ACOTACIÓN DE LA ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA DE UN CILINDRO DE SECCIÓN CIRCULAR.

por

ÁNGEL GUTIÉRREZ [1]

I. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo soluciona parte del problema propuesto por Dou (4), en un cilindro elástico de sección circular.

El resultado fundamental, semejante al de Dou, (3) y (4), es una acotación de la energía potencial elástica total del cilindro, que depende de la norma de las fuerzas en las bases, y de algunas de sus derivadas, y es prácticamente independiente de la longitud del cilindro (cfr. fórmula 6.1.).

En cuanto al metodo utilizado para resolver este problema, y las implicaciones del resultado en relación con el principio de Saint-Venant, véase Dou (3) y (5), y Gutiérrez (11).

II. FUERZAS PERMISIBLES.

Sea el cilindro Ω, de sección circular R,

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in R, \ |z| < s, \ s > 0\}$$

2.1

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

que suponemos homogéneo, isótropo y perfectamente elástico, y en el utilizamos la teoría lineal e infinitesimal de Elasticidad.

(1) Este artículo ha sido elaborado siendo el autor becario de la Fundación Juan March.

Vamos a trabajar con coordenadas cilíndricas, que están más de acuerdo con la geometría del problema.

Supongamos que el cilindro no está solicitado por fuerzas laterales, y no hay fuerzas de volumen. En cuanto a las fuerzas en las bases, supondremos sin pérdida de generalidad (cfs. (3) y (11)), que son impares, y llamaremos T^1, si

$$T^1 = \{T^1_r(r, \Theta),\ T^1_\Theta(r, \Theta),\ T^1_z(r, \Theta)\} \quad \text{en} \quad z = s$$

$$(r, \Theta) \in \overline{R}$$

$$T^{-1} = \{-T^1_r(r, \Theta),\ -T^1_\Theta(r, \Theta),\ T^1_z(r, \Theta)\} \quad \text{en } z = -s$$

o que son pares, y llamaremos T^2, si

$$T^2 = \{T^2_r(r, \Theta),\ T^2_\Theta(r, \Theta),\ T^2_z(r, \Theta)\} \quad \text{en} \quad z = s$$

$$(r, \Theta) \in \overline{R}$$

$$T^{-2} = \{T^2_r(r, \Theta),\ T^2_\Theta(r, \Theta),\ -T^2_z(r, \Theta)\} \quad \text{en } z = -s$$

Cuando no haya posibilidad de confusión, y en orden a facilitar la notación, escribiremos T^g, en lugar de T^1 ó T^2, o simplemente T, especificando la paridad. Al tensor construido con las fuerzas pares (impares) lo llamaremos tensor par (impar).

Exigimos además, de las fuerzas consideradas, que existan, y sean casi continuas en $\overline{R}$, las siguientes funciones.

2.2 $$\left[\frac{1}{r}(r\,T_r)_{,r}\right]_{,r\Theta}\ ,\quad \left(\frac{T_\Theta}{r^2}\right)_{,\Theta r\Theta} \quad \text{y} \quad T_{z,r\Theta}$$

donde las variables después de la coma indican derivada parcial con respecto a dichas variables.

Por último, las fuerzas permisibles satisfacen las siguientes condiciones:

2.3 $$\int_R \left(\cos\Theta T_r - \frac{\operatorname{sen}\Theta}{r} T_\Theta\right) dv = 0\,;$$

2.4 $$\int_R \left(\operatorname{sen}\Theta T_r + \frac{\cos\Theta}{r} T_\Theta\right) dv = 0\,;$$

2.5 $\int_R T_z \, dv = 0$; 2.6 $\int_R r \cos \Theta \, T_z \, dv = 0$;

2.7 $\int_R r \operatorname{sen} \Theta \, T_z \, dv = 0$; 2.8 $\int_R T_\Theta \, dv = 0$

donde $dv = r \, dr \, d\Theta$, juntamente con

2.9 $$T_r(1, \Theta) = 0$$

Las condiciones 2.3 a 2.8 expresan que las fuerzas en cada base están autoequilibradas, y la 2.9 asegura que el tensor de tensiones sea continuo en $\bar{\Omega}$.

Ahora bien, en virtud de que existen y son casicontinuas las funciones de 2.2 y como sabemos que si $f_{,r\Theta}(r, \Theta) \in L^2(R, v)$ entonces $r^{1/2} f(r, \Theta)$ admite un desarrollo en serie del sistema ortonormal completo de Fourier-Dini, que es absoluta y uniformemente convergente en $\bar{R}$, (cfr. (10)), podemos escribir:

2.10 $$\frac{1}{r'}(r\, T_r)_{,r} = \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} a_{mi}\, r' J_i \cos m\Theta + \sum_{m=0} a_{m0}\, r' \cos m\Theta + \\ + \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} b_{mi}\, r' J_i \operatorname{sen} m\Theta + \sum_{m=0} b_{m0}\, r' \operatorname{sen} m\Theta \, ;$$

2.11 $$r'\left(\frac{T_\Theta}{r^2}\right)_{,\Theta} = \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} c_{mi}\, r' J_i \cos m\Theta + \sum_{m=0} c_{m0}\, r' \cos m\Theta + \\ + \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} d_{mi}\, r' J_i \operatorname{sen} m\Theta + \sum_{m=0} d_{m0}\, r' \operatorname{sen} m\Theta \, ;$$

2.12 $$r' T_z = \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} e_{mi}\, r' J_i \cos m\Theta + \sum_{m=0} e_{m0}\, r' \cos m\Theta + \\ + \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} f_{mi}\, r' J_i \operatorname{sen} m\Theta + \sum_{m=0} f_{m0}\, r' \operatorname{sen} m\Theta$$

donde por simplicidad de notación hemos utilizado:

2.13 $$r' = r^{1/2}$$

y

2.14 $$J_i = J_0\,(k_i r)$$

donde $J_0(t)$ en la función de Bessel de primera especie, y k_i son los ceros de la función de Bessel $J_1(t)$.

Pero como las fuerzas satisfacen las condiciones de autoequilibrio, y la 2.9, debemos ver las modificaciones que aparecen en los desarrollos en serie. De acuerdo con 2.10, e integrando término a término, obtenemos

$$r\,T_r(r,\Theta) = \int_0^r (s\,T_r(s,\Theta))_{,s}\,ds = \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} \frac{-a_{mi}}{k_i}\,r\,J_i'\cos m\Theta +$$

$$+ \sum_{m=0} a_{m0}\frac{r^2}{2}\cos m\Theta + \sum_{\substack{m=1\\ i=1}} -\frac{b_{mi}}{k_i}\,r\,J_i'\,\mathrm{sen}\,m\Theta +$$

$$+ \sum_{m=1} b_{m0}\frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen}\,m\Theta\,.$$

donde

2.15 $$J_i' = J_0'\,(k_i\,r)$$

Pero 2.9 impone que

$$0 = \sum_{m=0}\frac{a_{m0}}{2}\cos m\Theta + \sum_{m=0}\frac{b_{m0}}{2}\,\mathrm{sen}\,m\Theta$$

es decir

2.16 $$a_{m0} = b_{m0} = 0, \qquad m = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

