) = 0 \\ \operatorname{rot} (a - a_4 + a_5) = 0 \end{array} \right.$$

E' interessante osservare che i nuovi termini che appaiono nelle equazioni di Maxwell generalizzate, diventano apprezzabili su scala cosmica ($x \sim r$; $t \sim t_0$) ovvero per materia iperdensa e per alte energie. Infatti, poiché l'indice del fluido è dato da $f^2 = \mu + p/c^2$, e si ha $C_i = f u_i + q_i/c^2$, si vede che se la materia è iperdensa (cioè se μ è grande), oppure intervengono alte pressioni (cioè μ è grande), i nuovi termini non sono più trascurabili rispetto al raggio del cronotopo r . Lo stesso accade quando il campo elettrico E e quello magnetico H sono molto intensi.

7 — LA TERMOIDRODINAMICA E L' ELETTROMAGNETISMO PROIETTIVI

E' noto che nella magnetoidrodinamica relativista dei fluidi «ideali», il campo magnetico è nullo, perché la conducibilità del fluido è infinita

$$(7,1) \quad e_i = F_{ik} u_k = 0$$

dove F_{ki} è il tensore elettromagnetico. Da tale condizione segue che il campo elettrico è dato da

$$(7,2) \quad c E = v \wedge H \quad ; \quad H \times E = 0$$

e la seconda condizione è identicamente soddisfatta.

Nella magnetoidrodinamica proiettiva, in ogni punto del fluido si possono definire il «vettore posizione» \bar{x}_A ed il «vettore velocità» \bar{u}_A , tali che

$$(7,3) \quad \boxed{\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2 \quad ; \quad \bar{u}_A \bar{u}_A = -c^2 \quad ; \quad \bar{x}_A \bar{u}_A = 0}$$

Si hanno allora due importanti casi particolari, e cioè la termoidrodinamica proiettiva e l'elettromagnetismo proiettivo. [15]

a) Nella «termoidrodinamica proiettiva», il campo elettromagnetico f_{AB} è nullo, cioè

$$(7,4) \quad r f_{AB} = H_{ABC}^* x_C = 0$$

dove H_{ABC}^* è il «duale» del tensore magnetoidrodinamico H_{AB} . In questo caso il tensore magnetoidrodinamico si riduce al momento polare (rispetto alla origine) del campo idrodinamico $r c_A = H_{AB} x_B$, cioè

$$(7,5) \quad r H_{AB} = c_A \bar{x}_B - c_B \bar{x}_A$$

Ne segue che il tensore energetico (6,3) si riduce a quello della termoidrodinamica

$$(7,6) \quad T_{AB} = c_A c_B - c_S c_S (1/2 \delta_{AB} - 1/r^2 \bar{x}_A \bar{x}_B)$$

In questo caso, al campo idrodinamico c_A è «associato» un campo elettromagnetico, dato dalla (4), cioè

$$(7,7) \quad \boxed{\begin{aligned} E &= C \Lambda(x/r) \quad ; \quad H = C_0(x/r) + (t/t_0) C \\ H \wedge x + ct \cdot E &= 0 \end{aligned}}$$

e la terza condizione è identicamente soddisfatta dalle prime due. Tale campo è nullo nella origine ($x = t = 0$) e diventa apprezzabile su scala cosmica, oppure per materia iperdensa.

Il campo associato (7) si riduce a quello magnetico in due casi, e cioè se il campo idrodinamico è radiale ($C = kx$), ovvero se il fluido è in quiete e non ci sono scambi termici ($C = 0$, $C_0 = f$). In quest'ultimo caso si ha

$$(7,8) \quad \boxed{H = (cf/r) x = H f x}$$

dove $H = c/r$ é la costante di Hubble della espansione cosmica. Per tale via si potrebbe spiegare la natura dei campi magnetici intergalattici, che sarebbero legati alla presenza di una densità media della materia dell'Universo dell'ordine di $\mu = 10^{-30}$ gr/cm³ [11].

b) Nello «elettromagnetismo proiettivo» invece, il campo idrodinamico é nullo, cioè

$$(7,9) \quad r c_A = H_{AB} \bar{x}_B = 0$$

Allora si avrà

$$(7,10) \quad r H_{ABC}^* = f_{AB} \bar{x}_C + f_{CA} \bar{x}_B + f_{BC} \bar{x}_A$$

