TRES TEOREMAS DE APROXIMACIÓN EN EL ESPACIO L_p MEDIANTE POLINOMIOS DE COEFICIENTES ENTEROS

por

EMILIANO APARICIO BERNARDO

INTRODUCCIÓN

Los estudios de los problemas expuestos a continuación fueron iniciados por el autor en el año 1953 bajo la dirección del eminente matemático A. O. Guelfond, cuya memoria quiero honrar, y a quien se debe el planteamiento de los mismos. En dicho año, el autor del presente trabajo consiguió demostrar por vez primera los tres teoremas que siguen para el espacio L_2. La demostración del teorema 2 para L_2 puede verse en [2], [3], véase también [1]. Este teorema fue inmediatamente generalizado para L_p por A. O. Guelfond [8] y más tarde, año 1962, fue especificado por R. M. Trigub [13], consiguiendo expresarlo éste mediante una igualdad asintótica.

Es curioso que después del trabajo de D. Hilbert [9] del año 1894, en el que se demuestra que si $b - a < 4$, entoces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un polinomio de coeficientes enteros $P(x)$, no idénticamente nulo, tal que

$$\int_a^b P^2(x)\, dx < \varepsilon$$

no se conocía ningún resultado en la teoría de las aproximaciones diofánticas en el espacio L_p. Probablemente, el interés que despertó mi trabajo y el de A. O. Guelfond, mencionándose en las fundamentales obras como [10] y [12], se debe a que, verdaderamente es muy difícil encontrar métodos analíticos suficientemente efectivos para aplicarlos en problemas relacionados con coeficientes enteros. Después de estos trabajos y hasta la fecha, sólo se puede mencionar el citado trabajo de R. M. Trigub en el que se emplean otros métodos distintos y que representa un adelanto más en la resolución de estos problemas. En mi tesis doctoral del año 1972, [4], se generaliza para L_p el resultado inicial mío.

En mi información a las II.as Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas de Madrid del año 1973, [6] se pone de manifiesto que con los mismos métodos empleados por el autor en su trabajo inicial [3], se puede conseguir la igualdad asintótica indicada por R. M. Trigub. El teorema 2 que exponemos más adelante es una reproducción de esta información. En lo que se refiere a los teoremas 1 y 3, éstos figuran para L_2 en mi tesis doctoral del año 1954, [2] y para L_p ($p \geqslant 1$) se generalizan en [4], publicándose ahora por vez primera.

§ 1. Existencia de la aproximación óptima.

Convendremos en utilizar las siguientes notaciones. Los polinomios de coeficientes enteros, no simultáneamente nulos, $r(x)$, que cumplen la condición

$$|r(x)| < 1, \qquad \forall x, \qquad x \in [a, b] \tag{1}$$

se llamarán polinomios fundamentales de este segmento.

La demostración de la existencia de polinomios fundamentales para un segmento $[a, b]$ de longitud $b - a < 4$, puede verse en [3] y es consecuencia inmediata de un teorema de M. Fekete. Véase también [5]. Si $b - a \geqslant 4$, tales polinomios no existen [6].

Sea $f(x) \in L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$, una función arbitraria, y sea $0 \leqslant \varphi \leqslant (x) \leqslant \leqslant K$ una función acotada y sumable en el segmento $[a, b]$, o sea, integrable en el sentido Lebesgue, que se anula a lo sumo en un conjunto de medida cero. Denotaremos mediante $E_n^e(f)_{L_p}$ y $E_n(f)_{L_p}$ los valores del

$$\inf_{P_n} \| f - P_n \|_{L_p} = \inf_{P_n} \left(\int_a^b | f(x) - P_n(x) |^p \varphi(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

donde el ínf. se extiende a los polinomios de grado $\leqslant n$, de coeficientes enteros en el 1er caso y de coeficientes reales arbitrarios en el 2.º caso.

A continuación H_n denotará la clase de polinomios de grado $\leqslant n$ de coeficientes enteros.

