GENERALIZACIÓN DE LA FORMA DE LIOUVILLE-APLICACIONES

por

A. M. AMORES — F. VARELA

1. INTRODUCCIÓN.

Sea M una variedad diferenciable y ω una k-forma exterior sobre M. Se recuerda que la clase de ω es una función sobre M con valores enteros que asocia a cada punto $x \in M$ la codimensión del subespacio de $T_x M$ dado por

$$\{X \in T_x M;\ X \lrcorner\, \omega = 0 \ \text{ y } \ X \lrcorner\, d\omega = 0\}.$$

Es un resultado bien conocido de E. Cartan que si ω tiene clase constante r, el mínimo número de funciones independientes necesarias para expresar localmente la forma es precisamente r.

Una forma de clase constante muy importante es la 2-forma $d\theta$ sobre el fibrado cotangente, siendo θ la forma de Liouville sobre $T^* M$. Esta forma θ tiene las propiedades notables siguientes:

1) $d\theta$ es una forma simpléctica; es decir, cerrada y de clase máxima.
2) θ se escribe localmente en la forma $\Sigma y_i\, dx^i$.
3) Existe un único campo global X sobre $T^* M$ tal que $X \lrcorner\, d\theta = \theta$.
4) θ induce sobre el fibrado esférico de $T^* M$ una forma de contacto.
5) Si α es una forma de *Pfaff* sobre M. la aplicación

$$\alpha : M \to T^* M \text{ verifica } \alpha^* \theta = \alpha \text{ (véase [2]).}$$

En este trabajo se da una generalización natural de la forma de Liouville, definiendo una k-forma θ_k sobre $\Lambda\varepsilon\, T^* M$, que tiene propiedades análogas a las enunciadas anteriormente. Usando la propiedad cerrespondiente a (4) obtendremos en particular formas de clase constante máxima sobre ciertos productos de esferas. Esto proporciona un procedimiento nuevo para obtener formas sin ceros de grado mayor que 1 de clase constante máxima, sobre ciertas variedades.

Si M es un grupo de Lie G, al fibrado $\Lambda^k T^* G$ puede dársele de modo natural una estructura de grupo de Lie, que generaliza la dada para $k = 1$ en [1]. Puesto que se da una $(k + 1)$ forma sobre un grupo de Lie, ocurre preguntar bajo qué condiciones es invariante. Para $k = 1$, esta cuestión ha sido estudiada en [1]. En este trabajo damos una condición necesaria y suficiente para la invariancia de $d\theta_k$, siendo k cualquiera: Todas las formas invariantes de grado k sobre G deben ser cerradas.

Si Ω es una K-forma cerrada invariante sobre un grupo de Lie G, el sistema asociado a Ω ([2], pág. 27) define sobre G una distribución completamente integrable. Si el subgrupo H correspondiente a Ω es cerrado se prueba aquí que Ω se proyecta sobre K-forma invariante cerrada de G/H de clase constante máxima. Esto da un procedimiento para construir formas de clase constante máxima sobre espacios homogéneos.

2. Generalizacion de la forma de Liouville

Sea M una variedad diferenciable. Se considera el fibrado Π: $\Lambda^k T^* M \to M$, siendo $k \geq 1$ un entero fijo. Se define una k-forma exterior θ sobre $\Lambda^k T^* M$ mediante la fórmula

$$\theta (u) (\xi_1, \ldots, \xi_k) = u (\Pi_* \xi_1, \ldots, \Pi_* \xi_k)$$

siendo $u \in \Lambda^k T^* M$ y $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_u (\Lambda^k T^* M)$.