Sostituendo tale espressione nella (6,3) otteniamo il tensore energetico del campo elettromagnetico

$$(7,11) \quad T_{AB} = f_{AS} f_{SB} + 1/2 f_{RS} f_{RS} (1/2 \delta_{AB} + 1/r^2 \bar{x}_A \bar{x}_B)$$

Dalla (9) segue che al campo elettromagnetico é «associato» un campo idrodinamico dato dalle formule

$$(7,12) \quad \boxed{\begin{aligned} C &= EA(x/r) - (t/t_0) H \quad ; \quad C_0 = H \times (x/r) \\ C \wedge x + ct C_0 &= 0 \end{aligned}}$$

e la terza condizione é identicamente soddisfatta dalle prime due.

Nel caso di un campo elettrostatico ($H = 0$), dalle (12) segue che

$$(7,13) \quad C = EA(x/r) \quad ; \quad C_0 = 0$$

Se invece il campo é magnetostatico ($H = 0$), avremo

$$(7,14) \quad C = (t/t_0)H \quad ; \quad C_0 = H \times (x/r)$$

É interessante osservare che nel caso di un campo elettrostatico radiale ($E = kx$) il campo idrodinamico associato é nullo ($C = C_0 = 0$).

Possiamo concludere osservando che questi campi associati sono

legati alla curvatura del cronotopo, perché sono nulli nella origine e si amplificano con la distanza. Viceversa i campi generati da sorgenti puntiformi sono infiniti nella origine e nulli all'infinito. Per tale via si potrebbe spiegare la enorme energia apparentemente emessa dai quasar.

8 — I MONOPOLI MAGNETICI NELLA FISICA RELATIVISTICA E QUANTISTICA

E' noto che i fenomeni magnetici hanno origine dal movimento delle cariche elettriche. Ne segue che le cariche sono sufficienti a produrre sia l'elettricità che il magnetismo. Poiché nei fenomeni elettromagnetici appare una notevole simmetria, P.A.M. DIRAC ha supposto l'esistenza di «monopoli» magnetici isolati, ed ha mostrato che la quantizzazione della carica elettrica deriva dalla esistenza di monopoli magnetici puntiformi, di intensità g_0 . Egli ha mostrato che la teoria quantistica di una particella di carica elettrica e , è logicamente consistente, solo se vale la condizione [7]:

$$(8,1) \quad e \cdot g_0 = n \cdot h/2$$

dove h è la costante di Planck divisa per 2π , ed n è un numero intero. Ne segue che tutte le cariche elettriche sono multipli interi della carica del protone (e), se vale la relazione $g_0 = (137/2) e$. [16].

Nel 1967 L. I. SCHIFF ha generalizzato l'idea di Dirac che la quantizzazione della carica elettrica derivi dalla esistenza di un monopolio magnetico, in modo da includere il caso che il monopolio è esteso nello spazio, ed ha un raggio finito, dato da [17].:

$$(8,2) \quad r_m = g_0^2/M \quad (h = c = 1)$$

dove M è la massa del monopolio. Più recentemente J. SCHWINGER ed A. O. BARUT hanno costruito un modello composto per gli «adroni», nel quale i costituenti posseggono sia la carica elettrica che quella magnetica (*dioni*), mentre il sistema composto è magneticamente neutro [18].

Nel 1974 E. RECAMI ed R. MIGNANI hanno generalizzato la relatività ristretta, in modo da comprendere i sistemi di riferimento a velocità iper- c , ed hanno così ottenuto la «relatività estesa» [19].