TEOREMA 1. *Para cualquier número natural n, existe al menos un polinomio $P(x) \in H_n$ para el cual se alcanza el valor* (2), *o sea, tal que*

$$\left(\int_a^b |f(x) - P(x)|^p \varphi(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = E_n^e. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$A = \left(\int_a^b |f(x) - 1|^p \varphi(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

y demostremos que la desigualdad

$$\left(\int_a^b |f(x) - P(x)|^p \varphi(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant A \tag{5}$$

solamente puede verificarse para un número finito de polinomios $P(x)$ de la clase H_n.

En efecto, supongamos, por el contrario, que se verifica la desigualdad (5) para un conjunto infinito de polinomios $P(x) \in H_n$. Si $P(x)$ es uno de tales polinomios, entonces, aplicando la desigualdad

$$(a + b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p),\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0, \tag{6}$$

obtenemos

$$\int_a^b |P(x) - 1|^p \varphi(x) dx \leqslant 2^{p-1}\left(\int_a^b |f(x) - P(x)|^p \varphi(x) dx + \int_a^b |f(x) - 1|^p \varphi(x)\, dx\right). \tag{7}$$

Como 1 y $P(x) - 1$ también pertenecen a la clase H_n, vemos que existe una sucesión infinita de polinomios distintos $P_1(x), \ldots, P_m(x), \ldots$, de la clase H_n, tales que

$$\int_a^b |P_m(x)|^p \varphi(x)\, dx \leqslant (2A)^p . \tag{8}$$

Sea h_{ms} la altura del polinomio $P_m(x)$, o sea, el máximo del módulo de sus coeficientes, y sea

$$q_s = \inf_{Q(x)} \int_a^b |Q(x)|^p \varphi(x)\, dx, \tag{9}$$

donde el ínfimo se extiende a todos los polinomios $Q(x)$ de coeficientes reales de grado $\leqslant n$, con el coeficiente de x^s igual a la unidad. Entonces

$$q_s \leqslant \frac{1}{h_{ms}^p} \int_a^b |P_m(x)|^p \varphi(x)\, dx \leqslant \left(\frac{2A}{h_{ms}}\right)^p . \tag{10}$$

Como $q = \min_{0 \leq s \leq n} q_s \neq 0$, de aquí resulta que

$$h_{ms} \leqslant \frac{2A}{q^{1/p}} . \tag{11}$$

Ahora bien, como los coeficientes del polinomio $P(x)$ son enteros, sólo puede haber un número finito de polinomios de coeficientes enteros que cumplan la condición (11). Esto contradice a la hipótesis y, por lo tanto, sólo puede haber un número finito de polinomios de coeficientes enteros que cumplan la desigualdad (5). Entre éstos siempre se puede tomar aquél que proporcione el valor mínimo de la integral del primer miembro, obteniendo el polinomio de desviación mínima a la función,

El teorema queda demostrado.

§ 2. Teorema general de la teoría de las aproximaciones en el espacio L_p mediante polinomios de coeficientes enteros.

Teorema 2. *Si $f(x) \in L_p[a, b]$, $b - a < 4$, admite una aproximación media en la métrica del espacio L_p (con la función peso $\varphi(x)$) me-*

diante polinomios de coeficientes reales con una precisión arbitraria, entonces también admite una aproximación semejante mediante polinomios de coeficientes enteros. Precisando, si μ *es el máximo orden de multiplicidad de las raíces, situadas en el segmento* $[a, b]$, *de un polinomio fundamental no negativo arbitrario de este segmento, o sea, tal que*

$$0 \leqslant r(x) < 1, \quad \forall\, x, x \in [a, b], \tag{12}$$

entonces se verifica la igualdad asintótica

$$E_n^e(f)_{L_p} = E_n(f)_{L_p} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p\mu}}}\right). \tag{13}$$

Si dicho polinomio fundamental no se anula en el segmento $[a, b]$, *entonces se verifica la igualdad*

$$E_n^e(f)_{L_p} = E_n(f)_{L_p} + \frac{1}{R^N} o(n) \tag{14}$$

donde $R > 1$ *y* $N = \left[\frac{n}{q}\right]$. *Aquí* q *es el grado del polinomio* $r(x)$.

Demostración. Hallaremos primero una cota superior para $E_n^e(f)_{L_p}$, pues está claro que $E_n(f)_{L_p} \leqslant E_n^e(f)_{L_p}$.