Para $k = 1$ se obtiene la forma de Liouville. Calculamos la expresión de θ en coordenadas locales. Sea $(x^1, \ldots, x^m)$ un sistema de coordenadas sobre $U \subset M$. Usaremos las letras α, β, γ para designar multiíndices de la forma $(i_1, \ldots, i_k)$ siendo $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$. Sobre el abierto $\Pi^{-1} (U)$ tenemos coordenadas $x^i . \Pi$, $i = 1, \ldots, m$ (que designaremos en un abuso de notación por x^i) y coordenadas y^α donde α recorre todos los multiíndices $(i_1, \ldots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$. Si $u = \sum u_\alpha dx^\alpha$, $y^\beta (u) = u_\beta$. Es claro que si un vector ξ_1 tangente a $u \in \Lambda^k T^* M$ se escribe $\xi_i = \sum_j a_i^j \dfrac{\partial}{\partial x^j} + \sum b_i^\alpha \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$. Se tiene $\Pi_* \cdot \xi_i = \sum_j a_i^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$

$$\theta(u)\ (\xi_1,\ldots,\xi_k) = u(\Pi_*\ \xi_1,\ldots,\Pi_*\ \xi_k) = \sum_\alpha u_\alpha\ det\,(a_r^{\alpha_h})_{r,h=1,\ldots,k} =$$
$$= \sum_\alpha y^\alpha(u)\cdot det\,(dx^{\alpha_h}\cdot\xi_r)_{r,h=1,\ldots,k} = (\sum_\alpha y^\alpha(u)\ dx^\alpha)\ (\xi_1,\ldots\xi_r)$$

donde escribimos $dx^\alpha = dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$ con $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.

Se tiene asi la expresión local $\theta = \sum_\alpha y^\alpha\, dx^\alpha$ que corresponde a la propiedad (1) de la forma de Liouville. Consideraremos asimismo la forma $\omega = d\theta$ de grado $k+1$ cuya expresión local es

$$\omega = \sum_\omega dy^\alpha \wedge dx^\alpha = \sum_\alpha dy^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$$

Es claro que ω tiene clase máxima pues si

$$\xi = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum b^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \text{ verifica } \xi \lrcorner\ \omega = 0,$$

entonces $\xi = 0$ ya que

$$0 = \xi \lrcorner\ \omega = \sum_\alpha b^\alpha\, dx^\alpha + \sum_{h,\alpha} (-1)^h\, a^h\, dy^\alpha \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \widehat{dx^{\alpha_h}} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$$

y por tanto todos los a^i y b^α son cero.

Sea ahora μ una métrica riemaniana sobre $\Lambda^k T^* M$ considerado como fibrado vectorial; es decir, para cada $x \in M$, $\mu(x)$: $\Lambda^k T^* M(x)$: $\times\ \Lambda^k T^* M(x) \to R$ es un producto escalar euclideo. Consideramos el fibrado esférico E sobre M que es

$$E = \{u \in \Lambda^k T^* M;\ \mu(u,u) = 1\}.$$

La aplicación $\Phi : \Lambda^k T^* M \to R$ dada por $\Phi(u) = g(u,\ u)$ se escribe en coordenadas locales

$$(x^i,\ y^\alpha) \to \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\,(x^1 \ldots x^m)\ y^\alpha\, y^\beta$$

Se tiene entonces que

$$d\Phi = \sum_{i,\alpha,\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\, y^\alpha\, y^\beta\, dx^i + 2 \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\, y^\alpha\, dy^\beta.$$

Consideremos el campo $X = \sum y^\alpha \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$. Este campo es transverso a E pues $d\Phi\ \cdot\ X = 2 \sum_{\alpha,\beta} g\,(y,\ y)$ que toma el valor constante $2. \neq 0$ sobre E.

Observamos además que este campo tiene la propiedad $X \lrcorner\, d\theta = X \lrcorner\, \omega = \theta$. Vamos a probar que θ induce sobre E una forma θ' de clase máxima. Tomemos un punto $u \in E$ y un vector $\xi \in T_u E$ tal que $\xi \lrcorner\, \theta' = 0$ y $\xi \lrcorner\, d\theta' = 0$. Hay que ver que $\xi = 0$. Para ello, probaremos que estas ecuaciones implican $\xi \lrcorner\, d\theta = 0$ y al ser $d\theta$ de clase máxima se tendrá $\xi = 0$. La ecuación $\xi \lrcorner\, d\theta' = 0$ implica que para todo $\eta_1 \ldots \eta_k \in T_u E$ se tiene $(\xi \lrcorner\, d\theta)\,(\eta_1, \ldots, \eta_k) = 0$. Puesto que E tiene codimensión 1 en $\Lambda^k T^* M$ y X es transverso a E, para probar que $\xi \lrcorner\, d\theta = 0$ basta ver que $(\xi \lrcorner\, d\theta)\,(X_u, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) = 0$ cualquiera que sean $\eta_1, \ldots, \eta_{-1} \in T_u E$. Pero