In tale teoria noi abbiamo le cariche elettriche con velocità sub- c , e con quadricorrente $J_k(\mathbf{s})$, e quelle con velocità iper- c , descritte dal vettore $J_k(S)$. Le corrispondenti equazioni di Maxwell sono allora le seguenti

$$(8,3) \quad \begin{cases} \text{div } D = \varrho(s) \\ \text{rot } B = J(S) - \partial B/c \partial t \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div } B = -\varrho(S) \\ \text{rot } B = J(s) + \partial D/c \partial t \end{cases}$$

Secondo la relatività estesa, le cariche elettriche con velocità iper- c , si comportano come monopoli magnetici. Infatti, una carica elettrica positiva, dotata della velocità V (iper- c), dà alle equazioni di campo un contributo come se fosse un monopolo magnetico Sud, con velocità $v = c^2/V$, che risulta sub- c . Ne segue che una carica elettrica (e), che si muove con velocità iper- c , ci apparirà come un «monopolo» tachionico, con la carica magnetica

$$(8,4) \quad \boxed{g_0 = -e}$$

La relatività estesa porta quindi alla previsione di una sola «carica», la quale appare come «elettrica» oppure «magnetica», a seconda che la sua velocità sia sub- c oppure iper- c . Inoltre, le equazioni di Maxwell possono essere scritte in una forma perfettamente simmetrica (3), senza ammettere la esistenza di monopoli magnetici.

Si arriva allora alla interessante conclusione che la relazione di Dirac e $g_0 = n \hbar/2$, vale se supponiamo che i monopoli siano a velocità sub- c . Se invece i monopoli sono di natura tachionica, allora sarà valida la relazione alternativa $g_0 = n e$.

9 — I MONOPOLI MAGNETICI E LA RELATIVITÀ PROIETTIVA

Il problema dei monopoli magnetici si presenta in modo del tutto nuovo nella relatività proiettiva, nella quale il campo elettromagnetico F_{ik} e quello idrodinamico C_k sono riuniti nel tensore magnetoidrodinamico F_{AB} . Allora il vettore corrente-carica J_k ed il tensore vortice idrodinamico Ω_{ik} , vengono a formare un unico tensore triplo J_{ABC} , mentre la sorgente idrodinamica σ ed il vettore corrente-carica magnetica I_k si uniscono nel vettore I_A .

Nella relatività proiettiva, a partire dal vettore I_A , si possono definire i due scalari

$$(9,1) \quad \boxed{r \sigma = I_A \bar{x}_A \quad ; \quad c g_0 = I_A \bar{u}_A}$$

e cioè la «sorgente idrodinamica» (σ) e la «carica magnetica» (g_0).

Si possono presentare i seguenti 4 casi distinti:

I CASO — *Il vettore I_A è nullo* ($I_A = 0$) — Allora dalle (1) segue che la sorgente idrodinamica è nulla ($\sigma = 0$) e la carica magnetica è nulla ($g_0 = 0$).

Le equazioni (6,1) della magnetoidrodinamica, scritte in forma quadridimensionale, diventano

$$(9,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot F_{ik} = J_{ikl} \\ Div F_{ik} = \partial_5 C_l \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot C_i = \Omega_{ik} - \bar{\partial}_5 F_{ik} \\ Div C_i = 0 \end{array} \right.$$

Abbiamo in questo caso una corrente-carica magnetica di traslazione ($\bar{\partial}_5 C_i$), la quale scompare, passando al limite relativistico, ed allora ci riduciamo alle equazioni di Maxwell senza monopoli (scritte in forma duale), ed alle equazioni dei fluidi incompressibili (perché $Div C_i = 0$).

II CASO — *Il vettore I_A è radiale* ($r I_A = \sigma \bar{x}_A$). Dalle (1) segue allora che la sorgente idrodinamica non è nulla ($\sigma \neq 0$), mentre la carica magnetica è nulla ($g_0 = 0$), in virtù delle (7,3). Le equazioni di Maxwell generalizzate diventano allora le seguenti

$$(9,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot F_{ik} = J_{ikl} \\ Div F_{ik} = (\sigma/A r) x_i + \bar{\partial}_5 C_i \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot C_i = \Omega_{ik} - \bar{\partial}_5 F_{ik} \\ Div C_i = \sigma/A \end{array} \right.$$

cioè la corrente-carica magnetica è strettamente connessa alla sorgente idrodinamica σ . Passando al limite relativistico, ci riduciamo alle equazioni di Maxwell senza monopoli magnetici (scritte in forma duale) ed alle equazioni dei fluidi compressibili (perché $\sigma \neq 0$).