Fácilmente se observa que, para cualesquiera enteros N y k, $0 < k \leqslant N$,

$$r^k(x) = \sum_{\nu=0}^{N-k} \binom{N-k}{\nu} r^{\nu+k}(x)\,(1 - r(x))^{N-k-\nu} \tag{15}$$

y que el sistema de polinomios

$$\{x^s r^k(x)\} \quad , \quad 0 \leqslant s \leqslant q-1 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

es completo.

Sea $Q_n(x)$ el polinomio de coeficientes reales, de grado $\leqslant n$, para el cual se alcanza el ínfimo (**2**);

$$E_n(f)_{L_p} = \|f - Q_n\|_{L_p} \tag{17}$$

y expresemos $Q_n(x)$ mediante el sistema (16):

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=0}^{q-1} a_{ks}\, x^s\, r^k(x) \ , \tag{18}$$

donde a_{ks} son números reales y $N = \left[\dfrac{n}{q}\right]$. Sustituyendo en (18) $r^k(x)$ por (15) y cambiando el orden de sumación, resulta

$$Q_n(x) = \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{m=0}^{N} A_{sm}\, x^s\, r^m(x)\ (1 - r(x))^{N-m}, \tag{19}$$

donde A_{sm} son unos números reales.

Hagamos

$$A_{sm} = B_{sm} + C_{sm}, \tag{20}$$

donde $B_{sm} = [A_{sm}]$ es la parte entera de A_{sm} y $C_{sm} = \{A_{sm}\}$ es la parte fraccionaria, $0 \leqslant C_{sm} < 1$. Haciendo ahora

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{m=0}^{N} B_{sm}\, x^s\, r^m(x)\ (1 - r(x))^{N-m}, \tag{21}$$

$$S_n(x) = \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{m=0}^{N} C_{sm}\, x^s\, r^m(x)\ (1 - r(x))^{N-m}, \tag{22}$$

resulta

$$Q_n(x) = P_n(x) + S_n(x), \tag{23}$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado $\leqslant n$, de coeficientes enteros; los coeficientes del polinomio $S_n(x)$ están acotados.

De aquí ahora se obtiene la desigualdad

$$\| f - P_n \|_{L_p} \leqslant \| f - Q_n \|_{L_p} + \| S_n \|_{L_p}, \tag{24}$$

por lo cual, en virtud de (17), resulta

$$E_n^e(f)_{L_p} \leqslant E_n(f)_{L_p} + \| S_n \|_{L_p}. \tag{25}$$

No queda más que acotar la norma $\| S_n \|_{L_p}$.

En primer lugar, de (22) se tiene

$$| S_n(x) | \leqslant C_1 \sum_{m=0}^{N} r^m(x)\ (1 - r(x))^{N-m}, \tag{26}$$

donde

$$C_1 = \max_{x \in [a,b]} \sum_{s=0}^{q-1} | x |^s, \tag{27}$$

Como

$$\sum_{m=0}^{N} r^m(x)\ (1 - r(x))^{N-m} = \sum_{m=0}^{N-1} r^m(x)\ (1 - r(x))^{N-m} + r^N(x)\ , \tag{28}$$

aplicando la desigualdad (6), se tiene

$$\int_a^b | S_n(x) |^p\ \varphi(x)\ dx \leqslant 2^{p-1}\ C_1^p \int_a^b \left(\sum_{m=0}^{N-1} r^m(x)\ (1 - r(x))^{N-m} \right)^p \varphi(x)\ dx + $$

$$+ 2^{p-1}\ C_1^p \int_a^b r^{Np}(x)\ \varphi(x)\ dx\ . \tag{29}$$

Ahora bien, según (12)

$$0 \leqslant r(x) \leqslant \frac{1}{R_1} < 1 \quad , \quad \forall x \quad , \quad x \in [a, b], \tag{30}$$

donde $R_1 > 1$ es una constante.