De acuerdo con **2**.11, y por razones análogas al caso anterior obtenemos:

$$r'\left[\frac{T_\Theta(r,\Theta)}{r^2}-\frac{T_\Theta(r,0)}{r^2}\right]=\int_0^\Theta r'\left[\frac{T(r,\alpha)}{r^2}\right]_{,\alpha}d\alpha=$$

$$=\sum_{\substack{m=1\\i=1}}\frac{c_{mi}}{m}r'\,J_i\operatorname{sen}m\Theta+\sum_{\substack{m=1\\i=1}}\frac{-d_{mi}}{m}r'\,J_i(\cos m\Theta-1)+$$

$$+\sum_{m=1}\frac{c_{m0}}{m}r'\operatorname{sen}m\Theta+\sum_{i=1}c_{0i}\,r'\,J_i\,\Theta+\sum_{m=1}\frac{-d_{m0}}{m}r'\,(\cos m\Theta-1)+c_{00}\,r'\Theta.$$

Pero como $T_\Theta(r,\Theta)$ es continua, se verifica que $T_\Theta(r,0) = T_\Theta(r,2\pi)$, con lo que:

$$0=\sum_{i=1}2\pi\,c_{0i}\,r'\,J_i+c_{00}\,2\pi\,r'$$

que es el desarrollo de la función nula en serie de Dini. Por lo cual

2.17 $$c_{0i}=0\qquad i=0,1,2,\ldots$$

Por otra parte, $r'\dfrac{T_\Theta(r,0)}{r^2}$ admitirá un desarrollo de Dini, absoluta y uniformemente convergente, que podremos expresar:

2.18 $$r'\frac{T_\Theta(r,0)}{r^2}=\sum_{i=1}g_{0i}\,r'\,J_i+g_{00}\,r'.$$

Por último, tomando la fórmula **2**.5, obtenemos que

2.19 $$e_{00}=0$$

De todo ello concluimos que:

2.20 *a* $$r'\,T_r(r,\Theta)=\sum_{\substack{m=1\\i=1}}\frac{-a_{mi}}{k_i}r'\,J_i'\cos m\Theta+$$

$$+\sum_{i=1}\frac{-a_{0i}\cdot r'\,J_i'}{k_i}+\sum_{\substack{m=1\\i=1}}\frac{-b_{mi}}{k_i}r'\,J_i'\operatorname{sen}m\Theta\,.$$

$$2.20\,\text{b} \quad r'\, T_\Theta(r, \Theta) = r^2 \left[\sum_{\substack{m=1\\ i=1}} \frac{c_{mi}}{m} r'\, J_i \operatorname{sen} m\Theta + \sum_{m=1} \frac{c_{m0}}{m} r' \operatorname{sen} m\Theta + \right.$$

$$+ \sum_{\substack{m=1\\ i=1}} \frac{-d_{mi}}{m} r'\, J_i \cos m\Theta + \sum_{m=1} \frac{-d_{m0}}{m} r' \cos m\Theta +$$

$$\left. + \sum_{\substack{m=1\\ i=1}} \frac{d_{mi}}{m} r'\, J_i + \sum_{m=1} \frac{d_{m0}}{m} r' + \sum_{i=1} g_{0i}\, r'\, J_i + g_{00}\, r' \right],$$

$$2.20\,\text{c} \quad r'\, T_z(r, \Theta) = \sum_{\substack{m=0\\ i=1}} e_{mi} r'\, J_i \cos m\Theta + \sum_{m=1} e_{m0}\, r' \cos m\Theta +$$

$$+ \sum_{\substack{m=1\\ i=1}} f_{mi}\, r'\, J_i \operatorname{sen} m\Theta + \sum_{m=1} f_{m0}\, r' \operatorname{sen} m\Theta .$$

Pero las condiciones de autoequilibrio imponen las siguientes relaciones:

$$2.21 \qquad \int_0^1 \left(\sum_{\substack{m=1\\ i=1}} \frac{d_{mi}}{m} J_i + \sum_{m=1} \frac{d_{m0}}{m} + \sum_{i=1} g_{0i}\, J_i + g_{00} \right) r^3\, dr = 0$$

en virtud de **2.8**;

$$\textbf{2.22} \qquad \int_0^1 (\sum_{i=1} e_{1i}\, J_i + e_{10}) r^2\, dr = 0$$

de acuerdo con **2.6**;

$$2.23 \qquad \int_0^1 (\sum_{i=1} f_{1i}\, J_i + f_{10}) r^2\, dr = 0$$

utilizando la fórmula 2.7;

$$2.24 \qquad \int_0^1 \left(\sum_{i=1} \frac{-a_{1i}}{k_i} r\, J_i' - \sum_{i=1} c_{1i}\, r^2\, J_i - c_{10}\, r^2 \right) dr = 0$$

teniendo en cuenta la fórmula 2.3; y

2.25 $$\int_0^1\left(\sum_{i=1} \frac{-b_{1i}}{k_i} r J_i' - \sum_{i=1} d_{i1} r^2 J_i - d_{10} r^2\right)dr = 0$$

desarrollando la fórmula 2.4.

III TENSOR DE TENSIONES.

El tensor de tensiones $\mathcal{T} = ((\mathcal{T}_{ij}))$, $i, j = r, \Theta, z$, simétrico, analítico en Ω y continuo en Ω, correspondiente a las fuerzas permisibles

$$T^g \equiv (T^g_r, T^g_\Theta, T^g_z), \qquad g = 1, 2$$

viene dado por las expresiones:

3.1 $$\mathcal{T}_{rr} = (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda\left(\frac{1}{r} u_{\Theta,\Theta} + u_{z,z} + \frac{1}{r} u_r\right)$$

$$\mathcal{T}_{\Theta\Theta} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{r} u_{\Theta,\Theta} + \frac{1}{r} u_r\right) + \lambda(u_{r,r} + u_{z,z})$$

$$\mathcal{T}_{zz} = (\lambda + 2\mu)\, u_{z,z} + \lambda\left(u_{r,r} + \frac{1}{r} u_{\Theta,\Theta} + \frac{1}{r} u_r\right)$$

$$\mathcal{T}_{r\Theta} = \mu\left(\frac{1}{r} u_{r,\Theta} + r\left(\frac{u_\Theta}{r}\right)_{,r}\right)$$

$$\mathcal{T}_{rz} = \mu(u_{r,z} + u_{z,r})$$

$$\mathcal{T}_{\Theta z} = \mu\left(u_{\Theta,z} + \frac{1}{r} u_{z,\Theta}\right) \qquad r \leqslant 1, \ |z| \leqslant s$$

donde $\lambda > 0$, $\mu > 0$ son constantes elásticas, y $u_i(r, \Theta, z)$ son los desplazamientos dados por la solución única (cfr. (22)) de las ecuaciones homogéneas de Navier de Elasticidad:

3.2 $$(\lambda+\mu)u_{r,rr}+\frac{\mu}{r^2}u_{r.\Theta\Theta}+\mu u_{r,zz}+\frac{\lambda+\mu}{r}u_{\Theta,r\Theta}+$$

$$+(\lambda+\mu)u_{z,rz}+\frac{\lambda+2\mu}{r}u_{r,r}-\frac{\lambda+3\mu}{r^2}u_{\Theta,\Theta}-\frac{\lambda+2\mu}{r^2}u_r=0$$

$$\frac{\mu+\lambda}{r^2}u_{r,r\Theta}+\mu u_{\Theta,rr}+\frac{\lambda+2\mu}{r^2}u_{\Theta,\Theta\Theta}+u_{\Theta,zz}+\frac{\lambda+\mu}{r}u_{z,\Theta z}+$$

$$+\frac{\lambda+3\mu}{r}u_{r,\Theta}+\frac{\mu}{r}u_{\Theta,r}-\frac{\mu}{r^2}u_\Theta=0$$

$$(\lambda+\mu)u_{r,rz}+\frac{\lambda+\mu}{r}u_{\Theta,\Theta z}+\mu u_{z,rr}+\frac{\mu}{r^2}u_{z,\Theta\Theta}+$$

$$+(\lambda+2\mu)u_{z,zz}+\frac{\lambda+\mu}{r}u_{r,z}+\frac{\mu}{r}u_{z,r}=0 \qquad r<1,\ |z|<s$$

que satisfacen las permisibles condiciones de contorno

3.3 $$\mathcal{T}_{ri}(1,\Theta,z)=0 \qquad i=r,\Theta,z, \qquad |z|\leqslant s$$