III CASO — *Il vettore I_A è parallelo alla velocità del fluido* ($c I_A = g_0 u_A$). Sostituendo nelle (1) segue che la sorgente idrodinamica è nulla ($\sigma = 0$), mentre la carica magnetica non è nulla ($g_0 \neq 0$). Avremo allora le equazioni

$$(9,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot F_{ik} = J_{ikl} \\ Div F_{ik} = (g_0/c)\bar{u}_k + \bar{\partial}_5 C_k \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot C_i = \Omega_{ik} - \bar{\partial}_5 F_{ik} \\ Div C_i = (g_0/c)\bar{u}_5 \end{array} \right.$$

In questo caso la sorgente idrodinamica é connessa alla carica magnetica. Passando al limite relativistico ci riduciamo alle equazioni di Maxwell con monopoli magnetici (scritte in forma duale), ed alle equazioni dei fluidi incompressibili.

IV CASO — *Il vettore I_A non é parallelo ad \bar{x}_A e ad \bar{u}_A* — In questo caso piú generale, sia la sorgente idrodinamica che la carica magnetica non sono nulli ($\sigma \neq 0$, $g_0 \neq 0$). Le equazioni di Maxwell generalizzate dono date da

$$(9,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot F_{ik} = J_{ikl} \\ Div F_{ik} = I_k + \bar{\partial}_5 C_k \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Rot C_i = \Omega_{ik} - \bar{\partial}_5 F_{ik} \\ Div C_i = I_5 \end{array} \right.$$

le quali, al limite relativistico si riducono alle equazioni di Maxwell con cariche elettriche e monopoli magnetici (in forma duale) ed a quelle dei fluidi perfetti compressibili.

10 — MONOPOLI MAGNETICI E DOPPIO POTENZIALE

Nel 1958 ho fatto vedere che le equazioni di Maxwell generalizzate (6,1) possono essere risolte introducendo i due potenziali U_A e V_{ABC} , nel seguente modo [20]:

$$(10,1) \quad \boxed{H_{AB} = Rot U_A + Div V_{ABC}}$$

dove i due potenziali soddisfano alle condizioni di Lorentz generalizzate:

$$(10,2) \quad Div U_A = 0 \quad ; \quad Rot V_{ABC} = 0$$

Se teniamo presente che valgono le seguenti proprietà [21]

$$(10,3) \quad Div Div = 0 \quad ; \quad Rot Rot = 0 \quad ; \quad \square = Div Rot + Rot Div$$

e sostituiamo la (1) nelle (6,1) otteniamo le equazioni nei potenziali

$$(10,4) \quad \square U_A = I_A \quad ; \quad \square V_{ABC} = J_{ABC}$$

Infine, prendendo la *Div* della prima delle (6,1) ed il *Rot* della seconda, si avrà

$$(10,5) \quad \square H_{AB} = Div J_{ABC} + Rot I_A$$

La teoria di Maxwell generalizzata si presenta così in una forma particolarmente elegante e simmetrica. Passando al limite relativistico essa si scinde nelle seguenti due teorie indipendenti, invarianti per il gruppo di Lorentz

1) *La teoria di Maxwell con cariche elettriche e monopoli magnetici* (scritta in forma duale):

$$(10,6) \quad Rot H_{ik} = J_{ikl} \quad ; \quad Div H_{ik} = I_k \quad (ikl = 1,2..4)$$

dove H_{ik} è il campo elettromagnetico. Si avrà allora

$$(10,7) \quad \boxed{H_{ik} = Rot U_i + Div V_{ikl}}$$

con le condizioni $Div U_i = 0$ e $Rot V_{ikl} = 0$. Ne seguono le equazioni

$$(10,8) \quad \square U_i = I_i \quad ; \quad \square V_{ikl} = J_{ikl}$$

Se allora poniamo $H_{ik}^* = i F_{lm}$; $J_{ikl}^* = i J_m$; $V_{ikl}^* = i A_m$ ed $U_i = B_i$ dove (iklm) è una permutazione pari degli indici (1234), tali equazioni coincidono con la teoria dei monopoli magnetici proposta indipendentemente nel 1962 da N. CABIBBO ed E. FERRARI, dove A_i e B_i sono i due potenziali [9].