Por lo tanto,

$$\int_a^b | S_n(x) |^p\ \varphi(x)\ dx \leqslant 2^{p-1}\ C_1^p \cdot K \int_a^b \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1 - r(x))^{N-m}}{R_1^m} \right)^p dx + $$

$$+ 2^{p-1}\ C_1^p, K \int_a^b r^{Np}(x)\ dx. \tag{31}$$

En virtud de (30), esta última integral puede acotarse así:

$$\int_a^b r^{Np}(x)\, dx < \frac{b-a}{R_1^{Np}} . \tag{32}$$

Examinemos ahora la primera integral que figura en el segundo miembro de (31):

$$\int_a^b \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1-r(x))^{N-m}}{R_1^m} \right)^p dx . \tag{33}$$

Supongamos primero que el polinomio $r(x)$ se anula en el segmento $[a, b]$, y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ los ceros que están situados en este segmento. Si $\mu_1, \ldots, \mu_s$ son sus órdenes de multiplicidad, entonces se tiene:

$$r(x) = |x - \alpha_i|^{\mu_i} \cdot |t_i(x)| \quad , \quad t_i(\alpha_i) \neq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, s. \tag{34}$$

Tomemos un número positivo

$$\delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq k} |\alpha_i - \alpha_k| , \tag{35}$$

tan pequeño que sea menor que la mitad de las distancias de los extremos del segmento $[a, b]$ hasta los ceros α_i que no coinciden con los extremos a y b. Entonces,

$$\eta = \min_{i=1,\ldots,s} \min_{|x-\alpha_i| \leq \delta} |t_i(x)| > 0 . \tag{36}$$

Haciendo

$$E = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \{x : |x - \alpha_i| < \delta\}, \tag{37}$$

la integral (33) puede expresarse en forma de una suma

$$\sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\substack{|x-\alpha_i| < \delta \\ x \in [a,b]}} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1-r(x))^{N-m}}{R_1^m} \right)^p dx + \int_E \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1-r(x))^{N-m}}{R_1^m} \right)^p dx. \tag{38}$$

Ahora bien, como $r(x)$ no se anula en E, existe un número $R_2 > 1$ tal que

$$0 < 1 - r(x) \leqslant \frac{1}{R_2} < 1 \quad , \quad \forall x \quad , \quad x \in E . \tag{39}$$

Por lo tanto, para la última integral de (38), se tiene

$$\int_E \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1 - r(x))^{N-m}}{R_1^m} \right)^p dx \leqslant \int_E \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{R_2^{N-m} R_1^m} \right)^p dx \leqslant \frac{(b-a)N^p}{R^{Np}}, \tag{40}$$

donde

$$R = min\ (R_1, R_2) > 1. \tag{41}$$

Por otra parte, se puede tomar el número δ en (35) tan pequeño, de modo que sea

$$1 - r(x) > \frac{1}{R_0} \quad , \quad \forall x \quad , \quad x \in \bigcup_{i=1}^{s} (\alpha_i - \delta, \alpha_i + \delta) , \tag{42}$$

donde R_0 es un número arbitrario que cumpla la condición $1 < R_0 < < R_1$. De aquí que

$$\int\limits_{\substack{|x - \alpha_i| < \delta \\ x \in [a, b]}} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1 - r(x))^{N-m}}{R_1^m} \right)^p dx \leqslant \left(\sum_{m=0}^{N-1} q_1^m \right)^p \int\limits_{\substack{|x - \alpha_i| < \delta \\ x \in [a, b]}} (1 - r(x))^{Np}\, dx <$$

$$< C_1^p \int\limits_{\substack{|x - \alpha_i| < \delta \\ x \in [a, b]}} (1 - r(x))^{Np}\, dx , \tag{43}$$

donde

$$C_1 = \frac{1}{1 - q_1} \quad , \quad 0 < q_1 = \frac{R_0}{R_1} < 1 . \tag{44}$$

Pero

$$\int\limits_{\substack{|x-\alpha_i|\leqslant\delta \\ x\in[a,b]}} (1-r(x))^{Np}\,dx \leqslant \int\limits_{\substack{|x-\alpha_i|\leqslant\delta \\ x\in[a,b]}} e^{-Np\,r(x)}\,dx = \int\limits_{\substack{|x-\alpha_i|\leqslant\delta \\ x\in[a,b]}} e^{-Np\,|x-\alpha_i|^{\mu_i}|t_i(x)|}\,dx, \tag{45}$$

y, en virtud de (36), resulta

$$\int\limits_{\substack{|x-\alpha_i|<\delta \\ x\in[a,b]}} (1-r(x))^{Np}\,dx \leqslant \int\limits_{|x-\alpha_i|\leqslant\delta} e^{-\eta\,Np\,|x-\alpha_i|^{\mu_i}}\,dx\,. \tag{46}$$