3.4 $$\mathcal{T}_{zi}(r,\Theta,s)=T_i^g(r,\Theta) \quad ; \quad \mathcal{T}_{zi}(r,\Theta,-s)=-T_i^{-g}(r,\Theta)$$
$$g=1,2$$
$$i=r,\Theta,z.$$

Un tensor simétrico

$$G(r,\Theta,z)=((G_{ij})) \qquad , \qquad i,j=r,\Theta,z,$$

continuo en $\bar{\Omega}$ se llama un tensor virtual de $\mathcal{T}$ en Ω, si satisface la misma condición de contorno que $\mathcal{T}$, y es al mismo tiempo solución de las ecuaciones de equilibrio:

3.5 $$\frac{1}{r}(r\,G_{zr})_{,r}+\left(\frac{G_{z\Theta}}{r^2}\right)_{,\Theta}+G_{zz,z}=0$$

$$\frac{1}{r}(r\,G_{r\Theta})_{,r}+\left(\frac{G_{\Theta\Theta}}{r^2}\right)_{,\Theta}+G_{\Theta z,z}=0$$

$$\frac{1}{r}(r\, G_{rr})_{,r} + \left(\frac{G_{r\Theta}}{r^2}\right)_{,\Theta} + G_{rz,z} = \frac{G_{\Theta\Theta}}{r_3}.$$

IV. Construcción de un tensor virtual.

Para la construcción de un tensor virtual correspondiente al tensor $\mathcal{T}$ de Ω, y las fuerzas T_i, supondremos que las fuerzas son impares. Para la construcción en el caso par, haremos una breve indicación posteriormente. Además iremos por parte, construyendo tensores, cuya suma nos suministra el tensor virtual buscado.

En cuanto a los procesos de integración y derivación, es fácil comprobar que se pueden hacer término a término en cada serie, pues partimos de series absoluta y uniformemente convergentes en $\bar{R}$.

a) Tomemos los términos

$$r'\, T_{ra} = \sum_{i=1} \frac{-a_{0i}}{k_i} r'\, J_i' \quad ; \quad r'\, T_{za} = \sum_{i=1} e_{0i}\, r'\, J_i$$

$$r'\, T_{\Theta a} = r^2 \left(\sum_{\substack{m=1\\ i=1}} \frac{d_{mi}}{m} r'\, J_i + \sum_{m=1} \frac{d_{m0}}{m} r' + \sum_{i=1} g_{0i}\, r'\, J_i + g_{00}\, r' \right)$$

y descomponemos los dos primeros en la forma siguiente

4.1 $$(a_{0i},\ 0,\ e_{0i}) = (H_1,\ 0,\ -1)\, \frac{a_{0i} + e_{0i} H_2}{H_1 - H_2} +$$

$$+ (H_2,\ 0,\ -1)\, \frac{a_{0i} + e_{0i} H_2}{H_2 - H_1} = \bar{A}\, s_{0i} + \bar{B}\, t_{0i}$$

Dicha descomposición es válida para todo valor de H_1, H_2, siendo ambos positivos y $H_1 \neq H_2$.

El tensor virtual correspondiente a estos términos es:

$$r'\, G_{zra} = r' \sum_{i=1} (-H_1\, R_1\, s_{0i} \cosh w_1 z - H_2\, R_2\, t_{0i} \cosh w_2 z)\, \frac{r'}{k_i} J_i'$$

$$r'\ G_{z\Theta a} = r_2\ R_0 \cosh w_0 z \cdot r' \left(\sum_{\substack{m=1 \\ i=1}} \frac{d_{mi}}{m} J_i + \sum_{m=1} \frac{d_{m0}}{m} + \sum_{i=1} g_{0i}\ J_i + g_{00} \right)$$

$$r'\ G_{zza} = \sum_{i=1} (-\ S_1\ s_{0i} \operatorname{senh} w_1 z - S_2\ t_{0i} \operatorname{senh} w_2 z)\ r'\ J_i; \qquad r'\ G_{rra} = 0$$

$$r'\ G_{r\Theta a} = \frac{-\ w_0\ R_0 \operatorname{senh} w_0 z}{r'} \int_0^r \left(\sum_{\substack{m=1 \\ i=1}} \frac{d_{mi}}{m} t^3\ J_0\ (k_i\ t) + \sum_{m=1} \frac{d_{m0}}{m} t^3 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1} g_{0i}\ t^3\ J_0 (k_i\ t) + g_{00}\ t^3 \right) dt$$

$$r'\ G_{\Theta\Theta a} = r' \sum_{i=1} -(w_1\ H_1\ R_1\ s_{0i} \operatorname{senh} w_1 z + w_2\ H_2\ R_2\ t_{0i} \operatorname{senh} w_2 z) \frac{r^3}{k_i} J_i'$$

donde

4.2 $\quad 1/R_i = \cosh w_i\ s \quad , \quad 1/S_i = \operatorname{senh} w_i\ s \quad , \quad i = 0,\ 1,\ 2$

y w_0 es arbitrario, mientras que w_j $(j = 1,\ 2)$ satisfacen

4.3 $\quad w_j \operatorname{cotgh} w_j s = H_j \quad , \quad 0 < H_j - 1/s < w_j < H_j$

lo cual impone la condición $H_j\ s > 1$. No ofrece dificultad el comprobar que para toda longitud $s \geqslant s_0 > 0$, del cilindro, exiten w_j y H_j. Asímismo es fácil verificar que el tensor construido satisface el sistema 3.5.

En cuanto a las condiciones de contorno, $G_{zra}(1,\ \Theta,\ z) = 0$ debido a que $J_0'(k_i) = -\ J_1(k_i)$, y k_i eran los casos de $J_1(t)$. Respecto de $G_{r\Theta a}(1,\ \Theta,\ z)$ obtenemos que es igual cero en virtud de la condición 2.21 de autoequilibrio. Las condiciones 3.4 se satisfacen, de acuerdo con 4.2 y 4.3.

De ahora en adelante, sólo cuando la comprobación de las condiciones de contorno ofrezca alguna dificultad, se indicarán las fórmulas utilizadas.

b) Los términos tomados son

$$r'\, T_{rb} = \sum_{i=1} \frac{-a_{1i}}{k_i}\, r'\, J_i'\cos\Theta;$$

$$r'\, T_{\Theta b} = r'\,(\sum_{i=1} c_{1i}\, r^2 J_i \operatorname{sen}\Theta + c_{10}\, r^2 \operatorname{sen}\Theta)$$

$$r'\, T_{zb} = \sum_{i=1} e_{1i}\, r'\, J_i \cos\Theta + e_{10}\, r' \cos\Theta.$$

donde hacemos las siguientes descomposiciones.