2) *La teoria relativistica dei fluidi perfetti* — Le equazioni del campo idrodinamico sono date da

$$(10,9) \quad Rot C_i = \Omega_{ik} \quad ; \quad Div C_i = \sigma$$

Se allora poniamo $U_5 = U$ e $V_{ki5} = V_{ik}$, avremo

$$(10,10) \quad \boxed{C_i = Grad U + Div V_{ik}}$$

con la condizione $Rot V_{ik} = 0$. Sostituendo nelle (8) otteniamo le equazioni

$$(10,11) \quad \square U = \sigma \quad ; \quad \square V_{ik} = \mathcal{Q}_{ik}$$

e tali equazioni sono quelle dei fluidi perfetti relativistici. Tale teoria è stata proposta da O. COSTA DE BEAUREGARD nel 1949 [8].

Infine, le equazioni (6,1) possono essere ulteriormente generalizzate nel seguente modo

$$(10,12) \quad \boxed{Rot H_{AB} = J_{ABC} - \kappa^2 V_{ABC} \quad ; \quad Div H_{AB} = I_A - \kappa^2 V_A}$$

dove κ è una opportuna costante. Introducendo i due potenziali (1) con le condizioni (2), dalle (12) seguono le due equazioni

$$(10,13) \quad (\square + \kappa^2) V_{ABC} = J_{ABC} \quad ; \quad (\square + \kappa^2) U_A = I_A$$

che generalizzano le equazioni di PROCA. Come è noto tali equazioni descrivono i fotoni con massa κ .

10 — LA RELATIVITÀ CONFORME ED IL PROBLEMA DELLA GRAVITAZIONE

Lo studio della materia iperdensa, ed una migliore comprensione del collasso gravitazionale e dei Buchi Neri della gravitazione, richiede la costruzione di una «teoria unitaria» della materia e della elettricità.

Se vogliamo rimanere entro lo schema della teoria dei modelli di Universo basata sui gruppi, occorre passare al modello «successivo» rappresentato da una ipersfera S_5 dello spazio a 6 dimensioni, che ammette come gruppo di movimenti in sé quello R_6 delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni, con 15 parametri [22]. Si ottiene così la «relatività conforme» il cui gruppo comprende i movimenti uniformemente accelerati, e che quindi si presta bene allo studio del campo gravitazionale. Infatti le corrispondenti equazioni di Maxwell generalizzate (6,1), per $n = 6$, riuniscono in una teoria unica la magnetoidrodinamica e la gravitazione.

Per ν tendente all'infinito ci riduciamo ad un modello di Universo E_5 euclideo a 5 dimensioni, di cui tre spaziali (x_1, x_2, x_3) e due tempo-

rali (x_4, x_6) . Le equazioni di Maxwell generalizzate si decompongono allora nelle equazioni del campo idrodinamico di $E_5(C, iC_0, iC'_0)$ ed in quelle del campo elettromagneto-gravitazionale (E, iH, G, iG_0) . Queste ultime equazioni si scrivono così, in forma tridimensionale

$$(11,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } E = \rho \\ \text{rot } H - \partial_4 E = j \\ \text{rot } G - \partial_6 E = \vec{\omega}' \\ \text{grad } G_0 + \partial_4 G + \partial_6 H = a' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } H + \partial_6 G_0 = g_0 \\ \text{rot } E + \partial_4 H - \partial_6 G = g \\ \text{div } G + \partial_4 G_0 = -\mu \end{array} \right.$$

Tali equazioni coincidono formalmente con quelle (6,5-6) della magnetoidrodinamica, ma ne differiscono perché adesso le coordinate sono quelle conformi e si è sostituito al campo idrodinamico quello gravitazionale. Inoltre i due vettori $(\vec{\omega}', a')$ sarebbero collegati alla esistenza di «monopoli gravitazionali» proposti recentemente [23].