Integrando sobre todo el eje numérico y haciendo la sustitución

$$(\eta N p)^{\frac{1}{\mu_i}}(x-\alpha_i) = t\,, \tag{47}$$

obtenemos que la integral (46) no es superior a

$$\frac{2}{(\eta\,N\,p)^{\frac{1}{\mu_i}}}\int\limits_0^\infty e^{-t^{\mu_i}}\,dt = \mathrm{o}\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{\mu_i}}}\right)\,. \tag{48}$$

Lcs relaciones (40), (42), (46) y (48) muestran que, para la integral (33), en virtud de su expresión (38), se tiene

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(1-r(x))^{N-m}}{R_1^m}\right)^p dx = \mathrm{o}\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{\mu}}}\right)\,, \tag{49}$$

donde $\mu = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \mu_i\,.$

Teniendo en cuenta (32) y (49), para el primer miembro de (31), resulta

$$\int\limits_a^b |S_n(x)|^p\,\varphi(x)\,dx = \mathrm{o}\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{\mu}}}\right)\,. \tag{50}$$

Por lo tanto,

$$\|S_n\|_{L_p} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p\mu}}}\right), \tag{51}$$

puesto que $N = \left[\frac{n}{q}\right]$. En virtud de (25) y de la definición (2), esto muestra que se verifican las desigualdades

$$E_n(f)_{L_p} \leqslant E_n^e(f)_{L_p} \leqslant E_n(f)_{L_p} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p\mu}}}\right), \tag{52}$$

de donde se deduce la igualdad (13).

Supongamos ahora que el polinomio fundamental no negativo $r(x)$ no se anula en el segmento $[a, b]$. En este caso, el conjunto E en (37) coincide con todo el segmento $[a, b]$, y para la integral (33), en virtud de (40), se tiene

$$\int_a^b \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1 - r(x))^{N-m}}{R_1^m}\right)^p dx \leqslant \frac{(b - a)N^p}{R^{Np}}. \tag{53}$$

Por las desigualdades (31), (32) y (53), ahora resulta

$$\int_a^b |S_n(x)|^p \varphi(x)\, dx = \frac{1}{R^{Np}} o(N^p), \tag{54}$$

siendo $R > 1$. Esto muestra que, en este caso, se verifica la igualdad

$$E_n^e(f)_{L_p} = E_n(f)_{L_p} + \frac{1}{R^N} o(n), \tag{55}$$

donde $R > 1$ y $N = \left[\frac{n}{q}\right]$. Aquí

$$\frac{1}{R} = \max\left(\max_{a \leqslant x \leqslant b} r(x), \max_{a \leqslant x \leqslant b} (1 - r(x))\right). \tag{56}$$

El teorema queda completamente demostrado.

Veamos algunos ejemplos.

1. Para el segmento $[0, 1]$, el polinomio fundamental no negativo es $x(1-x)$; en este caso, $\mu = 1$, por lo cual, el último sumando en (13) puede sustituirse por $o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right)$.

2. Si $[a, b] \subset (0, 1)$, entonces el polinomio fundamental no negativo $x(1-x)$ no se anula en este segmento y la cota respectiva es $\dfrac{1}{R^N}\, o(n)$, donde $R > 1$ y $N = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.

3. Para el segmento $[-1, 1]$, el polinomio fundamental no negativo es $x^2(1-x^2)$ y la cota correspondiente es $o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2p}}}\right)$.

4. Para el segmento $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, el polinomio fundamental no negativo es $(1-x^2)^2\, x^2(2-x^2)$, y la cota en cuestión de nuevo es $o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2p}}}\right)$.