4.4
$$(0, c_{10}, e_{10}) = (0, H_1, -1)\frac{c_{10} + e_{10} H_2}{H_1 - H_2} + \\ + (0, H_2, -1)\frac{c_{10} + e_{10} H_1}{H_2 - H_1} = \bar{C}\, t_{10} + \bar{D}\, u_{10}.$$

4.5
$$(a_{1i}, c_{1i}, e_{1i}) = (1, -1, 0)\frac{a_{1i} - c_{1i}}{2} + \\ + (H_1, H_1, -2)\frac{a_{1i} + c_{1i} + e_{1i} H_2}{2(H_1 - H_2)} + \\ + (H_2, H_2, -2)\frac{a_{1i} + c_{1i} + e_{1i} H_1}{2(H_2 - H_1)} = \bar{E}\, s_{1i} + \bar{F}\, t_{1i} + \bar{H}\, u_{1i}.$$

En este caso, el tensor virtual impar viene dado por

$$r'\, G_{zrb} = \sum_{i=1} (-R_0\, s_{1i} \cosh w_0 z - H_1 R_1\, t_{1i} \cosh w_1 z - \\ - H_2 R_2\, u_{1i} \cosh w_2 z)\, r'\, J_i' \cos\Theta$$

$$r'\, G_{z\Theta b} = (H_1 R_1\, t_{10} \cosh w_1 z + H_2 R_2\, u_{10} \cosh w_2 z)\, r^2 \operatorname{sen}\Theta + \\ + r' \sum_{i=1} (-R_0\, s_{1i} \cosh w_0 z + H_1 R_1\, t_{1i} \cosh w_1 z + \\ + H_2 R_2\, u_{1i} \cosh w_2 z)\, r^2 J_i \operatorname{sen}\Theta$$

$$r'\, G_{zzb} = -\Big[(t_{10} + \sum_{i=1} 2t_{1i} J_{1i})\, S_1 \operatorname{senh} w_1 z + (u_{10} + \\ + \sum_{i=1} 2u_{1i} J_i)\, S_2 \operatorname{senh} w_2 z\Big]\, r' \cos\Theta$$

$$r' \, G_{rrb} = \frac{\cos \Theta}{r'} \int_0^r \left[(t_{10} \, t^2 + \sum_{i=1} 2t_{1i} \, J_0'(k_i \, t)) \, w_1 \, H_1 \, R_1 \text{ senh } w_1 \, z + \right.$$

$$\left. + \, (u_{10} \, t^2 + \sum_{i=1} 2u_{1i} \frac{t}{k_i} J_0' \, (k_i \, t)) \, w_2 \, H_2 \, R_2 \text{ senh } w_2 \, z \right] dt$$

$$r' \, G_{r\Theta b} = r' \sum_{i=1} (- \, w_0 \, T_0 \, s_{1i} \text{ senh } w_0 \, z + w_1 \, H_1 \, R_1 \, t_{1i} \text{ senh } w_1 \, z +$$

$$+ \, w_2 \, H_2 \, R_2 \, u_{1i} \text{ senh } w_2 \, z) \frac{r^2}{k_i} J_i' \text{ sen } \Theta$$

$$r' \, G_{\Theta\Theta b} = r'(w_1 \, H_1 \, R_1 \, t_{10} \text{ senh } w_1 \, z + w_2 \, H_2 \, R_2 \, u_{10} \text{ senh } w_2 z) r^4 \cos \Theta +$$

$$+ \, r' \sum_{i=1} (- \, w_0 \, R_0 \, s_{1i} \text{ senh } w_0 z + w_1 \, H_1 \, R_1 \, t_{1i} \text{ senh } w_1 z +$$

$$+ \, w_2 \, H_2 \, R_2 \, u_{1i} \text{ senh } w_2 z) \, 2r^3 \, J_i' \cos \Theta \, .$$

La única condición no inmediata de comprobación es que $G_{rrb}(1, \Theta, z) = = 0$, en la fórmula 3.3. Para ello hay que utilizar las fórmulas 4.4 y 4.5, juntamente con las 2.22 y 2. 24 de autoequilibrio.

c) Ahora consideramos los restantes términos con $m = 1$, es decir

$$r' \, T_{rc} = \sum_{i=1} \frac{- \, b_{1i}}{k_i} r' \, J_i' \text{ sen } \Theta$$

$$r' \, T_{\Theta c} = r' (\sum_{i=1} - \, d_{1i} \, r^2 \, J_i - d_{10} \, r^2) \cos \Theta$$

$$r' \, T_{zc} = (\sum_{i=1} f_{1i} \, r' \, J_i + f_{10} \, r') \text{ sen } \Theta$$

y hacemos la descomposición análoga a la del caso b)

$$4.6 \qquad (0, d_{10}, f_{10}) = \bar{C} \frac{d_{10} + f_{10} H_2}{H_1 - H_2} + \bar{D} \frac{d_{10} + f_{10} H_1}{H_2 - H_1} = \bar{C} r_{10} + \bar{D} v_{10}$$

$$4.7 \qquad (b_{1i}, d_{1i}, f_{1i}) = \bar{E} \frac{b_{1i} - d_{1i}}{2} + \bar{F} \frac{b_{1i} + d_{1i} + f_{1i} H_2}{2(H_1 - H_2)} +$$

$$+ \, \bar{H} \frac{b_{1i} + d_{1i} + f_{1i} H_1}{2(H_2 - H_1)} = \bar{E} \, x_{1i} + \bar{F} r_{1i} + \bar{H} v_{1i} \, .$$

El tensor construido es:

$$r' G_{zrc} = \sum_{i=1} (- R_0 x_{1_i} \cosh w_0 z - H_1 R_1 r_{1_i} \cosh w_1 z -$$
$$- H_2 R_2 v_{1_i} \cosh w_2 z) \frac{r'}{k_i} J_i' \operatorname{sen} \Theta$$

$$r' G_{zzc} = - [(r_{10} + \sum_{i=1} 2r_{1i} J_i) S_1 \operatorname{senh} w_1 z +$$
$$+ (v_{10} + \sum_{i=1} 2v_{1i} J_i) S_2 \operatorname{senh} w_2 z] r' \operatorname{sen} \Theta$$

$$r' G_{z\Theta c} = r'(- H_1 R_1 r_{10} \cosh w_1 z - H_2 R_2 \cosh w_2 z) r^2 \cos \Theta +$$
$$+ r' \sum_{i=1} (R_0 x_{1_i} \cosh w_0 z - H_1 R_1 r_{1_i} \cosh w_1 z -$$
$$- H_2 R_2 v_{1_i} \cosh w_2 z) r^2 J_i \cos \Theta$$

$$r' G_{r\Theta c} = r' \sum_{i=1} (w_0 R_0 x_{1_i} \operatorname{senh} w_0 z - w_1 H_1 R_1 r_{1_i} \cosh w_1 z -$$
$$- w_2 H_2 R_2 v_{1_i} \cosh w_2 z) \frac{r_2}{k_i} J_i' \cos \Theta$$

$$r' G_{\Theta\Theta c} = r' (w_1 H_1 R_1 r_{10} \operatorname{senh} w_1 z + w_2 H_2 R_2 v_{10} \operatorname{senh} w_2 z) r^4 \operatorname{sen} \Theta +$$
$$+ r' \sum_{i=1} (- w_0 R_0 x_{1_i} \operatorname{senh} w_0 z + w_1 H_1 R_1 r_{1_i} \operatorname{senh} w_1 z +$$
$$+ w_2 H_2 R_2 v_{1_i} \operatorname{senh} w_2 z) \frac{2r^3}{k_i} J_i' \operatorname{sen} \Theta$$

$$r' G_{rrc} = \frac{\operatorname{sen} \Theta}{r'} \int_0^r \Bigg[(r_{10}\, t^2 + \sum_{i=1} r_{1i} \frac{2t}{k_i} J_0' (k_i\, t))\, w_1 H_1 R_1 \operatorname{senh} w_1 z +$$
$$+ (v_{10}\, t^2 + \sum_{i=1} v_{1i} \frac{2t}{k_i} J_0' (k_i\, t))\, w_2 H_2 R_2 \operatorname{senh} w_2 z \Bigg] dt .$$