$$(\xi \lrcorner\, d\theta)\,(X_u, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) = (X_u \lrcorner\, \xi \lrcorner\, d\theta)\,(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) =$$
$$= -\,(\xi \lrcorner\, X_u \lrcorner\, d\theta)\,(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) = -\,(\xi \lrcorner\, \theta)\,(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) =$$
$$= -\,(\xi \lrcorner\, \theta')\,(\eta_1, \ldots, \eta_{-1}) = 0$$

Esto concluye la demostración, y muestra que θ y $d\theta = \omega$ verifican propiedades análogas a (1) y (4).

Es sencillo comprobar usando coordenadas locales que si un campo X verifica $X \lrcorner\, d\theta = \theta$, se tiene que $X = \sum_\alpha y \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$. Esto nos permite definir un campo X sobre todo $\Lambda^k T^* M$ caracterizado por la propiedad $X \lrcorner\, d\theta = \theta$, ya que al ser $X = \sum_\alpha y^\alpha \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$ el único con esta propiedad, su definición no depende de las coordenadas locales empleadas. La siguiente proposición corresponde a (3).

Proposicion. Existe un único X sobre $\Lambda^k T^* M$ que verifica $X \lrcorner\, d\theta = \theta$.

Observacion. Se sabe que para cualquier forma de Pfaff σ tal que $d\sigma$ tenga clase máxima, en particular la forma de Liouville, existe un único campo X tal que $X \lrcorner\, d\sigma = \sigma$. Tal propiedad no es cierta en general si σ tiene grado > 1, aunque sea de clase máxima. La proposición anterior nos muestra que la forma de Liouville generalizada sigue sin embargo conservando esta propiedad, como cabría esperar por la simplicidad de su expresión local.

Comprobamos por último la propiedad análoga a (5).

$$(\alpha^* \theta)\ (x)\ (\xi_1 \ldots \xi_k) = \theta\,(\alpha\,(x))\ (T\,\alpha\,\xi_1, \ldots, T\,\alpha\,\xi_k) =$$
$$= \alpha\,(x)\ (T\,\pi \cdot T\,\alpha\,\xi_1, \ldots, T\,\pi \cdot T\,\alpha\,\xi_k) = \alpha\,(x)\ (\xi_1 \ldots \xi_k).$$

ya que $\Pi \cdot \alpha = id_M$.

Consideramos el caso particular en que M es una esfera paralelizable; o sea $M = S^m$ con $m = 1, 3, 7$. Al ser S^m paralelizable, $\Lambda^k T^* S^m \cong S^m \times R^{\binom{m}{k}}$. Podemos tomar la métrica natural sobre el fibrado vectorial $S^m \times R^{\binom{m}{k}} \to S^m$. El fibrado esférico es entonces $S^m \times S^{\binom{m}{k}-1}$ con $k = 1, \ldots, m$. Haciendo $m = 3, 7$ y $k = 1, \ldots, m - 1$ para descartar los casos triviales tenemos que:

PROPOSICIÓN.

a) Sobre $S^3 \times S^2$ existen formas de grado 1 y 2 de clase constante máxima.

b) Sobre $S^7 \times S^6$ existen formas de grado 1 y 6 de clase constante máxima.

c) Sobre $S^7 \times S^{20}$ existen formas de grado 2 y 5 de clase constante máxima.

e) Sobre $S^7 \times S^{34}$ existen formas de grado 3 y 4 de clase constante máxima.