Ad equazioni analoghe alle nostre era pervenuto nel 1946 H. C. CORBEN [24], il quale introduce il «doppio tempo» (t, t') e scrive le seguenti equazioni del campo elettromagneto-gravitazionale

$$(11,2) \quad \boxed{\text{Div } F'_{ab} = J_a \quad ; \quad \text{Rot } F'_{ab} = 0}$$

con $a, b = 1, 2, 3, 4, 6$. Esse si scrivono così, in forma tridimensionale

$$(11,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } E + \partial G_0 / c \partial t' = \rho \\ \text{rot } H - \partial E / c \partial t + \partial G / c \partial t' = j \\ \text{div } G + \partial G_0 / c \partial t = -\mu \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } H = 0 \\ \text{rot } E + \partial H / c \partial t = 0 \\ \text{rot } G + \partial H / c \partial t' = 0 \\ \text{grad } G_0 + \partial G / c \partial t - \partial E / c \partial t' = 0 \end{array} \right.$$

Il Corben non dà una interpretazione fisica del secondo tempo (t') , ma osserva che per $t' = 0$, le precedenti equazioni si decompongono in quelle del campo elettromagnetico e del campo gravitazionale.

Nel 1949 J. G. BENNETT, R. L. BROWN ed M. W. THRING [25] hanno proposto una interessante teoria del campo elettromagnetico gravitazionale, basata su di un Universo E_5 , nella quale si introduce un doppio tempo (t, t') . Esso viene collegato alla esistenza della energia cinetica e potenziale, e la variabile t' viene chiamata «anti-tempo». Si arriva allora all'interessante risultato che un corpo rigido neutro in rotazione genera un campo magnetico, ottenendo così la ben nota legge suggerita dal BLACKETT [26]:

(11,4)

$$P = (\sqrt{g}/2c) U$$

dove P è la componente assiale del momento magnetico di dipolo, U è il momento angolare, e g la costante di gravitazione di Newton.

Si ottiene per tale via una teoria di campo nella quale il campo elettromagnetico e quello gravitazionale giuocano un ruolo simmetrico, e che porta alla previsione di nuovi effetti «gravito-magnetici» caratterizzati dalla assenza di un campo elettrostatico associato.

Più recentemente la «relatività conforme» è stata ripresa da vari fisici, in connessione con la fisica quantistica e delle particelle elementari. Tra gli studi più recenti ricordiamo quello di M. PAVSIC [27] che costruisce una teoria unitaria del tipo di quella di KALUZA-KLEIN, e quello di E. RECAMI e G. ZIINO [28] i quali mostrano che la «chiralità» è essenzialmente connessa con l'inversione di un «quinto» asse (asse della massa a riposo). Tale quinta dimensione corrisponde al *tempo proprio*, mentre nello spazio dei momenti sarebbe la *massa propria*.

Concludendo possiamo dire che lo studio della fisica fatto utilizzando i gruppi R_n delle rotazioni e le corrispondenti equazioni di Maxwell generalizzate, si presenta del più alto interesse, e ci permetterà di affrontare su nuove basi i problemi posti dalla fisica più avanzata [29].

BIBLIOGRAFÍA

- (1) E. H. KERNER, *An extension of the concept of inertial frame and of Lorentz transformation*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 70, 418, (1976); *Extended inertial frames and Lorentz transformations*, Journ. Math. Phys. 17, 1797 (1976).
- (2) G. ARCIDIACONO, *Sul significato fisico della teoria di relatività finale*, Rend. Accad. Lincei, XX, 463 (1956); I. FANTAPPIÉ, *Su una nuova teoria di relatività finale*, Rend. Accad. Lincei, 17, 158 (1954).
- (3) R. L. MALLETT, G. N. FLEMING, *Position operators in a $(3 + 1)$ De Sitter space*, J. Math. Phys. 14, 45 (1973).
- (4) G. ARCIDIACONO, *La relatività di Fantappié*, Coll. Math. X, 85 (1958); *Relatività finale e cosmologia*, Coll. Math. XII, 3 (1960).
- (5) G. FEINBERG, *Possibility of fast-than-light particles*, Phys. Rev. 159, 1106, (1967). H. ARZELIÈS, *Compt. Rend. Ac. Sc. Paris* 245, 2698 (1957).
- (6) E. RECAMI, R. MIGNANI, *Classical theory of tachyons*, Riv. Nuovo Cimento, 4, 209 (1974).
- (7) P. A. M. DIRAS, *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev. 78, 817 (1948).
- (8) O. COSTA DE BEAUREGARD, *La theorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris 1949, pag. 150.
- (9) N. CABIBBO, E. FERRARI, *Quantum electrodynamics with Dirac monopoles*, Nuovo Cimento, 23, 1147 (1962).
- (10) E. A. MILNE, *Kinematic Relativity*, Oxford at Clarendon press, 1948.
- (11) G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter e l'Astrofisica*, Coll. Math. XXV, 295 (1974); *A new projective relativity based on the De Sitter Universe*, General Relativity and Gravitation, 7, 885 (1976).
- (12) G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter e la meccanica*, Coll. Math. XX, 231, (1969); *Relativity and Cosmology*, Urania, Madrid, n° 279-80 (1974).
- (13) G. ARCIDIACONO, *Relatività e Cosmologia*, Libreria Veschi (Viale Università, 7) Roma 1973, I. FANTAPPIÉ, *Opere Scelte*, Bologna 1973.
- (14) G. ARCIDIACONO, *Le equazioni di Maxwell generalizzate*, Rend. ACC. Lincei, 18, fasc. 5 (1955); *La elettrodinamica e la idrodinamica*, Rend. Accad. Lincei 20, fasc. 5 (1956).
- (15) G. ARCIDIACONO, *Su alcuni casi limiti della magnetoidrodinamica*, Coll. Math. XXII, 141 (1971).