Utilizando 4.5, 4.6, 4.7 juntamente con 2.23 y 2.25 se comprueba que $G_{rrc}(1, \Theta, z) = 0$

d) Tomemos ahora

$$T_{rd} = 0 \ ; \ r' T_{\Theta d} = r' \sum_{m=2} \frac{c_{m0}}{m} r^2 \operatorname{sen} m \Theta \ ; \ r' T_{zd} = \sum_{m=2} e_{m0}\, r' \cos m \Theta$$

y hagamos la descomposición:

4.8 $$(0, c_{m0}, e_{m0}) = \bar{C}\frac{c_{m0} + e_{m0} H_2}{H_1 - H_2} + \bar{D}\frac{c_{m0} + e_{m0} H_1}{H_2 - H_1} = $$
$$= \bar{C}\, t_{m0} + \bar{D}\, u_{m0}\ , \qquad m \geqslant 2.$$

El tensor que construimos es:

$$G_{zrd} = 0 \quad ; \quad r' G_{zzd} = \sum_{m=2} (- S_1\, t_{m0} \operatorname{senh} w_1 z -$$
$$- S_2\, u_{m0} \operatorname{senh} w_2 z) r' \cos m\,\Theta$$

$$r' G_{z\Theta d} = r' \sum_{m=2} (H_1 R_1\, t_{m0} \cosh w_1 z + H_2 R_2\, u_{m0} \cosh w_2 z) r^2 \frac{\operatorname{sen} m\,\Theta}{m}$$

$$r' G_{r\Theta d} = r' \sum_{m=2} (w_1 H_1 R_1\, t_{m0} \operatorname{senh} w_1 z +$$
$$+ w_2 H_2 R_2\, u_{m0} \operatorname{senh} w_2 z) \frac{q_{m0}}{4m} (r^3 - r^2) \operatorname{sen} m\,\Theta$$

$$r' G_{\Theta\Theta d} = r' \sum_{m=2} \left(\frac{1 + q_{m0}}{m^2} r^4 - \frac{3q_{m0}}{4m^2} r^3\right) (w_1 H_1 R_1\, t_{m0} \operatorname{senh} w_1 z +$$
$$+ w_2 H_2 R_2\, u_{m0} \operatorname{senh} w_2 z) \cos m\,\Theta$$

$$r' G_{rrd} = \frac{1}{r'} \int_0^r \sum_{m=2} \left[\frac{1 + q_{m0}}{m^2} t^2 - \frac{3q_{m0}}{4m^2} t - q_{m0} \frac{t^2 - t}{4}\right].$$
$$(w_1 H_1 R_1\, t_{m0} \operatorname{senh} w_1 z + w_2 H_2 R_2\, u_{m0} \operatorname{senh} w_2 z) \cos m\,\Theta\, dt$$

donde

4.9 $$q_{m0} = \frac{-8}{m^2 - 1}\ , \qquad m \geqslant 2$$

Este valor de q_{m0} hace que $G_{rrd}(1, \Theta, z) = 0$.

e) Consideremos ahora

$$T_{re} = 0 \quad ; \quad r' T_{\Theta e} = r' \sum_{m=2} \frac{d_{m0}}{m} r^2 \cos m\Theta \quad ; \quad r' T_{ze} = \sum_{m=2} f_{m0}\, r' \operatorname{sen} m\Theta$$

con la descomposición

4.10 $$(0,\ d_{m0},\ f_{m0}) = \bar{C}\,\frac{d_{m0} + f_{m0}\,H_2}{H_1 - H_2} + \bar{D}\,\frac{d_{m0} + f_{m0}\,H_1}{H_2 - H_1} =$$

$$= \bar{C} r_{m0} + D v_{m0}\ , \qquad m \geqslant 2$$

con lo que el tensor es:

$$G_{zre} = 0 \quad ; \quad r'\, G_{zze} = \sum_{m=2} (- S_1\, r_{m0} \operatorname{senh} w_1 z -$$

$$- S_2\, v_{m0} \operatorname{senh} w_2 z) r' \operatorname{sen} m\,\Theta$$

$$r'\, G_{z\Theta e} = r' \sum_{m=2} (- H_1\, R_1\, r_{m0} \cosh w_1 z -$$

$$- H_2\, R_2\, v_{m0} \cosh w_2 z) r^2 \frac{\cos m\,\Theta}{m}$$

$$r'\, G_{r\Theta e} = r' \sum_{m=2} (- w_1\, H_1\, R_1\, r_{m0} \operatorname{senh} w_1 z -$$

$$- w_2\, H_2\, R_2\, v_{m0} \operatorname{senh} w_2 z)\; q_{m0}\, (r^3 - r^2) \frac{\cos m\,\Theta}{4m}$$

$$r'\, G_{\Theta\Theta e} = r' \sum_{m=2} (w_1\, H_1\, R_1\, r_{m0} \operatorname{senh} w_1 z +$$

$$+ w_2\, H_2\, R_2\, v_{m0} \operatorname{senh} w_2 z)\; (r^4 \frac{1 + q_{m0}}{m^2} - \frac{3q_{m0}}{4m^2} r^3) \operatorname{sen} m\,\Theta$$

$$r'\, G_{rre} = \frac{1}{r'} \int_0^r \sum_{m=2} (w_1\, H_1\, R_1\, r_{m0} \operatorname{senh} w_1 z +$$

$$+ w_2\, H_2\, R_2\, v_{m0} \operatorname{senh} w_2 z) \left(\frac{1 + q_{m0}}{m^2}\, t^2 - \frac{3q_{m0}}{4m^2}\, t - q_{m0}\, \frac{t^2 - t}{4} \right) \operatorname{sen} m\,\Theta\, dt.$$

f) En este caso utilizaremos

$$r'\, T_{rf} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} \frac{- a_{mi}}{k_i}\, r'\, J_i' \cos m\,\Theta \quad ; \quad r'\, T_{zf} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} e_{mi}\, r'\, J_i \cos m\,\Theta$$

$$r'\, T_{\Theta f} = r' \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} \frac{c_{mi}}{m}\, r^2\, J_i \operatorname{sen} m\,\Theta$$

con la descomposición:

$$4.11 \quad (a_{mi}, c_{mi}, e_{mi},) = \overline{E}\,\frac{a_{mi} - c_{mi}}{2} + \overline{F}\,\frac{a_{mi} + c_{mi} + e_{mi}\,H_2}{2\,(H_1 - H_2)} +$$

$$+ \overline{H}\,\frac{a_{mi} + c_{mi} + e_{mi}\,H_1}{2(H_2 - H_1)} = \overline{E}\;s_{mi} + \overline{F}\;t_{mi} + \overline{H}\;u_{mi}$$

y construimos el tensor

$$r'\,G_{zrf} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (-\,R_0\,s_{mi}\cosh w_0 z - H_1\,R_1\,t_{mi}\cosh w_1 z -$$

$$-\,H_2\,R_2\,u_{mi}\cosh w_2 z)\,\frac{r'}{k_i}\,J_i{}'\cos m\Theta$$

$$r'\,G_{zzf} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (-\,S_1\,t_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_1 z - S_2\,u_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_2 z)\;2r'\,J_i\cos m\Theta$$