3. Caso en que la variedad es un grupo de Lie.

Sea G un grupo de Lie. Para cada $x \in G$ designaremos por L_x y R_x las traslaciones $y \to xy$ y $y \to yx$ respectivamente. Si $u \in \Lambda^k T^* G$. Se designará por $L^*_x u$ la imagen inversa de u por la aplicación $TL_x (x^{-1} y)$ siendo $y \in M$ la proyección de u. Por tanto $L^*_x u$ es una forma multilineal sobre $T_{x^{-1} y} M$. Si $\mathcal{G}$ es el álgebra de Lie de G designaremos por $A^k \mathcal{G}$ a las aplicaciones k-multilineales alternas sobre $\mathcal{G}$. La aplicación J: $\Lambda^k T^* G \to G \times A^k \mathcal{G}$ dada por $J(u) = (p(u), L^*_{p(u)} u)$ es un difeomorfismo.

El grupo G actúa a la derecha de $A^k \mathcal{G}$ según la fórmula $(\alpha, x) \to \alpha^x = ad(x)^* \alpha$, siendo $\alpha \in A^k \mathcal{G}$, $x \in G$ y ad: $G \to GL(\mathcal{G})$ la representación adjunta. Podemos entonces definir estructura de producto semidirecto sobre $G \times A^k(\mathcal{G})$ según la fórmula $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy, \alpha^y + \beta)$. La única estructura de grupo sobre $\Lambda^k T^* G$ que hace que J sea un isomorfismo viene dada por $u \cdot v = R^*_{y^{-1}} u + L^*_{x^{-1}} v$ siendo u una forma sobre x y v una forma sobre y. Desde luego $u \cdot v$ es una forma sobre xy, y por tanto Π: $\Lambda^k T^* G \to G$ es un homomorfismo.

Queremos investigar bajo que condiciones θ y $d\theta = \omega$ son invariantes. Es claro que θ no puede ser invariante, ya que no siendo identicamente nula vale 0 en el origen. Pasamos a determinar la condición de invariancia para ω. En lo que sigue designaremos por e, e' a las identidades en $\Lambda^k T^* G$, y G respectivamente. Si X es un campo invariante sobre $\Lambda^k T^* G$, X' será el campo invariante sobre G proyección de X por p.

LEMA. Si X, $Y_1, \ldots, Y_k$ son campos invariantes sobre $\Lambda^k T^* G$ se tiene que

$$(1) \qquad X\{\theta(Y_1,\ldots, Y_k)\}\ (u) = X\ \{\theta(Y_1,\ldots, Y_k)\}\ (e) + \\ + \sum_{j=1}^{k} L^*_x u\,(Y'_1(e'),\ldots, Y'_{j-1}(e'), [X', Y'_j]\ (e'), Y_{j+1}(e')\ldots, Y'_k(e'))$$

siendo $x = p(u)$.

DEMOSTRACIÓN. Según la definición de θ, la función entre llaves es $u \to L^*_x u\,(Y'_1(e'),\ldots, Y'_k(e'))$, siendo $x = \Pi(u)$. Sea $c\colon R \to \Lambda^k T^* G$ el homomorfismo correspondiente al campo invariante X. El flujo de X es $(u, t) \to u \cdot c(t)$. Si $c' = \Pi \cdot c$, se tiene que c' es el homomorfismo correspondiente a X'. Luego

$$X\{\theta(Y_1,\ldots, Y_k)\}\ (u) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L_{xc'(t)}(uc(t))\ (Y'_1(e'),\ldots, Y'_k(e')) = \\ = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L^*_{xc'(t)}\ (R^*_{c'(t)^{-1}}\, u + L^*_{x^{-1}}(c(t))\ (\ldots, Y'_i(e')\ldots) = \\ = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L^*_x u\,(\ldots,\ TL_{c'(t)}\ TR_{c'(t)^{-1}}\ Y'_i(e'),\ldots) + \\ \sum_{i=1}^{k} L^*_x u\ \ (Y'_1(e'),\ldots, Y'_{i-1}(e'), [X', Y'_i]\ (e'), Y'_{i+1}\ (e'),\ldots \\ \ldots, Y'_u(e')) + X\ \{\theta(Y_1,\ldots, Y_k)\}\ (e)\ Q.E.D.$$