- (16) E. FERRARI, *Formulations of electrodynamics with magnetic monopoles*, Ist. di fisica, Roma PP/681 (1977).
- (17) L. SCHIFF, *Quarks and magnetic poles*, Phys. Rev. 160, 1257 (1967).
- (18) A. O. BARUT, H. SCHEIDER, *Angular momentum of systems of electric and magnetic charges and of singular flux surfaces*, J. Math. Phys. 17, 1115 (1976); Z. F. EZANA, H. C. TZE, *Monopoles-vortices and the geometry of the Yang-Mills bundles*, J. Math. Phys. 17, 2228 (1976).
- (19) E. RECAMI, R. MIGNANI, *Magnetic monopoles and tachyons in special relativity*, Phys. Lett. 62 B, 41 (1976).
- (20) G. ARCIDIACONO, *La relatività di Fantappiè*, Coll. Math. X, 85 (1958), pag. 106.
- (21) I. A. SCHOUTEN, *Tensor analysis for physicists*, Clarendon press Oxford 1954.
- (22) G. ARCIDIACONO, *Sulle trasformazioni finite dei gruppi delle rotazioni*, Coll. Math. XV, 259 (1963).
- (23) R. MIGNANI, *Gravitational monopoles*, Università di Roma PP/54 (1977).
- (24) H. C. CORBEN, *A classical theory of electromagnetism and gravitation*, Phys. Rev. 69, 225 (1946). Per le teorie con più tempi vedi N. S. KALITZIN, *Multitemporal theory of relativity*, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1975. E. PESSA, *The Conformal Relativity and Gravitation*, Coll. Math. (1977).
- (25) J. G. BENNETT, R. L. BROWN, M. W. THRING, *Unified field theory in a curvature-free five-dimensional manifold*, Proc. Royal Soc. 198A, 39 (1949).
- (26) P. M. S. BLACKETT, *Nature* 169, 657 (1947); M. SURDIN, *Le champ électromagnétique fluctuant de l'Univers*, Ann. Poinca. XV, 203 (1971).
- (27) M. PAVSIC, *Unified theory of gravitation and electromagnetism based on the conformal group SO (4,2)*. Ist. Fisica Catania PP/500 (1976).
- (28) E. RECAMI, G. ZIINO, *About new space-time symmetries in relativity and quantum mechanics*, Nuovo Cimento, 33A, 205 (1976); vedi pure J. D. EDMONDS jr, *Sp₄ charmed quarks and 5-dimensional space-time*, Lett. Nuovo Cimento, 17, 95 (1976).
- (29) Su questo argomento ho tenuto due Seminari al Congresso Internazionale sui «Tachyons and related topics» (1-15 settembre 1976), che si è tenuto al Centro di Cultura scientifica «Ettore Majorana» di Erice (Italia). Vedi il volume E. RECAMI, *Tachyons, Magnetic Monopoles, and related topics*, North Holland, Amsterdam, 1978.

Prof. GIUSEPPE ARCIDIACONO
Via Acquedotto del Peschiera 96
Italia 00135 Roma