Observación. En el teorema de R. M. Trigub [13], demostrado con otros métodos para $\varphi(x) \equiv 1$, la igualdad asintótica correspondiente no viene relacionada con μ y tiene la forma

$$E_n^e(f)_{L_p} = E_n(f)_{L_p} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2p}}}\right). \tag{57}$$

Los ejemplos expuestos sugieren ahora la hipótesis de que posiblemente siempre sea $\mu \leqslant 2$. Hasta la fecha no se conocen ejemplos en que una de las igualdades (13) o (57) proporcione mejor resultado que la otra. No obstante, según afirma R. M. Trigub en [13], resulta que perfeccionando su método se puede conseguir en (57) la cota $o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right)$ y para el segmento $[0, 1]$, se puede tomar $o\left(n^{-\frac{2}{p}}\right)$, cotas que, según parece, ya no pueden ser mejoradas.

§ 3. Polinomios de tipo Bernstéin para las aproximaciones en el segmento [0,1].

El teorema de este párrafo muestra que para las funciones continuas en el segmento [0, 1] los polinomios de «tipo Bernstéin» de coeficientes enteros representan una aproximación bastante buena de la función en la métrica del espacio L_p.

Sea $f(x)$ una función continua en el segmento [0, 1]. Es sabido que los polinomios de Bernstéin

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{58}$$

cumplen la condición

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{59}$$

uniformemente respecto de x. Además, se verifica la desigualdad

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f(x) - B_n(x)| \leqslant \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{60}$$

(Véase [11]).

Aquí demostraremos que les polinomios de coeficientes enteros de «tipo Bernstéin» (1)

$$B_n^e(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right] x^k (1-x)^{n-k} \tag{61}$$

cumplen una propiedad análoga a (59), pero respecto de la métrica del espacio $L_p[0, 1]$, con la función peso $0 \leqslant \varphi(x) < K$. Esto es una consecuencia inmediata del siguiente teorema.

Teorema 3. *Si*

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq \delta \\ x_1, x_2 \in [0,1]}} |f(x_1) - f(x_2)| \tag{62}$$

(1) Los corchetes [ ] en (61) denotan la parte entera.

es el módulo de continuidad de la función $f(x)$ en el segmento $[0, 1]$, *entoces*

$$||f - B_n^e||_{L_p} \leqslant \frac{3K^{\frac{1}{p}}}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right). \tag{63}$$

Demostración. Hagamos

$$D(x) = B_n(x) - B_n^e(x). \tag{64}$$

Entonces, está claro que

$$|D(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} x^k (1 - x)^{n-k} \tag{65}$$

y, por otra parte,

$$||f - B_n^e||_{L_p} \leqslant ||f - B_n||_{L_p} + ||D||_{L_p}. \tag{66}$$

Pero, en virtud de (60),

$$||f - B_n||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x) - B_n(x)|^p \varphi(x)\, dx} \leqslant \frac{3}{2} K^{\frac{1}{p}} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{67}$$

y todo se reduce a la acotación de $||D||_{L_p}$.

En primer lugar, en virtud de (65),

$$||D||_{L_p}^p = \int_0^1 |D(x)|^p \varphi(x)\, dx \leqslant K \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k (1 - x)^{n-k}\right)^p dx. \tag{68}$$

Consideremos la integral

$$J = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k (1 - x)^{n-k}\right)^p dx. \tag{69}$$

Teniendo en cuenta que la función subintegral es par respecto del punto $\frac{1}{2}$, esta integral puede expresarse en la forma

$$J = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1-x)^{n+1} - x^{n+1}}{1-2x}\right)^p dx \tag{70}$$

y, haciendo la sustitución $t = 1 - 2x$, obtenemos

$$J = \int_0^1 \left(\frac{\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1}}{t}\right)^p dt = J' + J'', \tag{71}$$

donde

$$J' = \frac{1}{2^{p(n+1)}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{(1+t)^{n+1} - (1-t)^{n+1}}{t}\right)^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^p}{2^{p(n+1)}}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1+t)^{p(n+1)}\, dt < \frac{2^{p+1}}{p^{n+1}}, \tag{72}$$

y

$$J'' = \frac{1}{2^{p(n+1)}}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1+t)^{n+1} - (1-t)^{n+1}}{t}\right)^p dt. \tag{73}$$

Haciendo en la desigualdad

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + \ldots + x^n \leqslant (1+n)x^n, \qquad x > 1, \tag{74}$$

$x = \dfrac{1+t}{1-t}$, $\quad 0 \leqslant t < 1$, $\quad$ resulta

$$(1+t)^{n+1} - (1-t)^{n+1} \leqslant 2(n+1)\, t\,(1+t)^n. \tag{75}$$

Por cierto, esta desigualdad también es válida para $t = 1$.