Es sencillo comprobar que

$$(2) \qquad \theta([X, Y], Z_1,\ldots, Z_{k-1})\ (u) = L^*_x u\ \ ([X', Y']\ (e'), Z'(e'),\ldots, \\ \ldots, Z'_{k-1}(e')).$$

Para calcular $d\theta = \omega$ lo desarrollaremos por la fórmula

$$(3) \qquad d\theta(X_1,\ldots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\ X_i\ \ \{\theta(X_1\ldots \hat{X}_i \ldots X_{k+1})\} \\ + \sum_{1\leq r<s\leq k+1} (-1)^{r+s}\,\theta([X_r, X_s], X_1\ldots \hat{X}_i\ldots \hat{X}_j\ldots X_{k+1})$$

Naturalmente, $d\theta$ es invariante si y sólo si para cada $u \in \Lambda^k T^* G$ y cada familia de $k+1$ campos invariantes $X_1 \dots X_{k+1}$ se tiene $d\theta (X_1 \dots X_{k+1}) (u) = d\theta (X_1 \dots X_{k+1}) (e)$. Usando (1), (2) y (3) resulta que $d\theta = \omega$ es invariante si y sólo si para cada $u \in \Lambda^k T^* G$ y cada $(k+1)$ campos $X'_1 \dots X'_{k+1}$ invariantes sobre G se tiene

$$0 = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \sum_{j \neq i} L^*_x u \, (X'_1 (e'), \dots, [X'_i \, X'_j] (e'), \dots$$

$$\dots, X'_{k+1} (e')) + \sum_{r<s} (-1)^{r+s} L^*_x u \, ([X'_r, X'_s] (e'), X'_1 (e'), \dots$$

$$\dots, \widehat{X'_r (e')}, \dots, \widehat{X'_s (e')}, \dots, X'_{k+1} (e').$$

Esta condición es en realidad una condición sobre el álgebra de Lie de G que puede enunciarse así: Para cada $\alpha \in A^k G$ y cada familia $x_1, \dots, x_{k+1}$ de elementos de G se tiene

$$0 = \sum_{i \neq i} (-1)^{i+j+1} ([x_i, x_j], x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_{k+1})$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \quad ([x_i, x_j], x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_{k+1})$$

Esta expresión se simplifica, pues la mitad del primer grupo de sumandos, concretamente aquellos términos con $i > j$, se anulan con el segundo g3upo de sumandos. Asi pues, hemos probado

PROPOSICIÓN 1. La condición necesaria y suficiente para que $\omega_k = d\theta_k$ sea invariante es que para cada $\alpha \in A^k \mathcal{G}$ y cada familia $x_1 \dots x_{k+1} \in \mathcal{G}$ se tenga

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha ([x_i, x_j], x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_{k+1}) = 0$$

o lo que es igual, si $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathcal{G}$.

$$(4) \quad 0 = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [x_i, x_l] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots \wedge x_{k+1}$$

Es bien sabido que si Λ es una k-forma invariante sobre un grupo de Lie G obtenida por traslación de cierta $\lambda \in A^k \mathcal{G}$, entonces $d\Lambda$ se obtiene por traslación de $\partial\lambda \in A^{k+1} \mathcal{G}$ definido por

$$\partial\lambda (x_1 \dots x_{k+1}) = \sum_{i=j} (-1)^{i+j} \lambda ([x_i, x_j], x_i \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_{k+1})$$

PROPOSICIÓN 2. La condición necesaria y suficiente para $\omega_k = d\theta_k$ sea invariante es que toda k-forma invariante sobre G sea cerrada.

A la vista de estas proposiciones se deducen fácilmente que:

(a) ω_1 es invariante si y sólo si $\mathcal{G}$ es abeliana. (Prop. 1), o equivalentemente, si G es abeliano. Además, si G es abeliano todas las formas ω_k son invariantes.

(b) Si $k = dim\, G = dim\, \mathcal{G}$, ω_k es invariante.