$$r'\,G_{z\Theta f} = r'\sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (-\,R_0\,s_{mi}\cosh w_0 z + H_1\,R_1\,t_{mi}\cosh w_1 z +$$

$$+\,H_2\,R_2\,u_{mi}\cosh w_2 z)\;r^2\,J_i\,\frac{\mathrm{sen}\,m\Theta}{m}$$

$$r'\,G_{r\Theta f} = r'\sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (w_0\,R_0\,s_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_0 z + w_1\,H_1\,R_1\,t_{mi}\,p_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_1 z +$$

$$+\,w_2\,H_2\,R_2\,u_{mi}\,p_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_2 z)\,\frac{r^2\,J_i{}'}{k_i\,m}\,\mathrm{sen}\,m\Theta$$

$$r^1\,G_{\Theta\Theta f} = r'\sum_{\substack{m=2\\ i=1}} 2w_0\,R_0\,s_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_0 z\left(\frac{r^3}{k_i}J_i{}' - r^4 J_i\right)\frac{\cos m\Theta}{m^2} +$$

$$+\,r'\sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (w_1\,H_1\,R_1\,t_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_1 z +$$

$$+\,w_2\,H_2\,R_2\,u_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_2 z)\left(\frac{2p_{mi}}{k_i}\,\frac{r^3\,J_i{}'}{m^2} - \frac{p_{mi} - 1}{m^2}\,r^4\,J_i\right)\cos m\Theta$$

$$r'\,G_{rrf} = r'\sum_{\substack{m=2\\ i=1}} [2w_0\,R_0\,s_{mi}\,\mathrm{senh}\,w_0 z +$$

$$+ (p_{mi} - 1)\,(w_1 H_1 R_1 t_{mi} \operatorname{senh} w_1 z +$$
$$+ w_2 H_2 R_2 u_{mi} \operatorname{senh} w_2 z)]\, \frac{r J_i'}{k_i}\, \frac{\cos m\Theta}{m^2}$$

donde

4.12 $$p_{mi} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}\,, \qquad m \geqslant 2$$

Este valor de p_{mi} hace que el tensor construido satisfaga las ecuaciones de equilibrio 3.5. Su comprobación es laboriosa, pero simple.

g) Tomemos los restantes términos, es decir,

$$r'\, T_{rg} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} \frac{-b_{mi}}{k_i}\, r'\, J_i' \operatorname{sen} m\Theta$$

$$r'\, T_{\Theta g} = r' \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} \frac{-d_{mi}}{m}\, r^2\, J_i \cos m\Theta$$

$$r'\, T_{zg} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} f_{mi}\, r'\, J_i \operatorname{sen} m\Theta$$

con la descomposición.

4.13 $$(b_{mi}, d_{mi}, f_{mi}) = \bar{E}\, \frac{b_{mi} - d_{mi}}{2} + \bar{F}\, \frac{b_{mi} + d_{mi} + f_{mi} H_2}{2(H_1 - H_2)} +$$
$$+ \bar{H}\, \frac{b_{mi} + d_{mi} + f_{mi} H_1}{2(H_2 - H_1)} = \bar{E}\, x_{mi} + \bar{F}\, r_{mi} + \bar{H}\, v_{mi}$$

siendo el tensor correspondiente:

$$r'\, G_{zrg} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (- R_0\, x_{mi} \cosh w_0 z - H_1 R_1\, r_{mi} \cosh w_1 z -$$
$$- H_2 R_2\, v_{mi} \cosh w_2 z)\, \frac{r'}{k_i}\, J_i' \operatorname{sen} m\Theta$$

$$r'\, G_{zzg} = \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (- S_1\, r_{mi} \operatorname{senh} w_1 z - S_2\, v_{mi} \operatorname{senh} w_2 z)\; 2r'\, J_i \operatorname{sen} m\Theta$$

$$r' \, G_{z\Theta g} = r' \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (R_0 \, x_{mi} \cosh w_0 z - H_1 \, R_1 \, r_{mi} \cosh w_1 z -$$

$$- H_2 \, R_2 \, v_{mi} \operatorname{coh} w_2 z) r^2 \, J_i \frac{\cos m\Theta}{m}$$

$$r' \, G_{r\Theta g} = r' \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (- w_0 \, R_0 \, x_{mi} \operatorname{senh} w_0 z - w_1 \, H_1 \, R_1 \, r_{mi} \, p_{mi} \operatorname{senh} w_1 z -$$

$$- w_2 \, H_2 \, R_2 \, v_{mi} \, p_{mi} \operatorname{senh} w_2 z) \frac{r^2}{k_i} J_i' \frac{\cos m\Theta}{m}$$

$$r' \, G_{\Theta\Theta g} = r' \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} 2w_0 \, R_0 \, x_{mi} \left(\frac{r^3}{k_i} J_i' - r^4 \, J_i \right) \frac{\operatorname{sen} m\Theta}{m^2} \operatorname{senh} w_0 z +$$

$$+ r' \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} (w_1 \, H_1 \, R_1 \, r_{mi} \operatorname{senh} w_1 z + w_2 \, H_2 \, R_2 \, v_{mi} \operatorname{senh} w_2 z) \left(\frac{2p_{mi}}{k_i \, m^2} r^3 \, J_i' + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - p_{mi}}{m^2} r^4 \, J_i \right) \operatorname{sen} m\Theta$$

$$r' \, G_{rrg} = r' \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} [2w_0 \, R_0 \, x_{mi} \operatorname{senh} w_0 z + (p_{mi} - 1) \, (w_1 \, H_1 \, R_1 \, r_{mi} \operatorname{senh} w_1 z +$$

$$+ w_2 \, H_2 \, R_2 \, v_{mi} \operatorname{senh} w_2 z)] \frac{r}{k_i} J_i' \frac{\operatorname{sen} m\Theta}{m^2}$$

Con el caso g) hemos acabado la construcción del tensor virtual impar, que viene dado por:

$$G_{us} = G_{usa} + G_{usb} + G_{usc} + G_{usd} + G_{use} + G_{usf} + G_{usg}, \quad u, \ s = r, \ \Theta, \ z.$$

En cuanto al tensor virtual par, la construcción es en todo análoga al caso impar, teniendo en cuenta que los papeles del seno y coseno hiperbólicos están intercambiados. Por ello las fórmulas 4.2 y 4.3 se convierten en

4.14 $\quad 1/R_i' = \operatorname{senh} w_i' \, s \quad , \quad 1/S'_i = \cosh w_i' \, s \quad , \qquad i = 0, \ 1, \ 2$

4.15 $\quad H_j' = w_j' \, tg \, w_j' \, s \quad , \quad 0 < H_j' < w_j' < H_j' + \dfrac{k}{s}, \qquad k \simeq 0.567$

V. Energía potencial elástica total.

Dado el tensor $G(r, \Theta, z) = ((G_{ij}))$, llamamos densidad de energía elástica a la forma cuadrática

5.1
$$W_G = \frac{1}{2E}\left[(1+\sigma)\left(G_{zz}^2 + G_{rr}^2 + \frac{G_{\Theta\Theta}^2}{r^4} + 2G_{zr}^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\frac{G_{z\Theta}^2}{r^2} + 2\frac{G_{r\Theta}^2}{r^2}\right) - \sigma\left(G_{rr} + \frac{G_{\Theta\Theta}}{r^2} + G_{zz}\right)^2\right]$$

donde

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad \text{y} \quad E = 2\mu(1+\sigma)\,.$$

Sea $\mathcal{T}$ el tensor de tensiones de Ω, y G un tensor virtual correspondiente a $\mathcal{T}$. Entonces el teorema de Castigliano nos afirma:

5.2
$$E_{\mathcal{T}} \leqslant \iiint_{\Omega} W_G(r, \Theta, z)\, dz\, dv$$

donde $E_{\mathcal{T}}$ es la energía potencial elástica total.