Aplicando la desigualdad obtenida, hallamos:

$$J'' \leqslant \frac{2^p (n+1)^p}{2^{p(n+1)}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1+t)^{np}\, dt < \frac{(n+1)^p}{np+1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{np+1} = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{76}$$

De (71), (72), (73) y (76), deducimos que

$$J = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{77}$$

y teniendo en cuenta (68) y (69), resulta

$$||D||_{L_p}^p = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{78}$$

de donde

$$||D||_{L_p} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right). \tag{79}$$

Sustituyendo (67) y (79) en (66), obtenemos definitivamente

$$||f - B_n^e||_{L_p} \leqslant \left(\frac{3K^{\frac{1}{p}}}{2}\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right). \tag{80}$$

El teorema queda demostrado.

BIBLIOGRAFÍA

[1] E. APARICIO BERNARDO. *Sobre las propiedades extremales de los polinomios de coeficientes enteros y la aproximación de las funciones por estos polinomios.* «Autoepítome de la tesis», Universidad Estatal Lomonósov de Moscú (1954) (en ruso).

[2] E. APARICIO BERNARDO. *Propiedades extremales de los polinomios de coeficientes enteros y aproximación de las funciones mediante tales polinomios.* «Memoria para optar al grado de Candidato en Ciencias Físico-Matemáticas», Moscú, 1954 (en ruso).

[3] E. APARICIO BERNARDO. *Sobre algunas propiedades de los polinomios de coeficientes enteros y sobre la aproximacion media de las funciones mediante polinomios de coeficientes enteros.* «Noticias de la Academia de Ciencias de la URSS. Serie de Matemáticas», 19 (1955), 303-318 (en ruso).

[4] E. APARICIO BERNARDO. *Propiedades extremales de los polinomios de coeficientes enteros y aproximacion de las funciones mediante dichos polinomios.* «Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemámáticas», Bilbao, 1972.

[5] E. APARICIO BERNARDO. *Método de las formas lineales para la acotación de las desviaciones mínimas a cero de los polinomios generalizados de coeficientes enteros.* «Actas de las Primeras Jornadas Matemáticas Luso-Españolas», Madrid (Lisboa), 1972.

[6] E. APARICIO BERNARDO. *Teorema general de la teoría de las aproximaciones de las funciones en el espacio L_p mediante polinomios de coeficientes enteros.* «Actas de las IIas Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas», Madrid, 1973.

[7] M. FEKETE. *Über dien Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen koeffizienten.* «Math. Zeitschr.», 17 (1923), 228-249.

[8] A. O. GUELFOND. *Sobre las aproximaciones uniformes mediante polinomios de coeficientes enteros racionales.* «Progresos de las Ciencias Matemáticas». Vol. X. ed. 1 (63) (1955), 41-65 (en ruso).

[9] D. HILBERT. *Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynome.* «Acta Math.», 18 (1894), 155-159.

[10] A. G. KÚROSH (redactor principal) y otros. *La Matemática en la URSS en cuarenta años.* 1917-1957. «Editorial Estatal de Literatura Físico-Matemática», Moscú, 1959, Tomo I, 1002 págs, Tomo II, 819 págs. (en ruso).

[11] I. P. NATANSÓN. *Teoría constructiva de las funciones.* «Editorial Estatal de libros de teoría y técnica», Moscú-Leningrado, 1949 (en ruso), 688 páginas. Edición inglesa: Constructive Function Theory, vol. I and II. Transl. by A. N. Obolensky and J.R. Schulenberger. Frederick Ungar. Publ. Co. New York 1964 and 1965.

[12] A. F. TÍMAN. *Teoría de la aproximacion de las funciones de variable real.* «Editorial Estatal de Literatura Físico-Matemática», Moscú, 1960, 624 páginas (en ruso).

[13] R. M. TRIGUB. *Aproximacion de las funciones mediante polinomios de coeficientes enteros.* «Noticias de la Academia de Ciencias de la URSS. Serie de Matemáticas», (26) (1962), 261-280, (en ruso).

Dpto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Apartado 644
BILBAO