(c) Si el grupo G es compacto y $k = dim\, G = 1$, ω_k es invariante. En efecto, si η es una $k - 1$ forma invariante sobre G se tiene por el teorema de Stokes que $\int_G d\eta = 0$. Al ser la forma invariante se sigue que $d\eta = 0$, y ahora basta aplicar la proposición 2.

(d) Existen ejemplos de grupos en que ω_k es sólo invariante para $k = dim\, G$. Por ejemplo, el grupo afin de R que no es abeliano y tiene dimensión 2.

(e) Existen ejemplos de grupos compactos en que ω_k es invariante sólo para los valores $k = dim\, G$, $dim\, G - 1$. En efecto, tómese $G = 0(n; R)$. Entonces $\mathcal{G} = o(n; R)$ que tiene una base canónica $\{A_j^i; 1 \leq i < j \leq n$ siendo A_j^i la matriz con un 1 en lugar (i, j), un -1 en el lugar (j, i), y ceros en el resto. Se comprueba que $[A_j^i, A_q^p]$ es cero excepto en los casos siguientes:

$$\text{Si } j = p,\ [A_j^i, A_q^p] = A_q^i$$

$$\text{Si } j = q,\ [A_j^i, A_q^p] = \begin{cases} -A_p^i & \text{si } i < p \\ \ \ A_i^p & \text{si } p < i \end{cases}$$

$$\text{Si } i = p,\ [A_j^i, A_q^p] = \begin{cases} -A_p^j & \text{si } j < q \\ \ \ A_j^q & \text{si } q < j \end{cases}$$

$$\text{Si } i = q\ \ [A_j^i, A_q^p] = \begin{cases} \ \ A_p^j & \text{si } j < p \\ -A_j^p & \text{si } p < j \end{cases}$$

Se ve además que cada una de estas posibilidades excluye todas las demás. La base B que estamos considerando tiene la propiedad: Si x, $y \in B$, entonces $[x, y]$ es cero o bien $[x, y] \in B$ siendo distinto de $\pm x$, $\pm y$. De esta observación y de la propiedad 1 se deduce la primera afirmación de la siguiente

PROPOSICIÓN 3.

Si $G = 0\ (n; R)$, para $k = dim\ G - 1$, ω_k es invariante. Sin embargo, para $k < dim\ G - 1$, ω_k no es invariante.

DEMOSTRACIÓN. Queda sólo probar la segunda afirmación. Ordenamos la base de G según la sucesión $A_2^1, A_2^1, \ldots, A_n^1, A_3^2 \ldots, A_n^2, \ldots, A_{r+1}^r, \ldots, A_n^r, \ldots, A_{n-1}^n$. Veamos que si en (4)tomamos como $x_1 \ldots x_{k+1}$ los $k+1$ primeros elementos de esta sucesión no se obtiene cero para $k < dim\ G - 1$. Desde luego, (4) será en este caso de la forma $\sum \pm x_i \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$ siendo $x_{i_r} \in B$; para mostrar que no es cero basta comprobar que la suma de los términos en que aparece A_n^{n-1} no es 0. La matriz $-A_n^{n-1}$ (que es el último elemento de la sucesión) sólo se puede expresar como corchete $[A_j^i\ A_p^q v]$ para $i = p = 1, \ldots, n-1,\ q = n$. Por tanto la suma de los términos que contienen a A_n^{n-1} es de la forma

$$\sum_{i=1}^{r} \pm A_n^{n-1} \wedge A_2^1 \ldots \wedge \widehat{A_{n-1}^i} \wedge \widehat{A_n^i} \wedge A_{i+2}^{i+1} \wedge \ldots \wedge A_s^r$$

siendo A_s^r el elemento de B que ocupa el lugar $k+1$. Como no puede ser $A_s^r = A_n^{n-1}$ resulta que este k-vector no es nulo.

Q.E.D.