Por tanto, para acotar $E_{\mathcal{T}}$, utilizaremos la densidad de energía correspondiente al tensor construido en IV, y además sólo consideramos la primera parte de W_G, puesto que el otro término es siempre no positivo.

En virtud de la desigualdad de Schwarz, vamos a acotar la energía correspondiente al tensor impar, indicando que la del tensor par seguiría un proceso análogo.

Haciendo uso de la misma desigualdad acotamos la energía correspondiente a la parte del tensor en que aparece una función hiperbólica de la misma $w_i z$ $(i = 0, 1, 2)$. Estas funciones aparecen elevadas al cuadrado y divididas por el cuadrado de una función hiperbólica de $w_i s$, multiplicando al cuadrado de la correspondiente función de las variables r y Θ.

Si hacemos la sustitución de dichos cocientes por:

5.3
$$\frac{\cosh^2 w_j z}{\operatorname{senh}^2 w_j s} \qquad j = 1, 2$$

5.4 $$\frac{\cosh^2 w_k z}{\cosh^2 w_k s} \qquad k = 0$$

de acuerdo con 4.2 y 4.3, obtenemos una mayoración de la energía. (Nótese que en el tensor virtual par los papeles de k y j estarían intercambiados).

Como tenemos un producto de funciones, podemos hacer la integración con respecto a z, y obtenemos

5.5 $$\int_{-s}^{s} \frac{\cosh^2 w_j z}{\operatorname{senh}^2 w_j s}\, dz = \frac{2w_j s + \operatorname{senh} 2w_j s}{2w_j \operatorname{senh}^2 w_j s} = V_j(s) \quad j = 1, 2$$

5.6 $$\int_{-s}^{s} \frac{\cosh^2 w_k s}{\cosh^2 w_k s}\, dz = \frac{2w_k s + \operatorname{senh} 2w_k s}{2w_k \cosh^2 w_k s} = V_k(s) \qquad k = 0$$

que son funciones de s uniformemente acotadas para todo valor de $s \geqslant \dfrac{1}{H_j} + \epsilon > \dfrac{1}{H_j}$.

Por tanto, para acotar la energía, sólo nos falta, utilizando de nuevo la desigualdad de Schwarz, acotar la parte correspondiente a la integración sobre el círculo R, de las funciones que dependen de r y Θ.

De ahora en adelante denotaremos por $g_{nupt}(r, \Theta)$, la función que en $G_{nut}(r, \Theta, z)$, $(n, u = r, \Theta, z;\ t = a, b, c, \ldots, g)$ multiplica a la función hiperbólica de $w_p z$ y $w_p s$ $(p = 0, 1, 2)$, y llamaremos

$$L_{pt} = \int_R \frac{1}{4\mu}\left(g^2_{zzpt} + g^2_{rrpt} + \frac{g^2_{\Theta\Theta pt}}{r^4} + 2\frac{g^2_{z\Theta pt}}{r^2} + 2g^2_{zrpt} + 2\frac{g^2_{r\Theta pt}}{r^2}\right) dv$$

Con lo cual, lo único que nos falta es computar y acotar los valores de L_{pt}, $p = 0, 1, 2$ y $t = a, b, \ldots, g$. Haremos el estudio para diferentes valores de t, y por simplicidad de notación denotaremos por C toda constante de acotación, que claramente no será la misma en todo el proceso. Recordamos que

$$\|f(r, \Theta)\|^2 = \int_R f^2(r, \Theta)\, dv.$$

a) Sea $p = 0$.

Todos los términos que aparecen en L_{0a} son cero, excepto

$$\frac{g_{rr\Theta a}}{r} = \frac{-w_0}{r^2} \int_0^r g_{z\Theta 0a}(s, \Theta)\, sds\,;$$

$$\frac{g_{z\Theta 0a}}{r} = \sum_{\substack{m=1\\ i=1}} \frac{d_{mi}}{m} r J_i + \sum_{m=1} \frac{d_{m0}}{m} r + \sum_{i=1} g_{0i} r J_i + g_{00} r$$

Es inmediato comprobar que

$$L_{0a} \leqslant C \left\| \frac{T_\Theta}{r^2} \right\|^2$$

haciendo uso de la desigualdad de Schwarz, y de algunas simplificaciones.

Sea $p = 1$. Tenemos

$$r' g_{zr1a} = \sum_{i=1} \frac{-s_{0i}}{k_i} r' J_i' \quad ; \quad r' g_{zz1a} = \sum_{i=1} - s_{0i} r' J_i$$

$$\frac{g_{\Theta\Theta 1a}}{r^2} = \sum_{i=1} \frac{-w_1}{k_i} s_{0i} r J_i'$$

$$\int_R (r' g_{zz1a})^2\, dr\, d\Theta = \sum_{i=1} C\, s_{0i}^2 \frac{J_0^2(k_i)}{2}$$

$$\int_R (r' g_{zr1a})^2\, dr\, d\Theta \leqslant C \sum_{i=1} s_{0i}^2 (J_1'(k_i))^2$$

$$\int_R \left(\frac{g_{\Theta\Theta 1a}}{r^2}\right)^2 r\, dr\, d\Theta \leqslant C \sum_{i=1} s_{0i}^2 (J_1'(k_i))^2$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$J_1'(z) = -\frac{1}{z} J_1(z) + J_0(z)$$

si sustituimos z por k_i, que son los ceros de $J_1(t)$, tenemos

5.7 $$J_1'(k_i) = J_0(k_i)$$

Es decir

$$L_{1a} \leqslant C \sum_{i=1} s_{0i}^2 J_0^2(k) \leqslant C \left(|| \frac{1}{r} (r T_r)_{,r} ||^2 + || T_z ||^2 \right)$$

la última desigualdad de acuerdo con 4.1, 2.10 y 2.12.

Para $p = 2$, el resultado es análogo.

b) Cuando $p = 0$, tenemos que

$$L_{0b} \leqslant C \left(\sum_{i=1} s_{1i}^2 J_0^2(k_i) \right) \leqslant C \left(|| \frac{1}{r} (r T_r)_{,r} ||^2 + || \left(\frac{T_\Theta}{r^2} \right)_{,\Theta} ||^2 \right)$$

de acuerdo con 4.5, 2.10 y 2.11.