4. CONSTRUCCION DE FORMAS DE CLASE CONSTANTE MAXIMA SOBRE CIERTOS ESPACIOS HOMOGENEOS

Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Consideramos una k-forma multilineal alternada ω sobre $\mathcal{G}$ y hacemos la hipótesis de que $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{G};\ x \lrcorner \omega = 0\}$ es una subalgebra de $\mathcal{G}$. Tal es el caso si ω es cerrada, pues

$$i_{[x,y]}\,\omega = L_x\,(y \lrcorner \omega) - x \lrcorner (L_x\,\omega) = -y \lrcorner (d\,(x \lrcorner \omega) + x \lrcorner d\omega) = 0.$$

Sea H el subgrupo de Lie correspondiente a $\mathcal{H}$. Supongamos que sea cerrado. Consideramos la proyección p: $G \to G/H$. La forma ω induce a una forma diferencial invariante Ω sobre G. Si $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ es la proyección tenemos una k-forma alternada ω' sobre $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ bien definida por $\omega'(x_1 + \mathcal{H}, \ldots, x_k + \mathcal{H}) = \omega(x_1, \ldots, x_k)$. Puesto que $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ es isomorfo al espacio tangente a G/H en H, y G actua transitivamente sobre G/H, ω' induce a una k-forma exterior Ω' sobre G/H.

Se comprueba fácilmente que $\pi^* \Omega' = \Omega$ y que si Ω es cerrada, Ω' es cerrada. Afirmamos que Ω' tiene clase constante máxima. Supongamos que $X' \lrcorner \Omega' = 0$. Podemos reducirnos al caso en que X' sea un campo obtenido al trasladar por G/H un cierto $x' \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Para probar que $X' = 0$ basta probar que $x' = 0$. Pero $X' \lrcorner \Omega' = 0$ implica que

$$0 = (x' \lrcorner \omega') (y_1' \ldots y_k') = (x \lrcorner \omega) (y_1 \ldots y_k)$$

siendo $x, y, \ldots, y_k \in \mathcal{G}$ tales que $\pi(x) = x', \pi(y_i) = y_i'$. Se sigue de ésto que si $x' \lrcorner \omega' = 0$ entonces $x \lrcorner \omega = 0$, luego $x \in H$, y $x' = \pi(x) = 0$. Hemos probado la siguiente

PROPOSICIÓN 4.

Sea ω una k-forma multilineal alternada sobre G. Supongamos que $\mathcal{H} = \{x \in G;\ x \lrcorner \omega\} = 0$ sea una subálgebra de Lie de G (basta que ω sea cerrada) y que el subgrupo H correspondiente a $\mathcal{H}$ sea cerrado. Entonces ω induce una k-forma exterior sobre G/H que es cerrada si ω es cerrada.

Ejemplo: Sea Φ una forma lineal sobre G. Definimos $\omega(x, y) = \Phi([x, y])$ que es, no sólo cerrada sino incluso exacta. Aplicamos la proposición 4 al caso $G = S0(n;\ R)$. Con la base definida anteriormente se toma como $\Phi(x)$ la componente de x en A_2^1. Decir que $x = \sum x_i^j A_i^j \in \mathcal{H}$ equivale a las ecuaciones: Para $q = 3, \ldots, n$, $\Phi([x, A_q^1]) = x_q^2 = 0$, $\Phi([x, A_q^2]) = x_q^1 = 0$.

Asi pues, $\mathcal{H}$ es la subálgebra generada por A_2^1 y A_q^p con $p \geq 3$. Es decir $\mathcal{H} \cong so(2) \times so(u - 2)$. Hemos definido por tanto una forma simpléctica sobre $SO(n;\ R)/SO(2;\ R) \times SO(n - 2;\ R)$. Este espacio homogeneo puede también definirse como el conjunto de pares subespacios (S_1, S_2) de R^n que verifican $dim\ S_1 = 2$, $dim\ S_2 = n - 2$ y $R^m = S_1 \oplus S_2$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BON-YAU-CHU: *Symplectie homogeneous Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. (197), 1974, pp. 145-159.

[2] C. GODBILLON: *Geometrie differentielle et mécanique analytique.* Hermann

Universidad Complutense
Facultad de Matemáticas
Madrid.