Para $p = 1$, lo único digno de mención es que

$$r' g_{rr1b} = \frac{1}{r'} \int_0^r \frac{g_{\Theta\Theta 1b}(s, \Theta)}{s^2} ds$$

y por tanto

$$\int_R (g_{rr1b})^2 r \, dr \, d\Theta = \int_R \left[\frac{1}{r} \int_0^r w_1 \left(t_{10} t^2 + \sum_{i=1} \frac{2t_{1i}}{k_i} t J_0'(k_i t) \right) \cos\Theta \, dt \right]^2 r dr \, d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_R \left[\int_0^r w_1 \left(t_{10} t \cos\Theta + \sum_{i=1} \frac{2t_{1i}}{k_i} J_0'(k_i t) \right) \cos\Theta \, dt \right]^2 r dr \, d\Theta =$$

$$= w_1^2 \int_R \left[\left(t_{10} \frac{r^2}{2} + \sum_{i=1} \frac{2t_{1i}}{k_i^2} J_0(k_i t) \right) \cos\Theta \right]^2 r dr \, d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant C \left((t_{10}^2 \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1} \pi \, t_{1i}^2 \frac{J_0^2(k_i)}{2} \right)$$

Los demás términos son inmediatos y obtenemos

$$L_{1b} \leqslant C \left(t_{10}^2 \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1} t_{1i}^2 \frac{J_0^2(k_i)}{2} \right) \leqslant C \left(|| \frac{1}{r} (r T_r)_{,r} ||^2 + || \left(\frac{T_\Theta}{r^2} \right)_{,\Theta} ||^2 + || T_z ||^2 \right)$$

usando las fórmulas 4.4, 4.5, 2.10, 2.11 y 2.12.

En el caso de $p = 2$, la analogía es exacta.

c) No existe diferencia formal entre el caso b) y el c), por lo que obtenemos, utilizando las fórmulas correspondientes, que

$$L_{pc} \leqslant C\left(\| \frac{1}{r}(rT_r)_{,r} \|^2 + \| \left(\frac{T_\Theta}{r^2}\right)_{,\Theta} \|^2 + \| T_z \|^2 \right), \qquad p = 0,\ 1,\ 2,$$

d) No existe $p = 0$. Tomemos pues $p = 1$.

En virtud de 4.9, obtenemos que

5.8
$$|q_{m0}| \leqslant 8/3 \quad ; \quad |1 + q_{m0}| \leqslant 1$$

Haciendo uso de las desigualdades de esta fórmula, así como la de Schwarz, y simplificaciones análogas a las del caso b, llegaremos a que

$$L_{1d} \leqslant C \sum_{m=2} |-t_{m0}^2| \frac{\pi}{2} \leqslant C\left(\| \left(\frac{T_\Theta}{r^2}\right)_{,\Theta} \|^2 + \| T_z \|^2 \right)$$

donde en la última desigualdad hemos usado las fórmulas 4.8, 2.11 y 2.12.

Para $p = 2$, el resultado es semejante.

e) Análogo al caso d).

f) Para $p = 0$, no se presenta ningún problema nuevo, y obtenemos

$$L_{0f} \leqslant C \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} s_{mi}^2\, \pi^2 \frac{J_0^2(k_i)}{2} \leqslant C\left(\| \frac{1}{r}(rT_r)_{,r} \|^2 + \| \left(\frac{T_\Theta}{r^2}\right)_{,\Theta} \|^2 \right)$$

utilizando las desigualdades habituales y las fórmulas 4.11, 2.10 y 2.11. Para $p = 1$ hay que tener en cuenta que según 4.12,

5.9
$$|p_{mi}| \leqslant 5/3 \quad ; \quad |1 - p_{mi}| \leqslant 1$$

por lo que utilizando la desigualdad de Schwarz, llevamos a la conclusión

$$L_{1f} \leqslant C \sum_{\substack{m=2\\ i=1}} t_{mi}^2 \frac{J_0^2(k_i)}{2} \leqslant C\left(\| \frac{1}{r}(rT_r)_{,r} \|^2 + \| \left(\frac{T_\Theta}{r^2}\right)_{,\Theta} \|^2 + \| T_z \|^2 \right)$$

utilizando en la última desigualdad las fórmulas 4.11, 2.10, 2.11 y 2.12.

Para $p = 2$ obtenemos la misma acotación

g) Es formalmente análoga al caso f).

VI. Conclusión.

En virtud del estudio hecho en la sección V, concluimos que

$$6.1 \quad E_{\mathcal{T}} \leqslant C\ V(s)\left(\left\|\frac{1}{r}(rT_r)_{,r}\right\|^2 + \left\|\left(\frac{T_\Theta}{r^2}\right)_{,\Theta}\right\|^2 + \left\|\frac{T_\Theta}{r^2}\right\|^2 + \|T_z\|^2\right)$$

donde la función $V(s)$ está acotada para $s \geqslant s_0 > 0$, y C es una constante que depende del valor de μ, propio del material.

Se entiende que

$$6.2 \qquad \|T_z\|^2 = \|T_z^1\|^2 + \|T_z^2\|^2$$

y lo mismo para los otros términos de la fórmula 6.1.

REFERENCIAS

(1) BATEMAN MANUSCRIPT PROJECT, *Higher transcendental Functions*, Vol. II, McGraw-Hill, New York, 1953.

(2) B. BERNSTEIN and R. TOUPIN, «Korn's inequalities for the sphere and for the circle». Arch. Rational. Mech. Anal. 6 (1960), 51-64.

(3) A. DOU, «On the principle of Saint-Venant», MRC Technical Summary Report # 472, Madison 1964.

(4) A. DOU, «Upper estimate of the Potential Elastic Energy of a Cylinder». Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 83-93.

(5) A. DOU, «Soluciones Periódicas de las ecuaciones de la Elasticidad en en un cilindro infinito», Collectanea Mathematica 21 (1970), 131-147.

(6) W. B. FORD, «On the posibility of Differentiating term by term the developments for an arbitrary function of one real variable in terms of Bessel Functions», Trans. Amer Math. Soc. 4(1903), 178-184.

(7) T. FORT, *Infinite Series*, Clarendon Press, Oxford 1930.

(8) K. O. FRIEDRICHS, «On the Boundary value problems of the theory of Elasticity and Korn's Inequality», Ann. of Math. 48 (1947), 441-471.

(9) G. GOUDET, *Les Fonctions de Bessel*, Masson & Cie, Paris. 1954.

(10) A. GUTIÉRREZ, «Acotación de la energía potencial elástica de un cilindro», Tesis Doctoral, Madrid 1973.

(11) A. GUTIÉRREZ, «Acotación de la energía potencial elástica de un cilindro de sección cuadrada», Revista Real Academia Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Tomo LXX n.º 3 (1976), 549-573.

(12) I HLAVÁCEK, and J. NEČAS, «On Inequalities of Korn's type», Arch. Rational Mech. Anal. 36 (1970), 305-334.

(13) A. KORN, «Über die Lösung des Grundproblemes der Elastizitätstheorie», Math. Annalen 75 (1914), 497-554.

(14) L. D. LANDAU and E. M. LIPSCHITZ, *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, London 1959.

(15) CH. N. MOORE, «Note on the roots of Bessel functions», Ann of Math. 9 (1908), 156-162.

(16) J. J. ROSEMAN, «A pointwise estimate for the stress in a cylinder and its application to Saint-Venant's principle», Arch. Rational Mach. Anal. 21 (1966), 23-48.

(17) B. DE SAINT-VENANT, «Mémoires de l'Academie de Sciences des Savants étrangers», 14 (1885), 223-560, y «Mémoire sur le flexion des prismes», Journal de Liouville, Ser, 2 (1856), 89-189.

(18) I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York 1956.

(19) I. S. SOKOLNIKOFF, *Tensor Analysis*, John Wiley & Sons, New York 1951.

(20) R. A. TOUPIN, «Saint-Venant's principle», Arch. Rational Mech. Anal. 18 (1965), 83-96.

(21) G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, McMillan Inc, New York 1954.

(22) H. WEYL, «Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestaltete elastischen Körpers», Rendiconti Circolo Mat. Palermo 39 (1915), 1-49.

A. Gutiérrez.
Departamento de Ecuaciones Funcionales.
Facultad de Ciencias Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid.